18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

KÖN·PR·REGIERUNG ZU POTSDAM

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Neunzehnter Band.

In vier Heften.

Mit drei Figurentafeln.

Berlin, 1839.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à PARIS chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des neunzehnten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
2.	Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. Von Herrn Prof. Dr. *Gudermann* zu Münster. (Fortsetzung von No. 1., 10., 15. und 21. im vorigen Bande.)	I.	46
8.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	II.	119
12.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	III.	244
3.	Sur la décomposition d'une certaine classe de fonctions. Par Mr. *Chr. Jürgensen*, de Copenhague.	I.	84
5.	Ueber die Congruenz $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{p}$. (Theorie der trigonometrischen Functionen in Bezug auf Congruenzen.) Von Herrn *Theodor Schönemann*.	II.	93
6.	Sur la sommation des transcendentes à différentielles algébriques. Par Mr. *Jürgensen*, de Copenhague.	II.	113
7.	Démonstration de la formule générale d'intégration indéfinie proposée par Mr. Hill. Par Mr. *Ramus*, prof. à Copenhague.	II.	117
11.	Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen, nebst einigen Anwendungen derselben. Von Herrn *Theodor Schönemann* zu Berlin.	III.	231
14.	Schlufs dieser Abhandlung.	IV.	289
13.	Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y$ par des intégrales définies. Par *E. E. Kummer*, Dr. en phil. à Liegnitz.	III.	286
16.	Ueber die complexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der 5ten, 8ten und 12ten Potenzen zu betrachten sind. Von Herrn *C. G. J. Jacobi*, Professor ordin. an der Universität zu Königsberg in Pr. (Gelesen in der Akademie der Wissenschaften den 16. Mai 1839.)	IV.	314
16. *a*.	Sur le théorême de Wilson. Par Mr. *Brennecke*, professeur des math. à Berlin.	IV.	319
17.	Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des nombres. Première partie. Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet*	IV.	324

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	2. Geometrie.		
10.	Beweise einiger geometrischer Lehrsätze. Von Herrn Dr. *Bauer* in Stettin. .	III.	205
15.	Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoïd und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. Von *C. G. J. Jacobi*, Professor ordin. zu Königsberg in Pr. (Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 18. April 1839.)	IV.	306
18.	Wie sich entscheiden läfst, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaafse. Von Hrn. Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin. . .	IV.	370
	3. Mechanik.		
9.	Mémoire sur l'équilibre d'un corps solide suspendu à un cordon flexible. Par M. *Pagani*, prof. ord. à l'université de Louvain.	III.	185
	II. Anwendung der Mathematik.		
1.	Discussion de la forme générale des ondes lumineuses. Par Mr. *Plücker*, prof. ord. à Bonn.	I.	1
4.	Note rélatif au précédent mémoire.	I.	91

1.

Discussion de la forme générale des ondes lumineuses.

(Par Mr. *Plücker*, prof. ord. à Bonn.)

---

1. Dans ce premier mémoire sur la theorie des ondes lumineuses, je me propose de traiter, sous le seul rapport géométrique, la forme la plus générale que prend, d'après l'illustre *Fresnel*, une telle onde dans l'interieur des crystaux, doués de la double réfraction. Il n'est nullement mon but de m'occuper ici du détail des questions d'optique, j'emprunterai seulement son langage. Avant d'entrer en matiére je developperai quelques formules d'un usage général et qui par suite nous serviront, soit pour trouver l'équation de l'onde, soit pour la discuter.

2. *Une surface étant coupée par un plan donné, déterminer analytiquement la courbe d'intersection dans son propre plan.* — Soit, dans la supposition de coordonnées rectangulaires,

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface proposée; désignons par φ, l'angle que fait le plan coupant avec le plan des xy et par α, l'angle que l'intersection des deux plans fait avec l'axe des x. Le plan coupant, passant d'ailleurs par l'origine des coordonnées, sera alors complétement déterminé par les deux angles φ et α. Nous nous proposerons de trouver l'équation de la courbe d'intersection dans le plan même de cette courbe, en choisissant, pour axes des coordonnées (v et w), deux lignes droites de ce plan, rectangulaires être elles et dont l'une (l'axe des v) coïncide avec l'intersection dans le plan des xy.

Pour y parvenir, faisons d'abord tourner, dans leur plan, les axes des y et des x jusqu'à ce que l'un deux se confonde avec l'axe des v, l'autre lui étant perpendiculaire. Nous aurons alors, en distinguant les coordonnées nouvelles par des accents,

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \qquad z = z'.$$

Le plan coupant est perpendiculaire au plan des $y'z'$ parcequ'il passe par l'axe des x'. L'intersection des deux plans sera donc l'axe des w, tandis que l'axe de v se confond avec l'axe des x'. De là résultent pour

un point quelconque du plan coupant les relations suivantes:

$$x' = v, \qquad y' = w\cos\Phi, \qquad z' = w\sin\Phi;$$

et en combinant ces équations avec les équations précédentes nous obtenons:

1. $x = v\cos\alpha - w\sin\alpha\cos\Phi, \quad y = v\sin\alpha + w\cos\alpha\cos\Phi, \quad z = w\sin\Phi.$

Enfin, pour avoir l'équation cherchée de la courbe d'intersection, nous n'avons qu'a substituer ces valeurs dans l'équation de la surface proposée.

Si nous réprésentons le plan coupant par l'équation suivante:

$$Ax + By + Cz = 0$$

il est, d'après les formules connues:

$$\sin^2\alpha = \frac{A^2}{A^2+B^2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{B^2}{A^2+B^2},$$

$$\cos^2\Phi = \frac{C^2}{A^2+B^2+C^2} \qquad \sin^2\Phi = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2};$$

d'où nous tirons encore

$$\sin^2\alpha\sin^2\Phi = \frac{A^2}{A^2+B^2+C^2}, \qquad \cos^2\alpha\sin^2\Phi = \frac{B^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

3. *Singularités des surfaces.* Tout ce que je trouve dans les Traités sur les points singuliers des surfaces courbes, me parait très peu satisfaisant. Pour ne pas perdre de vue mon but spécial, je dois être court dans ce qu'on va lire, en réservant pour une autre occasion l'exposition d'une théorie générale.

D'abord il ne faut pas confondre deux sortes de singularités; les unes se rapportent à des points, où la surface est touchée par un nombre infini de plans et les autres à des plans qui touchent la surface en un nombre infini de points. Les plans tangents dans un *point singulier* enveloppent en général un cône du *deuxième* degré, qui se réduit a un seul point, si les plans tangents deviennent imaginaires. Alors le point singulier est un point isolé et conjugué à la surface. Dans le cas intermédiaire, où le cône se réduit à une ligne droite, le point singulier constitue en général une *pointe* de la surface. D'un autre coté les points dans lesquels une surface est touchée par un plan singulier, forment en général une section conique. Si cette conique devient imaginaire, le plan tangent est un plan isolé et conjugué à la surface. Avant de disparaître, la conique se réduit à un point, ce qui indique une inflexion de la surface en ce point.

4. Occupons nous d'abord des *points singuliers.* Pour que la surface, dont l'équation est

$$1. \qquad V = F(x, y, z) = 0$$

ait un tel point, il faut que les coordonnées de ce point satisfassent, outre à l'équation proposée, encore aux trois équations suivantes:

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0.$$

Dans ce cas les coëfficients de l'équation du plan tangent se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Soit

$$2. \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan quelconque, passant par ce point; ce plan coupera la surface proposée suivant une courbe qui a un point singulier, coïncidant avec le point singulier de la surface. En général on peut donner a volonté à ce plan une position telle, que ce point devienne, par rapport à la courbe d'intersection, ou un point double proprement dit, avec deux tangentes réelles, ou un point conjugué. Dans le cas intermédiaire le point singulier devient un point de rebroussement de la courbe, et en même temps le plan coupant devient un des plans *tangents* de la surface en ce point. En éliminant z entre les équations (1.) et (2.) on obtient pour la projection de la courbe d'intersection sur le plan des xy, l'équation suivante:

$$3. \quad F\left[x, y, \left(-\frac{Ax+By+D}{C}\right)\right] = U = 0$$

et comme on ne fait pas perdre à une courbe son point de rebroussement en la projettant d'une manière quelconque, il suffit, que le point double de la courbe, représentée par la dernière équation, soit un point de rebroussement, pour que le plan (2.) touche la surface proposée. J'ai fait voir dans mon *Système de Géométrie analytique**) que, dans le cas d'un point de rebroussement de la courbe (3.), l'on a l'équation suivante:

$$4. \quad \left(\frac{d^2U}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2U}{dx^2} \cdot \frac{d^2U}{dy^2} = 0,$$

où il faut rapporter les coëfficients différentiels partielles à ce point, dont les coordonnées x et y sont les mêmes, que les coordonnées analogues du point singulier de la surface proposée. En remarquant qu'on a

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dz} \cdot \frac{A}{C}, \qquad \frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dy} - \frac{dV}{dz} \cdot \frac{B}{C},$$

---

*) System der analytischen Geometrie. **1835.** Troisième section §. 6.

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d^2V}{dx^2} - 2\frac{d^2V}{dx\,dz}\cdot\frac{A}{C} + \frac{d^2V}{dz^2}\cdot\frac{A^2}{C^2},$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \frac{d^2V}{dy^2} - 2\frac{d^2V}{dy\,dz}\cdot\frac{B}{C} + \frac{d^2V}{dz^2}\cdot\frac{B^2}{C^2},$$

$$\frac{d^2U}{dx\,dy} = \frac{d^2V}{dx\,dy} - \frac{d^2V}{dx\,dz}\cdot\frac{B}{C} - \frac{d^2V}{dy\,dz}\cdot\frac{A}{C} + \frac{d^2V}{dz^2}\cdot\frac{AB}{C^2},$$

l'équation (4.) se transformera dans la suivante:

5. $$\left[\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2V}{dx^2}\cdot\frac{d^2V}{dy^2}\right]C^2 + \left[\left(\frac{d^2V}{dx\,dz}\right)^2 - \frac{d^2V}{dx^2}\cdot\frac{d^2V}{dz^2}\right]B^2$$
$$+\left[\left(\frac{d^2V}{dy\,dz}\right)^2 - \frac{d^2V}{dy^2}\cdot\frac{d^2V}{dz^2}\right]A^2 - 2\left[\frac{d^2V}{dx\,dy}\cdot\frac{d^2V}{dx\,dz} - \frac{d^2V}{dy\,dz}\cdot\frac{d^2V}{dx^2}\right]BC$$
$$-2\left[\frac{d^2V}{dy\,dx}\cdot\frac{d^2V}{dy\,dz} - \frac{d^2V}{dx\,dz}\cdot\frac{d^2V}{dy^2}\right]AC - 2\left[\frac{d^2V}{dz\,dx}\cdot\frac{d^2V}{dz\,dy} - \frac{d^2V}{dx\,dy}\cdot\frac{d^2V}{dz^2}\right]AB$$
$$= 0.$$

Si les coëfficients A, B, C du plan (2.) satisfont à cette équation, le plan touchera la surface proposée. Tous ces plans tangents, passant en outre par le point singulier, enveloppent un cône du second degré, qu'on peut dire être représenté par l'équation (5.), en y regardant A, B, C comme variables. C'est le cône tangent à la surface dans le point singulier.

5. Supposons maintenant que la surface soit déterminée par ses plans tangents et soit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

un de ces plans, qui si nous posons $D = 1$ ne dépend que des trois quantités A, B et C. Ces quantités signifient les valeurs réciproques, et prises avec le signe contraire, des trois segments que le plan coupe sur les trois axes des coordonnées. Nous pouvons alors réprésenter la surface par une équation de la forme

1. $$F(A, B, C) = W = 0$$

qui suffit à sa détermination, tout aussi complétement que son équation entre x, y et z. De même l'équation

2. $$Ax + By + Cz + 1 = 0$$

en y regardant A, B et C comme variables, réprésentera un point. Les coordonnées de ce point seront les trois constantes x, y et z. En éliminant C entre les équations (1.) et (2.) l'on obtient:

3. $$F\left[A, B, -\left(\frac{Ax+By+1}{z}\right)\right] = S = 0.$$

Cette équation doit être satisfaite pour tous les plans, qui passant par le

point (2.) touchent la surface proposée; c'est l'équation de la courbe d'intersection avec le plan des xy du cône circonscrit à cette surface et ayant le point (2.) pour sommet, cette courbe étant déterminée par ses tangentes. Lorsqu'on prend le point (2.) dans le plan singulier de la surface, il est évident qu'en général cette courbe doit avoir une tangente double et coïncidant avec l'intersection du plan singulier et de celui des xy. Selon qu'on prend le point à l'extérieur ou à l'intérieur de la courbe de contact dans le plan singulier, la tangente double touchera, ou deux branches réelles ou deux branches imaginaires de la courbe (3.) Dans ce dernier cas, c'est une ligne droite isolée et conjuguée de cette courbe. Si le point se trouve sur la courbe de contact elle même, la courbe (3.) aura une inflexion, indiquée par l'équation suivante, tout-à-fait analogue à l'équation (4.) du numéro précédent:

$$\left(\frac{d^2S}{dA\,dB}\right)^2 - \frac{d^2S}{dA^2}\cdot\frac{d^2S}{dB^2} = 0.$$

En la dévéloppant de la même manière, nous obtiendrons:

$$5.\quad \left[\left(\frac{d^2W}{dA\,dB}\right)^2 - \frac{d^2W}{dA^2}\cdot\frac{d^2W}{dB^2}\right]z^2 + \left[\left(\frac{d^2W}{dA\,dC}\right)^2 - \frac{d^2W}{dA^2}\cdot\frac{d^2W}{dC^2}\right]y^2$$
$$+\left[\left(\frac{d^2W}{dB\,dC}\right)^2 - \frac{d^2W}{dB^2}\cdot\frac{d^2W}{dC^2}\right]x^2 - 2\left[\frac{d^2W}{dA\,dB}\cdot\frac{d^2W}{dA\,dC} - \frac{d^2W}{dB\,dC}\cdot\frac{d^2W}{dA^2}\right]yz$$
$$-2\left[\frac{d^2W}{dB\,dA}\cdot\frac{d^2W}{dB\,dC} - \frac{d^2W}{dA\,dC}\cdot\frac{d^2W}{dB^2}\right]xz - 2\left[\frac{d^2W}{dC\,dA}\cdot\frac{d^2W}{dC\,dB} - \frac{d^2W}{dA\,dB}\cdot\frac{d^2W}{dC^2}\right]xy$$
$$= 0.$$

C'est l'équation d'un cône dont le sommet est a l'origine des coordonnées. Son intersection avec le plan singulier sera la courbe, suivant laquelle la surface proposée est touchée par ce plan.

6. Si, en prennant $C=1$, on détermine un plan par les trois constantes A, B et D de son équation

$$z + Ax + By + D = 0,$$

l'on peut remplacer l'équation (1.) par une équation de la forme

$$F(A, B, D) = W' = 0,$$

d'où, en éliminant D, il vient

$$F[A_1B_1(-(Ax+By+z))] = S' = 0.$$

Par un raisonnement tout-à-fait analogue à celui du numéro précédant, l'on obtient entre les coordonnées des points, dans lesquels le plan singulier touche la surface, l'équation de condition:

$$\left(\frac{d^2S'}{dA\,dB}\right)^2 - \frac{d^2S'}{dA^2}\cdot\frac{d^2S'}{dB^2} = 0,$$

qui se transforme dans la suivante:

$$6.\quad \left[\left(\frac{d^2W'}{dA\,dB}\right)^2-\frac{d^2W'}{dA^2}\cdot\frac{d^2W}{dB^2}\right]+\left[\left(\frac{d^2W'}{dA\,dD}\right)^2-\frac{d^2W'}{dA^2}\cdot\frac{d^2W'}{dD^2}\right]y^2$$
$$+\left[\left(\frac{d^2W'}{dB\,dD}\right)^2-\frac{d^2W'}{dB^2}\cdot\frac{d^2W'}{dD^2}\right]x^2-2\left[\frac{d^2W'}{dA\,dB}\cdot\frac{d^2W'}{dA\,dD}-\frac{d^2W'}{dB\,dD}\cdot\frac{d^2W'}{dA^2}\right]y$$
$$-2\left[\frac{d^2W'}{dB\,dA}\cdot\frac{d^2W'}{dB\,dD}-\frac{d^2W'}{dA\,dD}\cdot\frac{d^2W'}{dB^2}\right]x-2\left[\frac{d^2W'}{dD\,dA}\cdot\frac{d^2W'}{dD\,dB}-\frac{d^2W'}{dA\,dB}\cdot\frac{d^2W'}{dD^2}\right]xy$$
$$=0.$$

C'est donc l'équation de la projection sur le plan des xy de la courbe de contact dans le plan singulier.

Pour ce qu'il peut y avoir d'inusité dans les dévéloppements des deux derniers numéros je renvoie à la *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes,* qui a été publiée dans le neuvième volume de ce même Journal.

7. *Détermination des axes d'une ellipse.* — Soit, dans la supposition de coordonnées rectangulaires,

$$\mu y^2+2\nu xy+\varrho x^2=1$$

l'équation de l'ellipse, alors on obtient, pour déterminer les valeurs réciproques de ses demi-axes, l'équation suivante:

$$1.\quad V^4-(\mu+\varrho)V^2+(\mu\varrho-\nu^2)=0.$$

En me contentant ici, de transcrire simplement cette équation, qui trouve sa place dans les ouvrages où l'on traite des sections coniques, je citerai seulement mes *Dévéloppements* *).

En désignant les valeurs réciproques des deux demi-axes par $V_,$ et $V_{,,}$, nous obtenons par la résolution de l'équation (1.) la relation suivante:

$$2.\quad V_,^2-V_{,,}^2=\pm\sqrt{((\mu+\varrho)^2-4(\mu\varrho-\nu^2))}.$$

8. *Surfaces polaires réciproques.* — L'on a nommé surfaces polaires réciproques deux surfaces telles, que les points de l'une sont les poles des plans tangents de l'autre, par rapport à une surface quelconque du second ordre, que je nommerai *directrice.* En prennant comme directrice, une sphère dont le rayon est égal à l'unité, le plan polaire d'un point donné quelconque, dont x', y' et z' sont les trois coordonnées rectangulaires (l'origine étant le centre de la sphère) a pour équation:

$$x'x+y'y+z'z=1.$$

---

*) Analytische geometrische Entwicklungen. 1828. Vol. I. p. 251.

En déterminant la position de ce plan, moyenant les trois quantités A, B et C, prises dans la signification du numéro 4., nous avons:

$$x' = -A, \quad y' = -B, \quad z' = -C;$$

d'où il résulte que l'une quelconques de deux surfaces polaires réciproques étant donnée par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'on obtient, pour déterminer l'autre l'équation suivante:

$$F(-A, -B, -C) = 0;$$

et réciproquement.

9. Si l'on prend comme directrice un ellipsoïde quelconque, que je réprésenterai par l'équation suivante

$$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab} = 1,$$

le plan polaire d'un point quelconque (x', y', z') a pour équation

$$\frac{x'x}{bc} + \frac{y'y}{ac} + \frac{z'z}{ab} = 1,$$

d'où l'on obtient, en conservant les dénominations précédentes:

$$\frac{x'}{bc} = -A, \quad \frac{y'}{ac} = -B, \quad \frac{z'}{ab} = -C.$$

L'une de deux surfaces polaires réciproques étant donnée par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'autre sera déterminée par l'équation suivante:

$$F(-bcA, -acB, -abC) = 0;$$

et réciproquement.

10. Deux ellipsoïdes concentriques sont polaires réciproques par rapport à une sphère, ayant le même centre, si le produit des demi-axes correspondants est égal au carré du rayon de la sphère. Les deux ellipsoïdes, réprésentés par les deux équations suivantes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$$

sont polaires réciproques, si le rayon de la sphère directrice est égal à l'unité.

11. Si la surface directrice est un ellipsoïde quelconque, le produit de deux demi-axes correspondants de deux ellipsoïdes polaires réciproques est égal au carré du demi-axe correspondant de la surface directrice. Ainsi par exemple les deux ellipsoïdes:

$$\frac{(a^2+b^2)x^2}{(a^2+c^2)b^2}+\frac{2y^2}{(a^2+c^2)}+\frac{(c^2+b^2)z^2}{(a^2+c^2).b^2}=1,$$
$$\frac{(a^2+c^2)x^2}{(a^2+b^2)c^2}+\frac{(a^2+c^2)y^2}{2a^2c^2}+\frac{(a^2+c^2)z^2}{(c^2+b^2)a^2}=1,$$

sont deux surfaces polaires reciproques par rapport à l'ellipsoïde:

$$\frac{x^2}{ab}+\frac{y^2}{ac}+\frac{z^2}{ab}=1.$$

12. Deux *lignes droites sont polaires réciproques,* par rapport à une directrice quelconque, si l'une d'elle passe par les deux points, où les deux plans tangents passant par l'autre, touchent la surface directrice. Deux lignes droites polaires réciproques par rapport à une sphère, ont des directions perpendiculaires entre elles.

13. L'on a nommé *pôles conjugués,* par rapport à une surface du second ordre, deux points tels, que l'un d'eux est le point, où la ligne droite, qui passe par le centre de la surface et l'autre point, rencontre le plan polaire de ce dernier. Par rapport à une sphère, deux points qui sont tellement situés sur un même diamètre que le produit de leurs distances du centre, est égal au carré du rayon, sont deux points conjugués. On obtient l'un, en abaissant du centre une perpendiculaire sur le plan polaire de l'autre.

14. *Sections circulaires d'un ellipsoïde.* — Un ellipsoïde, dont les trois demi-axes sont a, b et c, est réprésenté par l'équation suivante:

$$1.\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

En combinant cette équation avec celle d'une sphère de rayon indéterminé:

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

l'on peut toujours parvenir à une équation, qui ne contient que les carrés de deux quelconques des trois variables. Une telle équation réprésentera le système de deux plans (réels ou imaginaires) perpendiculaires à l'un des plans des coordonnées, qui, passant par l'intersection de la sphère et de l'ellipsoïde, vont couper celui-ci suivant deux cercles. Nous ne détermineront ici que les deux plans réels. En supposant pour cela que $c>b$ et $b>a$, nous n'avons qu'à prendre $r=b$ et à rétrancher ensuite de la première équation, après l'avoir multiplié par b^2, l'équation de la sphère. Ainsi on obtient

$$c^2(b^2-a^2)x^2-a^2(c^2-b^2)z^2=0,$$

équation qui se réduit aux deux équations suivantes:

$$2. \quad c\sqrt{(b^2-a^2)}\,x \pm a\sqrt{(c^2-b^2)}\,z = 0.$$

Pour déterminer les sections circulaires de l'ellipsoïde, dont l'équation est

$$3. \quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2 = 1,$$

l'on n'a qu'à mettre $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ à la place de a^2, b^2, c^2 dans les résultats précédents, ce qui donne pour les plans des sections en question:

$$4. \quad \sqrt{(b^2-a^2)}\,x \pm \sqrt{(c^2-b^2)}\,z = 0.$$

On parvient également à l'équation (2.), en posant, avant l'élimination, y égal à zéro dans les équations de la sphère et de l'ellipsoïde (1.); d'où l'on conclût, que les deux plans (2.) sont perpendiculaires au plan des xz et le coupent suivant les deux diamètres communs à l'ellipse et au cercle d'intersection; ou bien dans des directions perpendiculaires à ces diamètres communs, si l'on fait tourner d'abord, dans son plan, l'ellipse, de sorte que son axe c tombe sur l'axe des x et son axe a sur l'axe des z.

Dans cette position l'équation de l'ellipse devient:

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2} = 1,$$

et les quatre tangentes qui lui sont communes avec le cercle en question:

$$x^2+z^2 = b^2,$$

ont pour équations:

$$\sqrt{(b^2-a^2)}\,x \pm \sqrt{(c^2-b^2)}\,z \pm b\sqrt{(c^2-a^2)} = 0.$$

Elles sont donc parallèles aux plans (4.)

L'on voit donc que les sections circulaires (2.) et (4.) des deux ellipsoïdes (1.) et (3.) vont passer toutes les quatre par l'axe des y, étant perpendiculaires au plan des xz; que celles de l'ellipsoïde (1.) coupent ce plan suivant deux lignes droites perpendiculaires aux diamètres communs $M'M_{,}$ et $M''M_{,,}$ (Fig. 1.) tandis que celles de l'ellipsoïde (3.) le coupent parallèlement aux deux tangentes communes $T,T_{,,}$ ou $T'T''$ et $T_{,}T''$ ou $T_{,,}T'$.

15. *Surface d'élasticité de Fresnel.* — En considérant les actions moléculaires, *Fresnel* a prouvé, que dans le cas le plus général, l'élasticité de l'éther suivant les différentes directions dans l'intérieur d'un crystal, est complétement déterminée par l'élasticité, suivant trois directions fixes, perpendiculaires entre elles et dépendantes de la forme et de la nature du crystal. Il les nomme *axes d'élasticité,* et ensuite il construit la *surface*

d'élasticité, en prennant ses rayons vecteurs proportionels aux carrés des élasticités suivant ces mêmes rayons. Pour l'équation de cette surface il trouve:

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=(x^2+y^2+z^2)^2,$$

qui, si l'on appelle r son rayon vecteur, peut s'écrire ainsi:

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=r^4.$$

Dans tout ce qui va suivre nous supposerons

$$c^2>b^2, \qquad b^2>a^2,$$

de manière que l'élasticité, suivant l'axe des z est un *maximum,* et un *minimum* suivant l'axe des x.

Dans les crystaux *à un seul axe* deux des trois élasticités a^2, b^2, c^2 sont égales entre elles. Il y a ici deux cas à distinguer. Dans les crystaux, nommés *positifs,* on a:

$$c^2=b^2>a^2,$$

et dans les crystaux, nommés négatifs,

$$a^2=b^2<c^2.$$

Si les trois élasticités sont égales entre elles toutes les trois, il n'y a pas de double réfraction.

16. *Rapport de la surface d'élasticité avec deux ellipsoïdes.*— La surface d'élasticité a des rapports intimes avec les deux ellipsoïdes réprésentés par les deux équations suivantes:

$$2. \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$3. \quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1.$$

L'ellipsoïde (2.), que je nommerai partout, dans ce qu'on va lire, le *premier,* a pour axes les trois axes de la surface d'élasticité; les axes de l'autre, que je nommerai le *second ellipsoïde,* en ont les valeurs inverses.

Par un calcul analytique très simple M. *Magnus* *) a déjà prouvé *que, si du centre l'on abaisse des perpendiculaires sur les plans tangents du premier ellipsoïde, le lieu géométrique des pieds de ces perpendiculaires est la surface d'élasticité.*

L'on a ce second théorème. ***Les longueurs de deux rayons vecteurs de la surface d'élasticité et du second ellipsoïde, dont la direction coïn-***

*) Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, von *L. J. Magnus.* Erste Abtheilung. 1837. p. 402.

cide dans une même ligne droite quelconque, sont l'inverse l'une de l'autre, de sorte que leur produit est égal à l'unité.

Pour le prouver, désignons les deux rayons vecteurs par r et r' et écrivons les équations de la surface d'élasticité et du second éllipsoïde sous les formes suivantes:

$$\frac{a^2x^2}{r^2}+\frac{b^2y^2}{r^2}+\frac{c^2z^2}{r^2}=r^2,$$

$$\frac{a^2x^2}{r_1^2}+\frac{b^2y^2}{r_1^2}+\frac{c^2z^2}{r_1^2}=\frac{1}{r_1^2}.$$

Comme les deux rayons coïncident dans une même ligne droite, les trois membres de la première partie de la première équation sont égaux aux trois membres correspondants de la seconde, et en égalant les seconds membres on obtient:

$$r^2r_1^2=1,$$

ce qu'il falloit démontrer. Nous pourrons énoncer ce même théorème de la manière suivante.

Les points de la surface d'élasticité sont les pôles conjugués des points du second ellipsoïde et réciproquement, par rapport à une sphère, dont le rayon est égal à l'unité. [13.]

Il suit de ce théorème, que dans les deux courbes d'intersection de la surface d'élasticité et du second ellipsoïde la direction des axes se confond, mais de sorte que le plus grand de l'une correspond au plus petit de l'autre. Si une des deux courbes est un cercle, l'autre le sera également.

D'après le numéro 10. les deux ellipsoïdes (2.) et (3.) sont polaires réciproques par rapport à la même sphère. Ce théorème lie entre eux, les deux théorèmes du présent numéro. Car, en prennant à volonté un point quelconque sur la surface du second ellipsoïde, le plan polaire de ce point touchera le premier ellipsoïde, et pour obtenir du même point le pôle conjugué, qui appartient a la surface d'élasticité, l'on n'a qu'à abaisser du centre une perpendiculaire sur le plan polaire. Ainsi s'est présentée à nous une démonstration nouvelle du premier théorème de ce numéro.

17. *Détermination de l'onde lumineuse par Fresnel.* — En conduisant un plan quelconque par le centre de la surface d'élasticité, tout mouvement vibratoire dans ce plan peut se décomposer en deux vibra-

tions rectilignes, ayant lieu suivant les deux axes de la courbe d'intersection, qui en général est un oval du quatrième ordre. Le mouvement de propagation a lieu perpendiculairement au sens des vibrations, avec une vitesse proportionelle au deux demi-axes, ces axes eux mêmes étant proportionels aux carrés des élasticités. [15.] *Fresnel* conclût de là, *que les plans parallèles au plan coupant et à une distance de lui égale aux axes de la courbe d'intersection, sont tangents à l'onde lumineuse.*

A deux plans tangents parallèles et situés du même côté du centre, repondent des vibrations dans des plans qui sont perpendiculaires à ces plans tangents et en même temps perpendiculaires entre eux. Les plans de vibrations sont perpendiculaires aux plans de *polarisation.*

18. *Détermination analytique de l'onde lumineuse par des plans tangents.* — D'après le numéro 16., la construction de *Fresnel* peut se traduire ainsi:

Qu'on fasse passer un plan quelconque par le centre du *second ellipsoïde*

$$3. \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$$

et qu'on éléve à ce plan des perpendiculaires égales aux valeurs inverses des deux demi-axes de l'ellipse d'intersection, les plans parallèles au plan coupant et passant par les extrémités de ces perpendiculaires, sont tangents à l'onde lumineuse.

Déterminons d'abord l'ellipse d'intersection. En fixant, comme nous l'avons fait dans le premier numéro, la position du plan coupant par les deux angles α et Φ, nous obtenons, en posant dans l'équation (3.)
$x = v\cos\alpha - w\sin\alpha\cos\Phi, \quad y = v\sin\alpha + w\cos\alpha\cos\Phi, \quad z = w\sin\psi,$
pour l'équation de l'ellipse dans son plan:

$$4. \quad [a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha]v^2 + 2(b^2 - a^2)\sin\alpha\cos\alpha\cos\Phi.vw + [a^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi + b^2\cos^2\alpha\cos^2\Phi + c^2\sin^2\Phi]w^2 = 1.$$

En posant ensuite

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = \mu, \qquad (b^2 - a^2)\sin\alpha\cos\alpha\cos\Phi = \nu,$$
$$a^2\sin^2\alpha\cos^2\Phi + b_2\cos^2\alpha\cos^2\Phi + c^2\sin^2\Phi = \varrho,$$

nous aurons après des simples reductions trigonométriques:

$$5. \quad \begin{cases} (\mu + \varrho) = (a^2 + b^2)\cos^2\Phi + (a^2 + c^2)\cos^2\alpha\sin^2\Phi + (b^2 + c^2)\sin^2\alpha\sin^2\Phi, \\ (\mu\varrho - \nu^2) = a^2b^2\cos^2\Phi + a^2c^2\cos^2\alpha\sin^2\Phi + b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\Phi, \end{cases}$$

et d'après le numéro 7. pour déterminer les valeurs inverses des deux

demi-axes de l'ellipse d'intersection (4.) l'équation suivante:

$$6. \quad \begin{cases} V^4 - [(a^2+b^2)\cos^2\varphi + (a^2+c^2)\cos^2\alpha\sin^2\varphi + (b^2+c^2)\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\,V^2 \\ + \; a^2 b^2\cos^2\varphi \; + \; a^2 c^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi \; + \; b^2 c^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi = 0. \end{cases}$$

En faisant attention que

$$\cos^2\varphi + \cos^2\alpha\sin^2\varphi + \sin^2\alpha\sin^2\varphi = 1,$$

on peut écrire la même équation de la manière suivante:

$$7. \quad (V^2-b^2)(V^2-c^2)\sin^2\alpha\sin^2\varphi + (V^2-c^2)(V^2-a^2)\cos^2\alpha\sin^2\varphi + (V^2-a^2)(V^2-b^2)\cos^2\varphi = 0,$$

ou bien encore, sous la forme

$$8. \quad \frac{\sin^2\alpha\,\sin^2\varphi}{V^2-a^2} + \frac{\cos^2\alpha\,\sin^2\varphi}{V^2-b^2} + \frac{\cos^2\varphi}{V^2-c^2} = 0.$$

Lorsque le plan coupant est donné par son équation:

$$Ax + By + Cz = 0,$$

les équations (6.) et (7.) se transforment sur le champ dans les suivantes (num. 1.):

$$9. \quad (V^2-b^2)(V^2-c^2)A^2 + (V^2-c^2)(V^2-a^2)B^2 + (V^2-a^2)(V^2-b^2)C^2 = 0,$$

$$10. \quad \frac{A^2}{V^2-a^2} + \frac{B^2}{V^2-b^2} + \frac{C^2}{V^2-c^2} = 0.$$

19. Dans ces équations V signifie la vitesse de l'onde lumineuse, c'est-à-dire celle de ses plans tangents. Il est égal à la perpendiculaire abaissée du centre de l'onde sur ses plans tangents, dont la direction est donnée par les valeurs de A, B et C. Veut-on que, conformément au numéro 4.,

$$Ax + By + Cz + 1 = 0,$$

soit l'équation de ces plans tangents, l'on a d'après les formules connues:

$$V^2 = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

L'équation (6.) se change d'abord, en y introduisant A, B et C, dans la suivante:

$$(A^2+B^2+C^2)\,V^4 - [(b^2+c^2)A^2 + (c^2+a^2)\,B^2 + (a^2+b^2)C^2]\,V^2 + [b^2c^2A^2 + c^2a^2B^2 + a^2b^2C^2] = 0,$$

et puis en chassant V^2 l'on obtient:

$$11. \quad [b^2c^2A^2 + c^2a^2B^2 + a^2b^2C^2][A^2+B^2+C^2] - [(b^2+c^2)A^2 + (c^2+a^2)B^2 + (a^2+b^2)C^2] + 1 = 0.$$

20. *Par un rayon vecteur quelconque d'un ellipsoïde donné, l'on ne peut faire passer, en général, qu'un seul plan, de sorte, que ce rayon vecteur coïncide avec l'un des deux demi-axes de l'ellipse d'intersection.*

Pour le démontrer, faisons coïncider l'axe des x avec le rayon vecteur donné et prennons les axes des y et des z à volonté, mais perpendiculaires entre eux et à l'axe des x. L'ellipsoïde donné est représenté alors par une équation de la forme:

$$Mx^2+Ny^2+Oz^2+2Pzy+2Qzx+2Rxy=1.$$

Faisons passer par l'axe des x un plan coupant, qui fait avec le plan des xy un angle quelconque Φ. Nous obtenons alors pour déterminer la courbe d'intersection dans son propre plan, en posant dans les formules (1.) du premier numéro

$$a=0, \qquad x=v, \qquad y=w\cot\Phi, \qquad z=w\sin\Phi,$$

l'équation suivante:

$$Mv^2+2(Q\sin\Phi+R\cos\Phi)vw+(N\cos^2\Phi+O\sin^2\Phi+2P\sin\Phi\cos\Phi)w^2=1.$$

Cette équation étant rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, si l'on veut que l'axe des v, qui coïncide avec l'axe des x ou le rayon vecteur donné, contienne l'un des deux axes de l'ellipse d'intersection, il faut que le second membre de l'équation précédente s'évanouisse, ce qui donne, pour la détermination de l'angle arbitraire Φ, l'équation suivante:

$$\text{tang}\,\Phi=-\frac{R}{Q}.$$

L'on voit donc qu'il y a toujours un plan, qui satisfait à la condition exigée et qu'il n'y a qu'un plan coupant unique, pourvu que R et Q ne disparaissent en même temps de l'équation de l'ellipsïode. Dans ce cas particulier le rayon donné coïncide avec l'un des trois axes de l'ellipsoïde et l'on voit de suite, qu'alors tout plan passant par ce rayon a la propriété exigée.

21. *Construction du plan en question.* — Nous observons d'abord qu'il suffit de choisir les axes des coordonnées de manière que R disparaisse de l'équation de la surface, pour que le plan des xy soit le plan cherché. Construisons ensuite le plan tangent a l'extremité du rayon vecteur donné, dont nous désignerons la longueur par x', son équation sera

$$M(x-x')+Oz+Ry=0.$$

Veut-on que R disparaisse, il faut prendre le plan de xz perpendiculaire à ce plan tangent, d'ou l'on obtient, en faisant attention que le plan des xy est perpendiculaire a celui des xz, et qu'il passe, ainsi que lui, par le rayon vecteur, la construction suivante:

Construisez le plan tangent à l'extrémité du rayon vecteur donné et abaissez du centre de l'ellipsoïde une perpendiculaire sur ce plan. Le plan à construire sera celui qui, passant par le rayon vecteur, est perpendiculaire au plan, qui contient à la fois ce rayon et la perpendiculaire.

22. *L'onde lumineuse* (Fig. 4.) *est la surface polaire réciproque de celle qu'on obtient, en mettant, dans sa construction, le premier ellipoïde à la place du second: par rapport à une sphère dont le rayon est égal à l'unité.*

Soit M un point quelconque du second ellipsoïde, et P le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en ce point. Le plan polaire de M, également perpendiculaire au plan de la figure, touchera le premier ellipsoïde en un point m, qui, étant le pole du plan tangent en M, se trouvera sur le prolongement de OP, de même que le prolongement de OM sera perpendiculaire au plan tangent en m. Enfin $Op = \frac{1}{OM}$ et $OP = \frac{1}{Om}$. D'après le numéro précédent, le plan passant par le rayon vecteur OM et perpendiculaire au plan de la figure, coupera le second ellipsoïde de manière que, dans l'ellipse d'intersection, l'un des demi-axes se confond avec le rayon vecteur OM. Egalement, le plan passant par le rayon vecteur Om et perpendiculaire au plan de la figure, coupera le premier ellipsoïde de manière que, dans l'ellipse d'intersection, l'un des demi-axes se confond avec le rayon vecteur Om.

Si l'on fait tourner les deux plans tangents et les deux perpendiculaires abaissées sur eux du centre, autour de ce point d'une manière quelconque, rien ne se changera dans leurs relations réciproques par rapport à la sphère directrice; M sera toujours le pole du plan mp, ainsi que m continuera d'être celui du plan MP. Tel sera donc aussi le cas, si, en particulier, on fait faire au système des deux plans le quart d'une révolution autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, de manière que les points m, p, M et P passent respectivement aux positions R, V, r et v. Dans la position nouvelle le plan RV sera tangent à la surface de l'onde lumineuse; quant au plan rv, il touchera une deuxième onde lumineuse, qu'on obtient en remplaçant les deux ellipsoïdes, l'un par l'autre, ou ce qui revient au même, en prennant au lieu des trois élasticités principales a^2, b^2, c^2 leurs valeurs inverses $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. Si l'on donne au

point M toutes les positions possibles sur le second ellipsoïde on obtient tous les plans tangents a la surface de la première onde. Ces plans sont liés aux plans tangents à la surface de la deuxième onde, de manière que les uns contiennent les pôles des autres et réciproquement. D'où l'on voit que les deux ondes sont deux surfaces polaires réciproques, par rapport a la sphère concentrique dont le rayon est égal à l'unité. C'est ce que nous nous sommes proposés à démontrer.

23. *Equation de la surface de l'onde en coordonnées rectangulaires.* — Réprennons l'équation finale du numéro 19., qui donne la détermination de l'onde au moyen de ses plans tangents:

$$11. \quad [b^2c^2A^2+c^2a^2B^2+a^2b^2C^2][A^2+B^2+C^2] - [(b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2)C^2]+1=0.$$

Les quantités A, B, C ayant la signification du numéro (4.), nous n'avons qu'à mettre à leur place x, y, z, pour obtenir l'équation de la surface polaire réciproque; ainsi il vient:

$$12. \quad (b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2)(x^2+y^2+z^2) - [(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2]+1=0,$$

C'est donc l'équation de la deuxième onde, consignée dans le numéro précedent, et pour obtenir celle de la première, à laquelle se rapporte également l'équation (11.), il suffira d'écrire $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ à la place de a^2, b^2, c^2, ce qui donne:

$$13. \quad (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2) - (a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(c^2+a^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2)+a^2b^2c^2=0.$$

24. D'après le théorème du numéro 22., on obtient les points de l'un des deux ondes, en cherchant les pôles des plans tangents à l'autre. Ainsi par exemple, le point R, pôle du plan tangent vr à la deuxième onde, est celui où la première est touchée par le plan RV. Il suit de cela sur le champ la construction due à *Fresnel* pour trouver directement les points de la surface de l'onde lumineuse:

Après avoir coupé le premier ellipsoïde par un plan diamétral, menons, à partir du centre, deux droites perpendiculaires à ce plan et respectivement égales au plus grand et au plus petit demi-diamètre de l'ellipse d'intersection: le lieu des extrémités de ces perpendiculaires sera la surface de l'onde lumineuse.

Le calcul nécessaire pour tirer de ce théorème l'équation de l'onde est déjà presque entièrement fait dans le numéro 18. En désignant la longueur des perpendiculaires élévées au centre de la section par r, nous n'avons qu'à substituer dans les équations de ce numéro r au lieu de $\frac{1}{V}$ et en même temps a^2, b^2, c^2 au lieu de $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. Faisant cette substitution dans l'équation (10.)

$$\frac{A^2}{V^2-a^2}+\frac{B^2}{V^2-B^2}+\frac{C^2}{V^2-C^2}=0,$$

nous trouvons:

$$\frac{a^2A^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2B^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2C^2}{c^2-r^2}=0.$$

Puis, en nommant x, y et z les coordonnées des extrémités de la perpendiculaire r, il vient

$$\frac{A^2r^2}{A^2+B^2+C^2}=x^2,\quad \frac{B^2r^2}{A^2+B^2+C^2}=y^2,\quad \frac{C^2r^2}{A^2+B^2+C^2}=z^2:$$

équations, au moyen desquelles la dernière équation se transforme dans la suivante:

$$14.\quad \frac{a^2x^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2y^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2z^2}{c^2-z^2}=0.$$

Voilà l'équation cherchée de l'onde lumineuse. En chassant les dénominateurs et divisant par r^2 ou $(x^2+y^2+z^2)$, nous rétombons dans l'équation (13.) du numéro précédent.

25. *Construction du plan de vibration.* — Réprenons un moment la figure 4. Les vibrations qui ont lieu suivant OM, produisent une onde plane (enveloppe de la surface de l'onde lumineuse en question) perpendiculaire au plan du papier et se propageant suivant OV. Le point R, où elle touche cette surface donne le rayon lumineux correspondant. De là résulte le théorème suivant:

Le plan de vibration pour un rayon lumineux quelconque est celui, qui, passant par ce rayon, est perpendiculaire au plan qui touche la surface dans le point ou elle est rencontrée par le rayon lumineux.

En nous rapportant à la figure, l'autre rayon, correspondant à des vibrations suivant l'axe perpendiculaire à OM, qui produisent une onde plane parallèle à celle que nous venons de considérer, se trouvera dans un plan perpendiculaire au plan de la figure et le coupant suivant OV. Ce même plan contiendra le point de contact.

26. *Equation du plan des vibrations.* — Si nous différentions l'équation de l'onde

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)-(a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(a^2+c^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2)a^2b^2c^2 = V = 0,$$

nous aurons, en posant pour abréger

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2 = E, \quad x^2+y^2+z^2 = r^2,$$

les équations suivantes:

$$\frac{dV}{dx} = 2[E+a^2(r^2-b^2-c^2)]x,$$

$$\frac{dV}{dy} = 2[E+b^2(r^2-a^2-c^2)]y,$$

$$\frac{dV}{dz} = 2[E+c^2(r^2-a^2-b^2)]z,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dV}{dx}.x+\frac{dV}{dy}.y+\frac{dV}{dz}.z$$
$$= 4Er^2-2[a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(a^2+c^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2].$$
$$= 2[Er^2-a^2b^2c^2]$$
$$= 2[a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(a^2+c^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2-2a^2b^2c^2].$$

Soient maintenant x', y' et z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface de l'onde lumineuse, et E' et r' les valeurs correspondantes de E et r; l'équation du plan tangent à ce point sera

$$[E'+a^2(r'^2-b^2-c^2)]x'x+[E'+b^2(r'^2-a^2-c^2)]y'y+[E'+c^2(r'^2-a^2-b^2)]z'z$$
$$= a^2(b^2+c^2)x'^2+b^2(a^2+c^2)y'^2+c^2(a^2+b^2)z'^2-2a^2b^2c^2:$$

équation que, pour abréger, nous écrirons comme suit:

$$Ax'x+By'y+Cz'z = D.$$

L'équation du plan de vibration passant par l'origine, sera de la forme:

$$A'x+B'y+C'z = 0.$$

Pour la déterminer complétement, on a les deux équations de condition:

$$A'x'+B'y'+C'z' = 0, \quad A'Ax'+B'By'+C'Cz' = 0,$$

dont l'une exprime que le plan en question passe par le point (x', y', z') et l'autre, qu'il est perpendiculaire au plan tangent. Si l'on rétranche la dernière équation de la première, après avoir préablement multiplié celle-ci par A, il vient

$$(A-B)B'y'+(A-C)C'z' = 0;$$

donc

$$\frac{A'}{C'} = -\frac{(A-C)z'}{(A-B)y'} = \frac{A-C}{y'} : \frac{B-A}{y'},$$

et en substituant A', A et x' à la place de B', B et y':

$$\frac{A'}{C'} = \frac{(B-C)}{x'} : -\frac{B-A}{z'}.$$

L'équation du plan de vibration devient donc la suivante:

$$\frac{B-C}{x'}.x + \frac{C-A}{y'}.y + \frac{A-B}{z'}.z = 0,$$

c'est-à-dire en introduisant pour A, B, C leurs valeurs:

15. $$\frac{(b^2-c^2)(r'^2-a^2)}{x'}.x + \frac{(c^2-a^2)(r'^2-b^2)}{y'}.y + \frac{(a^2-b^2)(r'^2-c^2)}{z'}.z = 0.$$

27. Des considérations du numéro 20., on conclut, qu'à une direction donnée des vibrations il ne repondra, en général, qu'un rayon lumineux unique: qu'il y aura exception cependant lorsque les vibrations se font parallélement à l'un des axes des coordonnées. Il est évident d'après le numéro cité, que les points correspondants de la surface de l'onde constituent trois cercles décrits dans les trois plans des coordonnées par des rayons respectivement égaux aux trois demi-axes du premier ellipsoïde, perpendiculaires à ces plans.

En posant successivement y, x et z égal à zéro dans l'équation de la surface de l'onde, on trouvera les trois équations suivantes:

$$(a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2)(x^2 + y^2 - b^2) = 0,$$
$$(b^2y^2 + c^2z^2 - b^2c^2)(x^2 + y^2 - a^2) = 0,$$
$$(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2)(x^2 + y^2 - c^2) = 0,$$

dont chacune réprésente le système d'un cercle et d'une ellipse. Aux rayons lumineux aboutissant aux points de chacun des trois cercles repondent des vibrations parallèles entre elles et perpendiculaires au plan de la figure. On obtient les trois ellipses, situées dans ces mêmes plans, si l'on fait faire à chacune des ellipses d'intersection du premier ellipsoïde (plus faiblement tracées dans les figures) un quart de révolution dans son plan autour du centre. Pour tous les rayons lumineux qui aboutissent aux points de chacune de ces trois ellipses, le plan de vibrations est le plan de la courbe, de manière que toutes les vibrations ont lieu dans ce même plan, perpendiculairement aux différents rayon.

28. *Points singuliers de l'onde.* — Il suffit d'observer que l'équation de l'onde lumineuse (13.) et l'équation (11.) qui sert à la déterminer par ses plans tangents, sont d'un même dégré, supérieur au second, pour être assuré, que la surface ait un plus grand nombre de *points singuliers* et en même temps de *plans singuliers;* avec la restriction cependant que ces points

et ces plans singuliers peuvent être imaginaires ou situés dans l'infini. Occupons nous d'abord des points singuliers.

S'il existe un point singulier, ses coordonnées doivent satisfaire en même temps à l'équation de la surface et aux trois équations qui s'en déduisent, en différentiant successivement par rapport aux trois variables. Cela donne les quatre équations suivantes:

$$V = Er^2 - (a^2(b^2+c^2)x^2 + b^2(a^2+c^2)y^2 + c^2(a^2+b^2)z^2) + a^2b^2c^2 = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dV}{dx} = (E + a^2(r^2 - b^2 - c^2))x = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dV}{dy} = (E + b^2(r^2 - a^2 - c^2))y = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dV}{dz} = (E + c^2(r^2 - a^2 - b^2))z = 0.$$

Pour satisfaire à ces équations il suffit de poser

16. $$y = 0, \quad E - a^2(r^2 - b^2 - c^2) = 0, \quad E - c^2(r^2 - a^2 - b^2) = 0;$$

car en rétranchant les deux dernières des trois équations l'une de l'autre, il vient:

$$r^2 = b^2,$$

et en les rétranchant, après les avoir multipliées respectivement par c^2 et a^2, on obtient

$$E = a^2c^2.$$

Ces deux équations nouvelles sont celles du cercle et de l'ellipse suivant lesquelles la surface est coupée par le plan des xz. Donc quatre points d'intersection de ces deux courbes détermineront quatre points singuliers, qui, dans notre supposition, que la valeur de b^2 soit intermédiaire entre a^2 et c^2, seront tous réels.

Nous obtenons de cette manière, dans chacun des trois plans des coordonnées, quatre points singuliers de la surface, mais parmi ces 12 points singuliers il y en a huit d'imaginaires.

Pour discuter la nature des quatre points singuliers réels M', $M_{,}$, M'' et $M_{,,}$ dont les coordonnées sont

$$x = \pm c\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\right)}, \quad z = \pm a\sqrt{\left(\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\right)}, \quad y = 0,$$

nous allons différentier de nouveau, en faisant en même temps attention aux trois équations (16.). Il viendra

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = 4a^2x^2 = \frac{4a^2c^2(b^2-a^2)}{c^2-a^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2V}{dy^2} = E + b^2(r^2 - a^2 - c^2) = -(b^2 - a^2)(c^2 - b^2),$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2V}{dz^2} = 4c^2z^2 = \frac{4a^2c^2(c^2 - b^2)}{c^2 - a^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2V}{dx\,dy} = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2V}{dx\,dz} = 2(a^2 + c^2)xz = 2ac(a^2 + c^2).\frac{\sqrt{[(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)]}}{c^2 - a^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2V}{dy\,dz} = 0,$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (5.) du numéro 4., et après avoir divisé tous les membres par

$$\frac{4a^2c^2(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{c^2 - a^2},$$

on trouvera l'équation suivante:

17. $$(b^2 - a^2)C^2 + (c^2 - a^2)B^2 + (c^2 - b^2)A^2 \mp \frac{a^2 + c^2}{ac}\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.AC = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi:

18. $$a^2x''^2C^2 + a^2c^2B^2 + c^2z''^2A^2 - (a^2 + c^2)x''z''AC = 0,$$

en distinguant par des accents les coordonnées du point singulier.

Il suit de là que si l'on fait passer un plan quelconque par ce point, ce plan touchera la surface de l'onde dans le même point, aussitôt que les trois constantes de son équation

$$A(x - x'') + By + C(z - z'') = 0$$

satisfont a l'équation précédente. Tous ces plans enveloppent une surface conique du deuxième dégré, qui dans le point singulier est tangente à la surface de l'onde. On trouvera sans peine son équation en coordonnées rectangulaires.

29. *Cône lumineux sortant.* — Si l'on éléve des perpendiculaires aux plans qui touchent le cône du numéro précédent dans le point singulier, ces perpendiculaires constitueront un cône nouveau de même ordre. Il sera celui, que forment les rayons lumineux, qui, en sortant sous une incidence perpendiculaire, repondent tous à un seul rayon, et traversent l'intérieur du crystal suivant l'une des deux lignes droites $M'M_{,}$ et $M''M_{,,}$, qui d'après le numéro 14., sont perpendiculaires aux deux sections circulaires du premier ellipsoïde.

En désignant par x, y, et z les coordonnées d'un point quelconque d'une telle perpendiculaire, on aura:

$$(x - x'') : y : (z - z'') = A : B : C,$$

d'où, l'équation (18.) étant homogène par rapport à A, B, et C, nous obténons immédiatement, en remplaçant ces quantités respectivement par $(x-x'')$, y et $(z-z'')$:

19. $$a^2x''^2(z-z'')^2+a^2c^2y^2+c^2z''^2(x-x'')^2-(a^2+c^2)x''z''(x-x'')(z-z'') = 0.$$

Voilà l'équation du cône lumineux en question; elle se simplifiera comme suit:

20. $$a^2x''^2z^2+a^2c^3y^2+c^2z''^2x^2-(a^2+c^2)x''z''xy+(c^2-a^2)x''z''(x''z-z''x) = 0.$$

30. *Plans des vibrations pour les rayons sortants.* — Pour déterminer la direction des vibrations, qui répond aux différents rayons du cône lumineux sortant, nous n'avons, d'après le numéro 21., qu'à abaisser du centre des perpendiculaires sur les plans qui touchent la surface dans le point singulier. Les lignes droites qui, dans ces plans tangents, joignent les pieds des perpendiculaires au point singulier, indiqueront la direction des vibrations correspondantes. Le plan de vibration contient en même temps cette ligne droite, le rayon singulier (celui qui aboutit au point singulier) et le rayon sortant.

Cherchons donc la courbe qui est le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires en question, dont nous désignerons les coordonnées par x, y et z. Nous obtenons de suite deux surfaces qui contiennent cette courbe. C'est d'abord le cône, qui est formé par ces mêmes perpendiculaires, et qui n'est autre que le cône lumineux transporté parallélement à lui même, de manière que son centre coïncide avec celui de l'onde. Son équation est par conséquent celle qu'on trouve, si l'on met en (19.) x, y, z à la place de $(x-x'')$, y, $(z-z'')$. Donc on obtient immédiatement l'équation suivante:

$$a^2x''^2z^2+a^2c^2y^2+c^2z''^2x^2-(a^2+c^2)x''z''xz = 0,$$

qui peut aussi s'écrire comme suit:

21. $$a^2c^2(x^2+y^2+z^2)-(x''x+z''z)(a^2x''x+c^2z''z) = 0.$$

En second lieu la même courbe doit appartenir à une sphère dont l'un des diamètres est le rayon vecteur aboutissant au point singulier. Son équation sera donc

$$\left(x-\frac{x''}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{z''}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

ou, en réduisant:

22. $$x^2+y^2+z^2 = x''x+z''z.$$

Des équations (21.) et (22.) on tire

$$(x''x + z''z)(a^2x''x + c^2z''z - a^2c^2) = 0.$$

En négligeant le facteur $(x''x + z''z)$, étranger à la question, l'équation

$$a^2x''x + c^2z''z = a^2c^2$$

est celle du plan tangent, qui est perpendiculaire à celui des xz et coupe ce plan suivant la tangente dans le point singulier de l'ellipse d'intersection avec la surface de l'onde dont l'équation est:

$$a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2.$$

Le lieu cherché est donc le cercle suivant lequel la sphère est coupée par ce plan. Pour l'obtenir on n'a qu'à abaisser du centre O une perpendiculaire OP sur la tangente à l'ellipse dans le point singulier M' (Fig. 1., 5.) et à construire ensuite un cercle perpendiculaire au plan de l'ellipse, ayant $M'P$ pour diamètre.

Remarquons encore que le facteur négligé indique que, pour avoir l'autre direction, dans laquelle le cône (21.), ainsi que le cône (20.), est coupé suivant un cercle, il faut prendre les plans coupants perpendiculaires au rayon singulier OM'; ce qui d'ailleurs se voit immédiatement, $M'P$ étant perpendiculaire à OQ.

Considérons maintenant un rayon quelconque du cône lumineux rencontrant les deux sections circulaires, qui sont respectivement perpendiculaires à $M'Q'$ et $M'T$, en N et N': le plan de vibration correspondant passera par ce rayon et par le rayon singulier $OM'T$. Son inclinaison au plan de la figure aura pour mésure la moitié de l'arc $Q'N'$ de la seconde section circulaire. Elle est zéro pour le rayon $M'Q'$ et égal à 90^0 pour le rayon $M'T$, qui est le prolongement du rayon singulier OM'.

Si l'on reçoit l'image sur un écran EE perpendiculaire au rayon singulier, on obtiendra un cercle lumineux $Q'N''N'T$, passant par ce rayon. Il suit de ce qui précède que le plan de vibration décrit autour du rayon singulier OM' un arc de cercle, moitié de celui, que d'écrit le rayon lumineux dans le cercle lumineux, ou, pour me servir des expressions de Physique: lorsqu'on regarde le cercle lumineux à travers une plaque de tourmaline, coupée parallélement à l'axe, il ne disparait qu'un seul rayon; tandis qu'en tournant la plaque d'un angle quelconque dans son plan, le rayon qui disparait décrira l'angle double autour du centre

du cercle lumineux, de manière qu'il parcourrera toute la periphérie si la tourmaline tourne de 180° dégrés seulement. *)

31. *Détermination analytique des plans singuliers.* — Cherchons ces plans parmi ceux qui sont perpendiculaires aux plans des coordonnées. L'on a pour déterminer les points de la surface de l'onde, dans lesquels elle est touchée par des plans perpendiculaires au plan des xz, les deux équations

$$V = 0, \qquad \frac{dV}{dy} = 0,$$

en conservant la notation du numéro 26. La dernière de ces équation se décompose dans les deux suivantes:

$$y = 0,$$

$$23. \quad (a^2+b^2)x^2+2b^2y^2+(c^2+b^2)z^2-(a^2+c^2)b^2 = 0,$$

dont la première exprime, ce qui d'ailleurs est évident, que dans les points de la surface de l'onde, qui sont situés dans le plan des xz, les plans tangents sont perpendiculaires à ce plan. L'autre réprésente un ellipsoïde; d'où il suit, qu'en combinant convenablement l'équation de la surface de l'onde

$$24. \quad V = (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-(a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(a^2+c^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2)+a^2b^2c^2 = 0,$$

et l'équation suivante:

$$((a^0+b^2)x^2+2b^2y^2+(c^2+b^2)z^2-(a^2+c^2)b^2)^2 = 0,$$

on doit obtenir celle d'un cylindre perpendiculaire au plan des xz et enveloppé par les plans tangents à la surface de l'onde dans les points, où il est coupé (de même que l'onde) par l'ellipsoïde en question. L'équation de ce cylindre ne devant point contenir y, l'on atteindra ce but, en rétranchant la dernière équation de l'équation de l'onde, après avoir préalablement multiplié celle-ci par $4b^2$. A l'équation résultante nous pouvons donner la forme suivante:

$$((b^2-a^2)x^2+(c^2-b^2)z^2-(c^2-a^2)b^2)^2-4(b^2-a^2)(c^2-b^2)x^2z^2 = 0,$$

---

*) Mr. *Cloyd* est parvenu le premier à ce résultat par expérience. Il s'exprime ainsi: . . . I discovered the remarkable law, „that the angle between the planes of polarization of any two rays of the cone is half the angle between the planes containing the rays themselves on the axis." (On conical refraction, p. 7.)
Les plans de polarisation sont perpendiculaires à ceux de vibration (17.) et l'axe dont il s'agit est l'axe optique, qui est perpendiculaire à l'une des tangentes communes au cercle et à l'ellipse d'intersection dans le plan des xz. L'on voit que ce théorème n'est vrai qu'approximativement; il est prouvé comme tel par l'analyse dans le cas de l'Arragonite, ou l'on a à peu près, $b^2 = ac$: condition nécessaire à remplir.

et la décomposer alors dans les deux équations

$$(b^2-a^2)\,x^2+(c^2-b^2)\,z^2-(c^2-a^2)\,b^2\pm 2\sqrt{((b^2-a^2)\,(c^2-b^2))}xz=0.$$

Après avoir écrit ces équations ainsi:

$$[\sqrt{(b^2-a^2)}\,x\pm\sqrt{(c^2-b^2)}\,z]^2-(c^2-a^2)\,b^2=0,$$

on les décomposera de nouveau et on obtiendra les quatre équations suivantes:

$$\sqrt{(b^2-a^2)}\,x\pm\sqrt{(c^2-b^2)}\,z\pm\sqrt{(c^2-a^2)}\,b=0.$$

Le cylindre en question dégénère donc en un système de quatre plans perpendiculaires au plan des xz; chaque point de la courbe d'intersection de l'un quelconque de ces plans avec l'ellipsoïde (23.) étant un point où la surface de l'onde est touchée par ce même plan, les quatre plans seront des plans singuliers de l'onde. Il suit des dévéloppements du numéro (14.) que ces plans singuliers coupent le plan des xz suivant les quatre tangentes communes au cercle et à l'ellipse, courbes d'intersection de l'onde dans le même plan. D'après le même numéro les quatre plans singuliers sont parallèles au sections circulaires du *second* ellipsoïde

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1.$$

La direction de celles-ci dépendant uniquement de la différence des trois coëfficients de x^2, y^2 et z^2, pris deux à deux, et ne changeant nullement si le membre constant change, il est évident qu'elle est la même que celle des sections circulaires de l'ellipsoide (23.). Donc les courbes de contact dans les quatre plans singuliers sont des *cercles*. Pour les trouver l'on n'a qu'à construire les tangentes communes au cercle et à l'ellipse d'intersection, et à décrire ensuite, pour chacune d'elles, un cercle *FGH* (Fig. 1. et 6.) perpendiculaire au plan de la figure et ayant pour diamètre le segment de cette tangente compris entre les deux points de contact (*H* et *I*). Le carré de ce diamètre se trouvera égal à $\left(\frac{-(c^2-b^2)(a^2-b^2)}{b^2}\right)$.

Un rayon quelconque *OG* qui vient de l'intérieur du crystal aboutir à un point quelconque de la courbe de contact dans l'un des plans singuliers en sortira perpendiculairement à ce plan suivant *GG'*. Tous les rayons sortants ainsi constituent un cylindre lumineux circulaire et perpendiculaire au plan singulier ou, ce qui est la même chose, un cylindre dont l'axe est parallèle à l'un des deux axes optiques du crystal. D'un autre coté, un rayon lumineux extérieur, tombant sous l'incidence perpendiculaire sur le crystal, constituera dans l'intérieur un cône lumineux.

Pour un rayon lumineux quelconque *OGG'*, le plan de vibration est celui, qui contient en même temps ce rayon et l'axe optique *OHH'*, cet axe étant perpendiculaire au plan singulier (26.). L'angle que fait ce plan avec celui des xz a pour mesure la moitié de l'angle *IG*, de manière que cet angle s'evanouit pour le rayon (refracté extraordinairement dans le plan des xz) *OII'*, et qu'il devient égal à 90 dégrés pour le rayon (ordinaire) *OHII'*. Il est donc prouvé *que l'angle formé par les plans de vibration pour deux rayons quelconques est moitié de celui formé par les deux plans, contenant les deux rayons et en même temps l'axe du cylindre.*

Les résultats de ce numéro ont été prédits théoriquement par M. *Hamilton*, et vérifiés ensuite expérimentalement par M. *Lloyd.*

Je n'ai pas besoin d'ajouter que les quatre plans singuliers et perpendiculaires à chacun des plans des xy et zy deviennent imaginaires.

32. *Deuxième manière de déterminer les plans singuliers.* Nous avons pris beaucoup trop l'habitude de ne régarder comme équation d'une courbe ou d'une surface, que celle qui exprime une relation entre les coordonnées de leurs points. Je ne trouve nulle part, qu'on ait régardé l'équation

$$10. \quad \frac{A^2}{V^2-a^2}+\frac{B^2}{V^2-b^2}+\frac{C^2}{V^2-c^2}=0$$

comme réprésentant la surface de l'onde lumineuse. Néamoins on peut déduire de cette équation toutes les propriétes de la surface d'une manière aussi complète et facile que de l'équation suivante entre x, y et z:

$$13. \quad (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-(a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(a^2+c^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2)+a^2b^2c^2=0.$$

On doit s'en étonner d'autant plus, que l'illustre *Fresnel* n'ait pas réussi à transformer l'une de ces équations dans l'autre et que M. *Ampère* y soit parvenu le premier en 1828 par un énorme calcul d'élimination. Les considérations théoriques me font réprendre, dans ce qui va suivre, la discussion des singularités de la surface de l'onde.

Partons de l'équation (10.) sous la forme suivante que nous lui avons donnée dans le numéro 19.:

$$11. \quad W=[b^2c^2A^2+c^2a^2B^2+a^2b^2C^2][A^2+B^2+C^2]$$
$$-[(b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2)C^2]+1=0.$$

A, B et *C* ayant la même signification que dans le numéro 5. S'il existe un plan singulier, il faut que les trois constantes *A, B, C* de son équation

$$Ax + By + Cz = 1$$

satisfont, outre à l'équation proposée, aux trois équations suivantes:

$$\tfrac{1}{2}\frac{dW}{dA} = [2b^2c^2A^2 + c^2(a^2+b^2)B^2 + b^2(a^2+c^2)C^2 - (b^2+c^2)]A = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dW}{dB} = [c^2(a^2+b^2)A^2 + 2a^2c^2B^2 + a^2(b^2+c^2)C^2 - (a^2+c^2)]B = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dW}{dC} = [b^2(a^2+c^2)A^2 + a^2(b^2+c^2)B^2 + 2a^2b^2C^2 - (a^2+b^2)]C = 0.$$

En posant $B = 0$, la deuxième de ces trois équations est satisfaite. Pour que la première et la troisième le soient également, il faut qu'on ait:

$$b^2(2c^2A^2 + (a^2+c^2)b^2) - (b^2+c^2) = 0,$$
$$b^2((a^2+c^2)A^2 + 2a^2C^2) - (a^2+b^2) = 0.$$

Si l'on rétranche ces deux équations l'une de l'autre, on obtient en négligeant le facteur commun $(c^2 - a^2)$:

$$25. \quad b^2(A^2 + C^2) = 1,$$

et si l'on les rétranche, après avoir préalablement multipliée la première équation par a^2 et la seconde par c^2, il vient après la division par $b^2(a^2 - c^2)$:

$$26. \quad c^2A^2 + a^2C^2 = 1.$$

Les deux dernières équations sont donc équivalentes à celles dont elles dérivent. Elles donnent pour la détermination des plans singuliers:

$$B = 0, \quad b^2A^2 = \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}, \quad b^2C^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}$$

L'on démontrera aisément que ces mêmes valeurs satisfont à l'équation de la surface. En y posant $B = 0$, on obtiendra pour déterminer le cercle et l'ellipse d'intersection, l'équation suivante:

$$[b^2(A^2 + C^2) - 1][c^2A^2 + a^2C^2 - 1] = 0,$$

qui se décomposera dans les deux équations (25.) et (26.). On en conclût encore que les plans singuliers coupent le plan des xz suivant les tangentes communes au cercle et a l'ellipse d'intersection, qui sont réprésentées par les équations (25.) et (26.).

Pour déterminer la courbe de contact dans les plans singuliers, dont la position vient d'être déterminée, il faut différentier de nouveau. Ainsi on obtient, en rapportant tout au plan singulier:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W}{dA^2} = 4b^2c^2A^2 = 4.\frac{c^2(b^2 - a^2)}{c^2 - a^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W}{dB^2} = c^2a^2 + b^2)A^2 + a^2(b^2 + c^2)C^2 - (a^2 + c^2)$$

$$= b^2(c^2A^2 + a^2C^2) - a^2c^2(A^2 + C^2) - (a^2 + c^2) = -\frac{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{b^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W}{dC^2} = 4a^2b^2C^2 = 4.\frac{a^2(c^2-b^2)}{c^2-a^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W}{dA\,dB} = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W}{dA\,dC} = 2b^2(a^2+c^2)AC = 2(a^2+c^2)\frac{\sqrt{[(c^2-b^2)(b^2-a^2)]}}{c^2-a^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W}{dB\,dC} = 0;$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (5.) du numéro 5., il en résultera après avoir divisé par $\frac{4(b^2-a^2)c^2-b^2)}{b^2(c^2-a^2)}$:

$$27.\quad c^2(b^2-a^2)z^2+b^2(c^2-a^2)y^2+a^2(c^2-b^2)x^2\mp(a^2+c^2)\sqrt{[(c^2-b^2)(b^2-a^2)]}xz = 0.$$

C'est l'équation du cône, ayant son centre à l'origine, qui par son intersection avec le plan singulier, donne dans ce plan la courbe de contact. Le cône en question est le cône lumineux intérieur de la figure 6.

33. On peut, en suivant une marche tout-à-fait analogue, obtenir immediatement l'équation de la courbe de contact, si l'on remplace l'équation (11.) par l'équation suivante:

$$28.\quad W' = (b^2c^2A^2+a^2c^2B^2+a^2b^2)(A^2+B^2+1) - [(b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2)]D^2+D^4 = 0,$$

ce qui revient à déterminer les plans tangents à la surface de l'onde par les trois constantes A, B et D de leurs équations mises sous la forme:

$$z+Ax+By+D = 0.$$

L'on aura alors:

$$\tfrac{1}{2}\frac{dW'}{dA} = [2b^2c^2A^2+c^2(a^2+b^2)B^2-(b^2+c^2)D^2]A = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dW'}{dB} = [c^2(a^2+b^2)A^2+2a^2c^2B^2-(a^2+c^2)D^2]B = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dW'}{dD} = 2D^2-((b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2))]R = 0,$$

ce qui donne pour le plan singulier:

$$B = 0, \quad A^2 = \frac{b^2-a^2}{c^2-b^2}, \quad D^2 = b^2.\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}.$$

Puis, en différentiant de nouveau et en ayant égard à ces valeurs, il vient:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W'}{dA^2} = 4b^2c^2A^2 = 4b^2c^2.\frac{b^2-a^2}{c^2-b^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W'}{dB^2} = [c^2(a^2+b^2)A^2+2a^2c^2B^2-a^2+c^2D^2] = -(b^2-a^2)(c^2-a^2),$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W'}{dD^2} = 4D^2 = 4b^2.\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2W'}{dA\,dB} = 0,$$

$$\frac{d^2W'}{dA\,dD} = -2(b^2+c^2)AD = \mp\frac{2(b^2+c^2)b\sqrt{[(b^2-a^2)(c^2-a^2)]}}{c^2-b^2},$$

$$\frac{d^2W'}{dR^2} = 0.$$

En substituant dans l'équation (6.) du numéro 6. et en divisant par $b^2(c^2-a^2)(b^2-a^2)$, on obtient:

$$\frac{c^2(b^2-a^2)}{c^2-b^2}+y^2+\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}.x^2 \pm \frac{b^2+c^2}{b}.\frac{\sqrt{[(b^2-a^2)(c^2-a^2)]}}{c^2-b^2}x = 0,$$

équation, qu'on peut mettre sous la forme suivante:

$$y^2+\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}\left[x \pm \frac{b^2+c^2}{2b}\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{c^2-b^2}\right)}\right]^2 = \frac{(c^2-b^2)(b^2-a^2)}{4b^2}.$$

C'est l'équation de la projection sur le plan des xy de la courbe de contact. A^2 étant le carré de la tangente de l'angle que fait le plan singulier avec le plan des xy, le carré du cosinus de ce même angle sera $\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}$, d'où l'on voit, que la courbe de contact est un *cercle*, dont le rayon est égal à

$$\frac{\sqrt{[(c^2-b^2)(b^2-a^2)]}}{2b}.$$

34. *Points singuliers.* L'équation

29. $$c^2(a^2+b^2)(A^2+2a^2c^2B^2+a^2(b^2+c^2)C^2-(a^2+c^2) = 0$$

détermine un ellipsoïde par ses plans tangents; il sera facile d'obtenir du même ellipsoïde l'équation en coordinées rectangulaires. Il est évident, que pour les plans tangents parallèles au plan des yz, B et C disparaissent (5.) tandis que $\frac{1}{C}$ devient égal au demi-axe de l'ellipsoïde, coïncidant avec l'axe des x. De la même manière s'obtiennent les deux autres demi-axes. L'équation précédente donnant,

$$B = 0, \quad C = 0, \quad \frac{1}{A^2} = \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+c^2},$$

$$A = 0, \quad C = 0, \quad \frac{1}{B^2} = \frac{2a^2c^2}{a^2+c^2},$$

$$A = 0, \quad B = 0, \quad \frac{1}{C^2} = \frac{a^2(b^2+c^2)}{a^2+c^2},$$

l'équation cherchée sera la suivante:

$$\frac{(a^2+c^2)x^2}{(a^2+b^2)c^2}+\frac{(a^2+c^2)y^2}{2a^2c^2}+\frac{(a^2+c^2)z^2}{(b^2+c^2)a^2}=1.$$

Après cette disgression je reprends mon objet. Si nous combinons algébriquement l'équation

$$13. \quad (b^2c^2A^2+c^2a^2B^2+a^2b^2C^2)(A^2+B^2+C^2)$$
$$-[(b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2)C^2)]+1=0,$$

qui donne l'onde lumineuse par ses plans tangents avec l'équation suivante:

$$[c^2(a^2+b^2)A^2+2a^2c^2B^2+a^2(b^2+c^2)C^2-(a^2+c^2)]^2=0,$$

l'équation résultante déterminera en genéral une surface nouvelle. Cette surface a la propriété de toucher la surface de l'onde suivant une courbe, de manière que les plans tangents communs aux deux surfaces enveloppent l'ellipsoïde (29.). Rétranchons de cette dernière équation l'équation (13.) après l'avoir multipliée par $4a^2c^2$; l'équation résultante peut être mise sous la forme:

$$(c^2(b^2-a^2)A^2+a^2(c^2-b^2)C^2-(c^2-a^2))^2-4a^2c^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)A^2C^2=0,$$

et se décomposera dans les deux suivantes:

$$c^2(b^2-a^2)A^2+a^2(c^2-b^2)C^2-(c^2-a^2)\pm 2ac\sqrt{((b^2-a^2)(c^2-a^2))}AC=0.$$

Ces deux équations peuvent s'écrire ainsi:

$$[c\sqrt{(b^2-a^2)}A\pm a\sqrt{(c^2-b^2)}C]-(c^2-a^2)=0,$$

et se décomposer de nouveaux de la manière suivante:

$$c\sqrt{(b^2-a^2)}A\pm a\sqrt{(c^2-b^2)}C\pm\sqrt{(c^2-a^2)}=0.$$

Tous les plans, dont les constantes A et C satisfont à l'une de ces quatre equations, passent par un des quatre points, dont les coordonnées sont

$$y=0, \quad x=\pm c\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\right)}, \quad z=\pm a\sqrt{\left(\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\right)}.$$

Ces quatre points remplacent donc la surface en question. Il suit de là que ce sont des points singuliers de la surface de l'onde, et que les quatre cônes circonscrits α l'ellipse (29.) et ayant leurs centres en ce points, sont ceux qui y touchent l'onde suivant chacune de leurs arêtes.

35. *Considérations géométriques.* On peut parvenir par des raisonnements purement géométriques et très simples à la détermination complète des deux sortes des singularités de la surface de l'onde lumineuse.

A un point quelconque m du premier ellipsoïde correspond toujours un seul point p de la surface d'élasticité (Fig. 4.), de sorte que ce dernier

point p est le pied de la perpendiculaire, abaissé du centre O sur le plan tangent à l'ellipsoïde dans le premier point m. Le plan diamétral, passant par les deux points m et p, est, d'après le numéro 25., le plan de vibration; lorsqu'on mène, dans ce plan, deux lignes droites OM et OV, respectivement perpendiculaires et égales a Om et Op, le rayon lumineux, correspondant a des vibrations, qui ont lieu suivant Op, sera OM, tandis que le front de l'onde est perpendiculaire à OV en V.

Il repondra pareillement à une section diamétrale de la surface d'élasticité, et *vice versâ*. Nous nous bornerons ici à considérer plus particulièrement les deux sections circulaires de l'une et de l'autre des deux surfaces. Il est aisé de voir que ces quatre sections appartiennent à une même sphère, ayant pour rayon le demi-axe moyen de l'ellipsoïde. Ceci a été prouvé, quant aux deux sections circulaires de celui-ci, dans le numéro 14. Le rayon des sections circulaires du second ellipsoïde sera donc égal à $\frac{1}{b}$ et celui des sections correspondantes de la surface d'élasticité, pareillemens circulaires, égal à b, valeur inverse de $\frac{1}{b}$; ce qu'il falloit démontrer.

Occupons nous d'abord des deux sections circulaires de la surface d'élasticité. Le cylindre droit qui a pour base l'une quelconque H_0BH^0 de ces deux sections enveloppera le premier ellipsoïde; la courbe de contact F_0BI^0, nécessairement plane, sera la section correspondante de celui-ci, de sorte que chaque arête du cylindre coupera les deux sections de la surface d'élasticité et de l'ellipsoïde en deux points correspondants. Tels sont, dans la figure, les points h et g. La section de l'ellipsoïde est une ellipse, dont le petit axe, égal à b, se confond, dans l'axe des y, avec un diamètre de la section circulaire. Le plan de vibration passe toujours par le centre O et deux points correspondants, tels que h et g, de sorte qu'il est perpendiculaire à la section circulaire H_0BH^0. Faisons tourner dans ce plan, autour du centre O, le triangle hOg, jusqu'à ce que OH devienne perpendiculaire à Oh. HG sera alors perpendiculaire à hg et parallèle à Oh. Quels que soient donc les deux points correspondants h et g, dans la position nouvelle, le point H sera un même point fixe, tandis que le point G se trouvera toujours dans un même plan, parallèle à la section circulaire et distant d'elle d'une quantité $OH = OB = b$. Pour déterminer dans ce plan

le lieu géométrique des différentes positions du point G, nous observerons qu'on a

$$hg = H_0 I_0 \cos H_0 OH,$$

ou bien, en substituant:

$$HG = HI \cos GHI.$$

De là on conclût, que l'angle HGI est un angle droit. Donc le lieu cherché est un cercle, perpendiculaire au plan des xz et ayant HI pour l'un de ses diamètres. Les rayons lumineux, qui repondent aux différents points de la section $I_0 BI^0$ forment ainsi un cône lumineux du second ordre. Le front de l'onde est la même pour tous les rayons. Tous leurs plans de vibration passent par le point H.

36. Considérons en second lieu les deux sections circulaires du premier ellipsoïde. Suivant l'une quelconque $M_0 BM^0$ (Fig. 8.) de ces deux sections, l'ellipsoïde est touché par un cylindre circonscrit du second ordre. Si l'on abaisse du centre des perpendiculaires sur les plans tangents à ce cylindre, les pieds de ces perpendiculaires constitueront la courbe correspondante de la surface d'élasticité. Pour la déterminer, conduisons par le centre un plan diamétral et perpendiculaire aux arêtes du cylindre circonscrit. Ce plan coupera le cylindre suivant une ellipse, dont le grand axe, égal à b, se confondra avec l'axe des y. Il contiendra la courbe cherchée, que l'on constuira, en abaissant du centre des perpendiculaires sur les tangentes à l'ellipse d'intersection. Soit m un point de la section circulaire de l'ellipsoïde, l'arête du cylindre, passant par m, coupera l'ellipse en n, où celle-ci est touchée par la droite nv. Ov, perpendiculaire à nv, sera également perpendiculaire au plan mnv, qui touche l'ellipsoïde en m. v sera donc le point de la surface d'elasticité correspondant au point m. Faisons faire au triangle vOm un quart de révolution autour du centre O dans son propre plan, qui est celui de vibration. Quels que soient les deux points correspondants m et v dans la position nouvelle, M' sera un même point fixe; Ovm étant un angle droit, $M'V$ deviendra parallèle à Ov, de sorte que le point V doit rester constamment dans un plan passant par M' et parallèle à la section ovale de la surface d'élasticité. L'angle OVM' étant pareillement un angle droit, V doit se trouver sur la surface d'une sphère, décrite sur OM' comme diamètre. De là on conclût que le lieu géométrique des points V est un cercle, perpendiculaire au plan des xz et ayant MP pour l'un de ses diamètres.

A tous les différents points de la section circulaire de l'ellipsoïde ne repond donc qu'un rayon lumineux unique, tandis que le front de l'onde, dépendant des points de la section correspondante de la snrface d'élasticité, varie d'un point à l'autre. Il enveloppe, dans ses différentes positions, un cône du second degré, dont les plans tangents touchent le cercle $M'VP$ et sont respectivement perpendiculaires aux rayons vecteurs aboutissant aux points de ce cercle. Les plans de vibrations passent tous par le rayon lumineux OM'.

37. *Vitesse des ondes planes dans l'interieur du crystal.* Nous avons désigné précédemment par $V_,$ et $V_{,,}$ les perpendiculaires abaissées du centre O sur les fronts des ondes planes, qui enveloppent la surface de l'onde, qui à partir d'un point quelconque O de l'interieur du crystal, pris pour centre, se propage dans tous les sens. Deux valeurs correspondantes de $V_,$ et $V_{,,}$, se rapportent aux deux ondes planes, qui s'accompagnent toujours l'une l'autre en suivant une même direction. Dévélopons l'équation (2.) du numéro 7.

$$V_,^2 - V_{,,}^2 = \pm\sqrt{((\mu+\varrho)^2 - 4(\mu\varrho - \nu^2))}$$

au moyen des deux équations (5.) du numéro 18., que nous écrirons, en égard aux dernières équations du numéro 2. de la manière suivante:

$$(\mu+\varrho) = \frac{(a^2+b^2)C^2+(a^2+c^2)B^2+(b^2+c^2)A^2}{A^2+B^2+C^2},$$

$$(\mu\varrho-\nu^2) = \frac{a^2b^2C^2+a^2c^2B^2+b^2c^2A^2}{A^2+B^2+C^2};$$

il en résultera après les reductions faciles:

$$(V_,^2-V_{,,}^2)^2 = \frac{[(b^2-a^2)C^2+(c^2-a^2)B^2+(c^2-b^2)A^2]^2-4(b^2-a^2)(c^2-a^2)A^2C^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Nommons ζ, η, ϑ les trois angles, que fait la perpendiculaire aux fronts parallèles des deux ondes planes avec les trois axes des x, y et z; nous aurons:

$$\cos^2\zeta = \frac{A^2}{A^2+B^2+C^2}, \quad \cos^2\eta = \frac{B^2}{A^2+B^2+C^2}, \quad \cos\vartheta = \frac{C^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient

1. $$(V_,^2-V_{,,}^2)^2 =$$
$$[(b^2-a^2)\cos^2\vartheta+(c^2-a^2)\cos^2\eta+(c^2-b^2)\cos^2\zeta]^2-4(b^2-a^2)(c^2-a^2)\cos^2\zeta\cos^2\vartheta,$$

et si l'on décompose son second membre en deux facteurs,

$$(V_,^2-V_{,,}^2 = [\{\sqrt{(b^2-a^2)}\cos\vartheta+\sqrt{(c^2-b^2)}\cos\zeta\}^2+(c^2-a^2)\cos^2\eta]$$
$$\times[\{\sqrt{(b^2-a^2)}\cos\vartheta-\sqrt{(c^2-b^2)}\cos\zeta\}^2+(c^2-a^2)\cos^2\eta].$$

Désignons par $\alpha_,$ et $\alpha_{,,}$ (Fig. 1.) les angles que font les deux tangentes T, T''' et $T, T_{,,}$ communes au cercle et à l'ellipse d'intersection dans le plan des xz, avec l'axe des x et par $\gamma_,$ et $\gamma_{,,}$ les angles formés par les mêmes tangentes avec l'axe des z, de sorte qu'on ait:

$$\cos\alpha_{,,} = \cos\alpha_, = +\sqrt{\left(\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\right)}, \quad -\cos\gamma_{,,} = \cos\gamma_, = +\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\right)},$$

Alors l'équation précédente peut s'écrire ainsi:

$$(V_,^2 - V_{,,}^2)^2 =$$

$$(c^2-a^2)^2[(\cos\gamma_,\cos\vartheta+\cos\alpha_,\cos\zeta)^2+\cos^2\eta][(\cos\gamma_{,,}\cos\vartheta+\cos\alpha_{,,}\cos\zeta)^2+\cos^2\eta].$$

Mais, suivant la formule connue, qui donne l'angle des deux droites moyennant les trois angles que chacune d'elles fait avec les trois axes des coordonnées, on a

$$\cos\gamma_,\cos\vartheta+\cos\alpha_,\cos\zeta = \cos\varepsilon, \qquad \cos\gamma_{,,}\cos\vartheta+\cos\alpha_{,,}\cos\zeta = \cos\varepsilon';$$

en nommant ε et ε' les angles que fait la perpendiculaire au front de l'onde avec la direction des tangentes T, T''' et $T, T_{,,}$. Nommons enfin ψ et ψ' les angles que fait la même perpendiculaire avec les deux axes optiques; ces axes étant respectivement perpendiculaires aux deux tangentes et en même temps à l'axe des y, l'on a

$$\cos^2\eta+\cos^2\varepsilon+\cos^2\psi = 1, \qquad \cos^2\eta+\cos^2\varepsilon'+\cos^2\psi' = 1,$$

d'où

$$\cos^2\eta+\cos^2\varepsilon^2 = \sin^2\psi, \qquad \cos^2\eta+\cos^2\varepsilon' = \sin^2\psi'.$$

Après avoir fait les substitutions ainsi indiquées et extrait la racine carrée, l'on obtient finalement l'équation qui suit:

$$2. \qquad V_,^2 - V_{,,}^2 = (c^2-a^2)\sin\psi\sin\psi'.$$

On voit que les deux vitesses ne sont jamais égales, excepté le cas, où l'un des deux angles ψ et ψ' disparait. Le front des deux ondes qui suivent la même direction est alors perpendiculaire à l'un des deux axes optiques HH' et $H_{,,}H''$.

Si le front des deux ondes est perpendiculaire au plans des xz, l'une des deux vitesses est constante et égale à b. Veut-on que ce soit $V_{,,}$ et ne fait-on croître les angles ψ et ψ' que jusqu'à π, il vient

$$3. \qquad V_{,,}^2 = b^2 \pm (c^2-a^2)\sin\psi\sin\psi',$$

où il faut prendre le signe $+$, si la perpendiculaire abaissée du centre sur le front de l'onde tombe entre OH et $OH_{,,}$ ou leurs prolongements, tandis qu'il faut prendre le signe $-$, si elle tombe entre OH et OH'' ou entre leurs prolongements. Dans le premier cas l'onde extraordinaire dévance l'onde ordinaire, dans le dernier cas le contraire a lieu.

Si le front des deux ondes est perpendiculaire à l'un des deux plans, qui bissectent les angles des deux axes optiques, c'est-à-dire s'il est perpendiculaire au plan des xy et des yz, l'une des deux vitesses est encore constante. Considérons l'onde perpendiculaire au plan des xy et posons en conséquence dans l'équation (1.)

$$\cos\vartheta = 0, \quad \cos^2\varrho + \cos^2\eta = 1,$$

il viendra

$$V_{'}^2 - V_{''}^2 = \pm[c^2 - (a^2\cos^2\eta + b^2\cos^2\zeta)],$$

où il faut prendre le signe —, si l'on veut que $V_{''}$ soit constante. Il en résulte.

$$V_{''}^2 = c^2, \quad V_{'}^2 = a^2\cos^2\eta + b^2\cos^2\zeta,$$

de sorte qu'on obtient indépendamment l'une de l'autre la vitesse de l'onde ordinaire et celle de l'onde extraordinaire. L'onde ordinaire dévance toujours l'onde extraordinaire. La construction de la vitesse de l'onde extraordinaire est liée par la dernière équation à la propriété suivante de l'ellipse (celle d'intersection dans le plan des xy) „que si l'on projette les deux demi-axes sur l'une quelconque de ses tangentes, la somme des carrés des projections est égale au carré de la perpendiculaire, abaissée du centre sur la même tangente."

Pendant que, perpendiculairement au plan des xy, l'onde ordinaire dévance constamment l'extraordinaire, au contraire, les ondes étant perpendiculaires au plan des yz, c'est l'onde extraordinaire qui dévance l'ordinaire.

38. Suivant l'équation (1.) du numéro 7. on a

$$V_{'}^2 + V_{''}^2 = \mu + \varrho = \frac{(a^2+b^2)C^2 + (a^2+c^2)B^2 + (b^2+c^2)A^2}{A^2+B^2+C^2}$$
$$= (a^2+b^2)\cos^2\vartheta + (a^2+c^2)\cos^2\eta + (b^2+c^2)\cos^2\zeta.$$

En faisant attention que

$$\cos^2\vartheta + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1,$$

cette équation peut s'écrire ainsi:

$$V_{'}^2 + V_{''}^2 = (a^2+c^2) + (b^2-a^2)\cos^2\zeta - (c^2-b^2)\cos^2\vartheta$$
$$= (a^2+c^2) + (c^2-a^2)\left(\frac{b^2-c^2}{c^2-a^2}\cos^2\zeta - \frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\cos^2\vartheta\right).$$

Si l'on nomme α' et α'' les deux angles que font les deux axes optiques OH'' et OH_1' avec l'axe des x et γ' et γ'' les angles que font les mêmes axes avec l'axe des z, l'on a

$$\cos\alpha'' = \cos\alpha' = +\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\right)}, \quad -\cos\gamma'' = \cos\gamma' = +\sqrt{\left(\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\right)}.$$

Il suit delà

$$V_{'}^2 + V_{''}^2 =$$
$$(a^2+c^2) + (c^2-a^2)[\cos\alpha' \cos\zeta + \cos\gamma' \cos\vartheta][\cos\alpha'' \cos\zeta + \cos\gamma'' \cos\vartheta]$$

et enfin

$$4. \quad V_{'}^2 + V_{''}^2 = (a^2 + c^2) + (c^2 - a^2)\cos\psi \cos\psi'.$$

Si successivent l'on ajoute à cette équation et en rétranche l'équation (2.) du numéro précédent, on obtient:

$$V_{'}^2,\ V_{''}^2 = \tfrac{1}{2}[(a^2 + c^2) + (c^2 - a^2)(\cos\psi \cos\psi' \pm \sin\psi \sin\psi')]$$

et par des transformations trigonometriques faciles,

$$5. \quad V_{'}^2,\ V_{''}^2 = \tfrac{1}{2}[(a^2 + c^2) + (c^2 - a^2)\cos(\psi \mp \psi')]$$
$$= c^2 - (c^2 - a^2)\sin^2\tfrac{1}{2}(\psi \mp \psi').$$

Cette équation donne séparement la vitesse de chacune des deux ondes; son discussion n'offre aucune difficulté.

39. *Vitesse des rayons lumineux dans l'intérieur du crystal.* — En mettant dans les dévéloppements des deux numéros précédents à la place de a^2, b^2, c^2 leurs valeurs inverses $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, il faut substituer à la direction de la perpendiculaire abaissée du centre sur le front de l'onde celle du rayon lumineux, à la vitesse de l'onde l'unité divisée par la vitesse du rayon et enfin aux deux axes optiques les deux lignes droites M,M' et $M_{,,}M''$, diamètres communs au cercle et à l'ellipse d'intersection dans le plan des xz. Ainsi on obtient, si l'on nomme $P_{'}$ et $P_{,,}$ les vitesses des deux rayons, qui se confondent dans une même direction, et Φ et Φ' les deux angles que fait cette direction avec les deux lignes droites M,M' et $M_{,,}M''$:

$$6. \quad \frac{1}{P_{'}^2} - \frac{1}{P_{''}^2} = \pm\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\sin\Phi \sin\Phi'.$$

Ce théorème est dû a Mr. *Biot.* Je le trouve enoncé sans démonstration dans le *Traité de la lumière* de Mr. *Herschel* No. 1018, ainsi que dans les *Philosophical Tracts.* de Mr. *Airy,* 2me ed. p. 352.

Dans chacun des plans des coordonnées la vitesse de l'un des rayons est constante et égale à la vitesse de l'onde correspondante; c'est ce qui constitue l'onde ordinaire. La vitesse de l'autre rayon est déterminée par les rayons vecteurs de l'ellipse d'intersection dans ce même plan. L'on a ainsi, par exemple pour les rayons lumineux renfermés dans le plan des axes optiques:

$$P_{,}^{2} = b^{2}, \qquad \frac{1}{P_{,,}^{2}} = \frac{1}{b^{2}} \pm \left(\frac{1}{c^{2}} - \frac{1}{a^{2}}\right) \sin\varphi \sin\varphi',$$

ou bien encore:

$$\frac{1}{P_{,,}^{2}} = \frac{\cos^{2}\eta}{a^{2}} + \frac{\cos^{2}\zeta}{b^{2}}.$$

Rémarquons enfin qu'il peut arriver que la vitesse du rayon extraordinaire surpasse celle du rayon ordinaire qui suit la même route, tandis que l'onde extraordinaire correspondante marche plus lentement que l'onde ordinaire. C'est ce qui a lieu pour les rayons situés entre OI et OM''. D'un autre cotés il peut arriver que des deux ondes, qui suivent la même route, l'ordinaire surpasse en vitesse l'extraordinaire, tandis que le rayon ordinaire correspondant rétarde sur le rayon extraordinaire. C'est ce qui a lieu, si perpendiculaire abaissée du centre sur les deux ondes parallèles est située la entre OQ et OH''.

40. Les formules obtenues dans le numéro 38., se transforment par les mêmes substitutions dans les suivantes:

$$\frac{1}{P_{,}^{2}} + \frac{1}{P_{,,}^{2}} = \left(\frac{1}{a^{2}} + \frac{1}{c^{2}}\right) - \left(\frac{1}{a^{2}} - \frac{1}{c^{2}}\right) \cos\varphi \cos\varphi',$$

$$\frac{1}{P_{,}^{2}}, \quad \frac{1}{P_{,,}^{2}} = \frac{1}{c^{2}} + \left(\frac{1}{a^{2}} - \frac{1}{c^{2}}\right) \sin^{2}\tfrac{1}{2}(\varphi \pm \varphi').$$

Ce dernier résultat appartient à l'illustre *Fresnel* (*Biot, Précis élémentaire de physique.* Troisième éd. vol. II. p. 259.).

41. *Le front d'une onde étant donné: déterminer les plans de vibration au moyen des deux axes optiques.* — Soit l'ovale de la figure 9. une section diamétrale quelconque de la surface d'élasticité, VV son diamètre *maximum*, $V'V'$ son diamètre *minimum*. Les deux plans de vibration seront alors ceux qui, étant perpendiculaires au plan de la figure, le coupent suivant VV et $V'V'$. Les deux sections circulaires de la surface coupent l'ovale suivaat deux diamètres KK et $K'K'$ qui, étant tous les deux égaux à $2b$, feront nécessairement des angles égaux avec chacune des deux lignes droites VV et $V'V'$. Les axes optiques sont perpendiculaires à ces sections circulaires, l'inclinaison de celles-ci sur le plan de l'ovale étant dependante de la position de ce plan. Si l'on construit deux plans respectivement perpendiculaires aux diamètres KK et $K'K'$, chacun de ces plans passera par la normale au plan de la figure et en outre par un des deux axes optiques. Ils couperont l'ovale, à laquelle ils sont perpendi-

culaire suivant les deux lignes droites UU et $U'U'$, qui font des angles égaux avec chacun des deux diamètres VV et $V'V'$.

Le front d'une onde étant donné, les deux plans de vibration correspondants divisent en deux parties égales les angles que forment les deux plans, dont chacun contient, outre la normale au front, un des deux axes optiques.

Cet élégant théorème est dû à la sagacité de Mr. *Biot*; on en trouve une démonstration à l'endroit cité de l'ouvrage de Mr. *Airy*.

42. *Un rayon lumineux étant donné, determiner les plans de vibration au moyen des deux normales aux sections circulaires du premier ellipsoïde.* — Dans un numéro précédent nous avons fait voir, que le plan de vibration passe en même temps et par le rayon lumineux et par la perpendiculaire abaissée du centre sur le front de l'onde, et qu'en second lieu, il coupe les deux sections correspondantes de la surface d'élasticité et du premier ellipsoïde, chacune suivant l'un de leurs diamètres *maximum-minimum*, en étant perpendiculaire à toutes les deux. L'on obtient donc, en remplaçant dans les considérations du numéro précédent la section diamétrale de la surface d'élasticité par une section diamétrale du premier ellipsoïde, cet autre théorème:

Un rayon lumineux étant donné, les deux plan de vibration correspondants divisent en deux parties égales les angles formés par les deux plans, dont chacun contient, outre le rayon, une des deux normales aux sections circulaires du premier ellipsoïde.

Conformément au numéro précédent, les plans de vibration des deux rayons, dans lesquels se divise un rayon extérieur, en entrant sous l'incidence perpendiculaire dans le crystal, se coupent à angles droits. D'après le présent numéro la même chose a lieu, quant aux deux rayons, dans lesquels se divise un rayon intérieur, en sortant du crystal.

43. *Double refraction suivant le principe de Huygens.* — Lorsqu'une onde lumineuse, se propageant dans l'air, vient frapper la surface d'un crystal, elle excitera dans tous les points, où son front la rencontre des ondes partielles, tant à l'extérieur du crystal dans l'air, que dans son intérieur. Les unes, de forme sphérique, seront enveloppées, dans un même instant quelconque, par un plan; c'est le front correspondant de l'onde réflechie. Les autres prennent de formes dépendantes de la position des trois axes d'élasticité dans le crystal et de la grandeur des élasticités

suivant ces axes. Dans un instant quelconque les surfaces de ces ondes seront enveloppées par deux plans différents, qui constituent les fronts correspondants des deux ondes refractées. Il suit de ce principe, originairement dû à *Huygens* que, dans un même instant quelconque, le front de l'onde incidente et ceux des ondes réflechies et réfractées, vont couper la surface du crystal, que nous supposons plane, suivant une même ligne droite.

Soit AA (Fig. 10.) la surface du crystal, FO le front de l'onde incidente, tous les deux perpendiculaires au plan du papier, de sorte que ce plan soit celui d'incidence pour le rayon lumineux RO, perpendiculaire au front de l'onde en O. Désignons par $\tau_1 - \tau$ l'intervalle de temps, qu'emploie le front de l'onde pour passer de FO à la position nouvelle $F'O'$. Après cet intervalle, à l'époque τ_1, les ondes partielles excitées dans l'air autour de chaque point de la ligne droite, perpendiculaire au plan du papier en O, seront des sphères dont le rayon est égal à OG, c'est-à-dire égal à $\tau_1 - \tau$, si nous prenons pour unité de longueur la vitesse avec laquelle la propagation a lieu dans l'air. Pendant ce même intervalle une onde lumineuse s'est formée dans l'intérieur du crystal autour de chaque point de la perpendiculaire en O, ayant pour vitesses suivant les trois axes d'élasticité: $a(\tau_1 - \tau)$, $b(\tau_1 - \tau)$, $c(\tau_1 - \tau)$. Les dimensions des deux series d'ondes partielles, extérieures et intérieures, telles qu'elles sont à l'époque τ_1, diminueront donc proportionellement à $\tau_1 - \tau$, c'est-à-dire à mesure que le front de l'onde primitive s'approche de la position $F'O'$, de manière que les ondes, excitées dans les différents points de la perpendiculaire en O', se réduisent à des simples points. Il en résulte, les équations des ondes étant homogènes, qu'à l'époque τ_1, toutes ces ondes sont enveloppées par des plans, passant par la perpendiculaire en O'. Pour les obtenir, l'on n'a qu'à construire les plans qui, passant per cette perpendiculaire, touchent la surface d'une onde partielle quelconque. Nous prendrons, en nous bornant aux ondes intérieures, celle décrite autour du point O. Les deux plans tangents $O'ED$, $O'E'D'$, perpendiculaires au plan d'incidence, sont, à l'époque τ_1, les fronts des deux ondes réfractées, tandis que les deux rayons vecteurs OE, OE', passant par les deux points de contact E, E', sont les deux rayons dans lesquels se divise, par la réfraction, le rayon incident RO.

Dans le cas général aucun des deux rayons réfractés se trouvera dans le plan d'incidence. Les deux plans de vibration ODE, $OD'E'$ sont

ceux qui passent entre les deux rayons OE, OE' et les deux perpendiculaires OD, OD', abaissés du centre O (dans le plan d'incidence) sur les fronts des deux ondes réfractées.

Lorsque le plan d'incidence contient ou les deux axes optiques, ou fait des angles égaux avec ces axes (c'est-à-dire lorsque ce plan coïncide avec l'un des plans des coordonnées): les deux rayons réfractées se trouveront tous les deux dans le plan d'incidence. La vitesse de l'un sera constant, de quelle manière, qu'on incline le rayon incident sur la surface du crystal; le plan de vibration correspondant sera perpendiculaire à celui d'incidence. La vitesse de l'autre rayon changera avec l'inclinaison; le plan de vibration correspondant se confondra avec celui d'incidence. Pour les deux rayons réfractés les plans de vibration seront donc perpendiculaires entre eux.

Quant à l'incidence perpendiculaire, la construction précédente se réduit à celles des deux plans tangents à la surface de l'onde partielle, décrite autour du point O, parallèles entre eux et au front de l'onde incidente. Les deux plans de vibration pour les deux rayons réfractés sont, dans ce cas, perpendiculaires entre eux, quelle que soit la surface du crystal.

44. *Surface of wave slowness.* — Nous avons trouvé plus haut l'équation

$$(b^2c^2A^2+a^2c^2B^2+a^2b^2C^2)(A^2+B^2+C^2)$$
$$-((b^2+c^2)A^2+((a^2+c^2)B^2+(a^2+b^2)C^2)+1=0$$

pour déterminer, dans le cas le plus général, la surface de l'onde par ses plans tangents, A, B, C désignant les valeurs inverses des segments, qu'un tel plan intercepte sur les trois axes des coordonnées. En remplaçant ces vaviables par x, y, z, l'équation résultante en coordonnées rectangulaires

$$(b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-((b^2+c^2)x^2+(a^2+c^2)y^2+(a^2+b^2)z^2)+1=0,$$

réprésentera, suivant le numéro 8., la surface polaire réciproque de celle de l'onde, par rapport à une sphère, dont le rayon est égal à l'unité. L'on parvient à la même équation si dans l'équation de l'onde

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-(a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(a^2+c^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2)+a^2b^2c^2=0$$

on remplace les trois constantes a^2, b^2, c^2 par $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. De là on tire le théorème suivant:

Les surfaces de deux ondes telles, que les trois axes (vitesses principales) de l'une soient l'inverse des axes de l'autre, sont polaires réciproques, par rapport à une sphère dont le rayon est égal à l'unité.

Tandis que les rayons vecteurs de l'une des deux surfaces répresentent la vitesse des différents rayons lumineux, ceux de l'autre sont égaux à l'unité divisée par la vitesse des ondes planes correspondantes. Tandis que les perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents à l'une réprésentent la vitesse des ondes planes, celles abaissées sur les fronts de l'autre sont égales à l'unité, divisée par la vitesse des rayons correspondants. Ces relations sont tout-à-fait réciproques *).

45. ***Construction de M. Hamilton.*** **— La détermination des deux rayons réfractés exige, d'après le numéro 43., qu'on construise les deux plans, qui, passant par la ligne droite, perpendiculaire au plan d'incidence en O' (Fig. 10.), touchent la surface de l'onde. En général, il sera plus facile à construire les poles de ces plans tangents. On obtient ces poles, en cherchant les points où la ligne droite, polaire réciproque de la perpendiculaire contenue dans les plans tangents, coupe la surface polaire réciproque de l'onde. Prenons pour unité le rayon $OG = OL$ de l'onde sphérique, d'écrite autour du point d'incidence O. Par rapport à cette sphère, la ligne droite GL, contenue dans le plan d'incidence et passant par les deux points G et L, où le rayon incident RO et le rayon OL coupent la sphère,**

---

*) Je dois conclure des indications données par Mr. *Lloyd.* dans son excellent „*Report on the progress and present state of physical optics.*" (London, 1835) que la surface polaire réciproque de l'onde lumineuse, par rapport à une sphère, dont le rayon est égal à l'unité, soit précisement celle, que Mr. *Hamilton* a nommé „*surface of wave slowness.*" N'ayant aucune connaissance du mémoire de M. *Hamilton*, je me borne à emprunter du *Report* la construction suivante dont je n'y trouve que le simple énoncé.

„. . . they lead to a very elegant construction for the reflected or refracted ray, which is, „in most cases, more convenient then that of *Huygens.* That when a ray proceeds from „air into any crystal, whe have only to construct the *surfaces of wave slowness* belon- „ging to the two media and having their common centre at the point of incidence. Let „the incident ray be then produced to meet the sphere, which represents the normal slow- „ness of the wave in air; and from the point of intersection let a perpendicular be drawn „to the reflecting or refracting surface. This will cut the surface of slowness of the re- „flected or refracted waves in general in two points. The lines connecting these points „with the centre, will represent the direction and normal slowness of the *waves*; while „the perpendiculars from the centre on the tangent planes, at the same points, will re- „present the direction and slownes of the *rays* themselves."

L'on verra que cette construction revient à celle du numéro suivant, si l'on entend par *slowness* l'unité divisée par la vitesse.

est polaire réciproque de celle qui, en O', est perpendiculaire au plan d'incidence (numéro 12.). Delà résulte la construction suivante.

Construisez autour du point d'incidence la surface sphérique de l'onde propagée dans l'air, et, par rapport à cette sphère, la surface polaire réciproque de l'onde, décrite autour du même point dans l'intérieur du crystal. La ligne droite, passant par les deux points G et L, où le rayon incident ROG et le rayon réflechi OL rencontrent la sphère, coupera en général la surface polaire en deux points K et K'. Les fronts des deux ondes réfractées sont perpendiculaires aux rayons vecteurs OK, OK'; leur vitesse (OD, OD') est égale à l'unité divisée par ces rayons vecteurs. Les perpendiculaires, abaissées du centre sur les plans tangents à la surface polaire de l'onde, donnent la direction des deux rayons refractés, dont la vitesse (OE, OE') est égale à l'unité divisée par ces perpendiculaires.

46. *La surface de l'onde a sa propre polaire réciproque.* Si de l'équation rapportée dans le numéro 44.:

$$(b^2c^2A^2 + a^2c^2B^2 + a^2b^2C^2)(A^2+B^2+C^2)$$
$$-((b^2+c^2)A^2+(a^2+c^2)B^2+(a^2+b^2)C^2)+1=0,$$

nous éliminons A, B, C au moyen des trois équations suivantes:

1. $\quad b^2c^2A^2 = x^2, \qquad a^2c^2B^2 = y^2, \qquad a^2b^2C^2 = z^2,$

l'équation résultante en x, y et z réprésentera, d'après le numéro 9., la surface polaire de celle de l'onde, par rapport à l'ellipsoïde

2. $$\frac{x^2}{bc}+\frac{y^2}{ac}+\frac{z^2}{ab}=1,$$

dont les trois demi-axes sont égaux à $\sqrt{(bc)}$, $\sqrt{(ac)}$, $\sqrt{(ab)}$. Mais l'équation obtenue par l'élimination indiquée:

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-(a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(a^2+c^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2)+a^2b^2c^2=0,$$

n'est autre chose que celle de la surface de l'onde elle même. Ainsi se présente à nous le théorème élégant suivant:

La surface de l'onde est sa propre réciproque, par rapport à un ellipsoïde, dont les trois axes sont moyennes proportionelles entre les produits des trois axes du premier ellipsoïde, pris deux à deux.

Ce théorème constitue, quant à l'optique des crystaux, une espèce de duplicité, ou (pour me servir du mot de Mr. *Gergonne*, sans lui prêter cependant aucune signification métaphysique de *dualité*): les phénomènes se présentent par couples, de sorte que l'un de chaque couple se déduit de

l'autre au moyen de l'ellipsoïde directeur (2.). Il repond à chaque point de la surface de l'onde un plan unique qui la touche, et par conséquant à chaque rayon lumineux intérieur, aboutissant à ce point, le front d'une onde intérieure unique, ou encore un rayon extérieur unique, perpendiculaire à ce front dans le point de contact. Aux points singuliers de l'onde répondent ses plans singuliers; ce qui se voit directement, les points en question étant déterminés par les équations

$$c\sqrt{(b^2-a)}\,.\,A \pm a\sqrt{(c^2-b^2)}\,.\,C \pm \sqrt{(c^2-a^2)} = 0,$$

qui, moyenant les équations (1.), se transforment dans les suivantes:

$$\sqrt{(b^2-a^2)}\,.\,x \pm \sqrt{(c^2-b^2)}\,.\,z \pm b\sqrt{(c^2-a^2)} = 0,$$

qui sont celles des plans singuliers. Les perpendiculaires aux plans singuliers jouent donc, par rapport aux rayons lumineux sortants, le même rôle que les diamètres passant par les points singuliers, par rapport aux rayons entrants. Les unes et les autres, souvent confondus, se disputent le nom d'axes optiques. Aux cônes tangents dans les quatre points singuliers, répondent les courbes de contact dans les quatre plans singuliers, de même qu'à ellipsoïde unique, enveloppé par les quatre cônes, l'ellipsoïde contenant les quatre courbes de contact (numero 11.). Les deux belles expériences de Mr. Mr. *Hamilton* et *Lloyd* se déterminent l'un par l'autre au moyen de l'ellipsoïde directeur (2.).

47. *Troisième construction des deux rayons réfractés.* Je terminerai ce mémoire par déduire du théorème du numéro précédent une construction nouvelle des rayons réfractés, qui me parait la plus simple possible parmi celles, qui se lient au principe de *Huygens*.

Construisez, par rapport à l'ellipsoïde directeur, la ligne droite polaire de celle qui est perpendiculaire au plan d'incidence en O'. Elle coupera la surface de l'onde, décrite autour du point O, en deux points. Les deux lignes droites qui vont du point O aboutir à ces points, seront les deux rayons réfractés; tandis, que les deux plans, qui, contenant la perpendiculaire en O', passent par ces deux mêmes points, seront les fronts des deux ondes planes correspondantes. Enfin il a été démontré dans ce qui précède, que les deux plans de vibration sont ceux qu'on obtient en conduisant par les rayons lumineux des plans perpendiculaires aux fronts des ondes correspondantes.

Le mémoire qu'on vient de lire, fera naitre d'autres, ayant pris naissance lui même dans le beau Mémoire intitulé „*On the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxal crystals by the rev. Humphrey Lloyd, etc. From the seventeenth vol. of the transactions of the royal Irish Academy. Dublin, 1833.*" que je dois à l'extrême bienveillance de l'auteur.

Aucune expérience de physique a fait tant d'impression sur mon esprit, que celle de la réfraction conique. Un rayon de lumière unique entrant dans un crystal et en sortant sous l'aspect d'un cone lumineux: c'étoit une chose inouie et sans aucune analogie. Mr. *Hamilton* l'anonça, en partant de la forme de l'onde, qui avoit été déduite par des longs calculs d'une théorie abstraite. J'avoue que j'aurois désesperé de voir confirmé par l'expérience un résultat si extraordinaire, prédit par la seule théorie que le génie de *Fresnel* avait nouvellement créée. Mais Mr. *Lloyd* ayant démontré que les expériences étoient en parfaite concordance avec les prédictions de Mr. *Hamilton,* tout préjugé contre une théorie, si merveilleusement soutenue, a dû disparaître. En même temps la forme générale, indiquée aux ondes lumineuses par *Fresnel* a dû acquérir une importance toute particulière. C'est seulement dans ce dernier temps, que j'ai pu m'en occupper. D'après le *Report,* cité plus haut, outre M. *Hamilton,* un autre géomètre irlandais s'en est également occupé; je n'ai pu me procurer le travail ni de l'un ni de l'autre de ces géomètres. J'ai cité tout ce qui étoit à ma connoissance.

Bonn, Avril et Mai 1838.

2.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten, No. 10. im 2ten, No. 15. im 3ten Hefte und No. 21. im 4ten Hefte des vorigen Bandes.)

Zehnter Abschnitt.

§. 99.

Ausdruck von u und $\mathrm{el}\,u$ durch $\mathrm{am}\,u$ in Reihen, welche nach Potenzen des Moduls k fortschreiten.

Bei diesen und den folgenden Entwicklungen der Functionen in Reihen ist der Gebrauch der numerischen Facultäten häufig; wir werden sie, so wie die sogenannten Permutationszahlen, auf dieselbe Art auch hier bezeichnen, wie im ersten Theile es geschehen ist. Dieser Bezeichnung gemäfs setzen wir

$$[a]^{n} = a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+1) \text{ und}$$

$$[a, d]^{n} = a(a-d)(a-2d)\ldots.(a-(n-1)d);$$

$$[a]^{-n} = \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots.(a+n)} \text{ und}$$

$$[a, d]^{-n} = \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots.(a+nd)}$$

und

$$r' = [r]^{r} = \frac{1}{[0]^{-r}} = 1.2.3\ldots.r.$$

Diesem gemäfs erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = (1-k^2\sin^2\Phi)^{-\frac{1}{2}} = S(-1)^{\alpha}\left[-\tfrac{1}{2}\right]^{\alpha}_{\alpha'}.k^{2\alpha}.\sin^{2\alpha}\Phi \text{ und}$$

$$\sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)} = (1-k^2\sin^2\Phi)^{\frac{1}{2}} = S(-1)^{\alpha}\left[\tfrac{1}{2}\right]^{\alpha}_{\alpha'}.k^{2\alpha}\sin^{2\alpha}\Phi,$$

wenn der dem allgemeinen Gliede vorgesetzte und sich auf die veränderliche positive ganze Zahl α beziehende Buchstab S die Forderung ausdrückt, dafs aus dem allgemeinen Gliede die besonderen dadurch hergeleitet werden sollen, dafs man $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ etc. setzt, um demnächst diese Glieder zu einer Reihe in der angegebenen Folge zusammenzusetzen. Da nun aber, wenn $\mathrm{am}\,u = \Phi$ gesetzt wird,

$$u = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} \quad \text{und} \quad \operatorname{el} u = \int_0 \partial\varphi . \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$$

ist, so erhalten wir zunächst

$$u = S(-1)^\alpha \left[-\tfrac{1}{2}\right]^\alpha . k^{2\alpha} \int_0 \partial\varphi . \sin^{2\alpha}\varphi \quad \text{und}$$

$$\operatorname{el} u = S(-1)^\alpha \left[\tfrac{1}{2}\right]^\alpha . k^{2\alpha} \int_0 \partial\varphi . \sin^{2\alpha}\varphi .$$

Das Integral, welches in beiden allgemeinen Gliedern vorkommt, setzen wir

$$\int_0 \partial\varphi . \sin^{2\alpha}\varphi = (-1)^\alpha \left[-\tfrac{1}{2}\right]^\alpha . \lambda^\alpha(\varphi), \text{ oder auch}$$

$$\int_0 \partial\varphi . \sin^{2\alpha}\varphi = \frac{1.3.5.7....(2\alpha-1)}{2.4.6.8....(2\alpha)} . \lambda^\alpha(\varphi), \text{ und also umgekehrt}$$

$$\lambda^\alpha(\varphi) = \frac{2.4.6.8....(2\alpha)}{1.3.5.7....(2\alpha-1)} . \int_0 \partial\varphi . \sin^{2\alpha}\varphi .$$

Machen wir von dieser Bezeichnung Gebrauch, so haben wir die Reihen

$$u = S\left[-\tfrac{1}{2}\right]^\alpha . \left[-\tfrac{1}{2}\right]^\alpha . \lambda^\alpha(\varphi) . k^{2\alpha} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{el} u = S\left[\tfrac{1}{2}\right]^\alpha . \left[\tfrac{1}{2}\right]^\alpha . \lambda^\alpha(\varphi) . k^{2\alpha},$$

welche nach Potenzen des Moduls k oder k^2 fortschreiten und in welchen $\varphi = \operatorname{am} u$ ist. Die ersten Glieder dieser Reihen sind

1. $$u = \operatorname{am} u + \frac{1^2}{2^2}\lambda^1(\operatorname{am} u).k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\lambda^2(\operatorname{am} u).k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\operatorname{am} u).k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\lambda^4(\operatorname{am} u).k^8 + \text{etc. und}$$

2. $$\operatorname{el} u = \operatorname{am} u - \frac{1}{2^2}\lambda^1(\operatorname{am} u).k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}\lambda^2(\operatorname{am} u).k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\operatorname{am} u).k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}\lambda^4(\operatorname{am} u).k^8 - \text{etc.}$$

Subtrahiren wir die zweite Reihe von der ersten, so erhalten wir noch eine dritte bemerkenswerthe Reihe, nämlich

3. $$u - \operatorname{el} u = \tfrac{1}{2}\lambda(\operatorname{am} u).k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}\lambda^2(\operatorname{am} u).k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\lambda^3(\operatorname{am} u).k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}\lambda^4(\operatorname{am} u).k^8 + \text{etc.}$$

§. 100.

Erster Ausdruck und Eigenschaften der Hülfs-Function $\lambda^r(\varphi)$, mit Bezugnahme auf die vorigen Reihen.

Setzen wir im §. 29. des ersten Theiles *) φi für k, so erhalten wir die Formel

$$(2.\sin\varphi)^{2r} = [2r]^r_{r'} + 2.S(-1)^\alpha [2r]^{r+\alpha}_{(r+\alpha)'}.\cos(2\alpha\varphi) \quad \text{für} \quad \alpha > 0,$$

welche wir noch ein wenig umformen. Es ist zunächst $[2r]^{r+\alpha}_{(r+\alpha)'} = [2r]^{r-\alpha}_{(r-\alpha)'}$ $= \frac{(2r)'}{(r-\alpha)'(r+\alpha)'}$; ferner ist $(2r)' = 2.4.6....(2r).(1.3.5....(2r-1))$ $= 2^r.r'.[1,-2]^r = (-1)^r.2^{2r}.r'.[-\frac{1}{2}]^r$; und wird dieser Werth substituirt, so erhält man

$$[2r]^{r+\alpha}_{(r+\alpha)'} = (-1)^r.2^{2r}.[-\tfrac{1}{2}]^r_{r'}.\frac{r'.r'}{(r-\alpha)'(r+\alpha)'} = (-1)^r[-\tfrac{1}{2}]^r_{r'}.2^{2r}.[r]^\alpha[r]^{-\alpha},$$

und $[2r]^r_{r'} = (-1)^r[-\frac{1}{2}]^r_{r'}.2^{2r}$. Werden diese Werthe substituirt, so erso erhält man den Ausdruck

$$\sin^{2r}\varphi = (-1)^r.[-\tfrac{1}{2}]^r_{r'}(1+2S(-1)^\alpha[r]^\alpha[r]^{-\alpha}.\cos(2\alpha\varphi)) \quad \text{für} \quad \alpha > 0.$$

Multiplicirt man denselben mit $\partial\varphi$ und integrirt auf beiden Seiten, indem man auf der linken Seite für $\int_0 \partial\varphi \sin^{2r}\varphi$ den Werth $(-1)^r.[-\frac{1}{2}]^r_{r'}.\lambda^r(\varphi)$ dem §. 99. gemäfs an die Stelle setzt, so erhält man die Formel

$$\lambda^r(\varphi) = \varphi + S(-1)^\alpha.[r]^\alpha[r]^{-\alpha}.\frac{\sin(2\alpha\varphi)}{\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha > 0,$$

welche, wenn man die Bezeichnung der Facultäten aufgiebt, also aussieht:

$$\text{I.} \quad \lambda^r(\varphi) = \varphi - \frac{r}{r+1}\sin 2\varphi + \frac{r(r-1)}{(r+1)(r+2)}.\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)}.\frac{\sin 6\varphi}{3}$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}.\frac{\sin 8\varphi}{4} - \text{etc.},$$

und jedesmal von selbst abbricht, da nach der Voraussetzung r eine positive ganze Zahl ist.

Setzt man für r nach einander die Werthe 0, 1, 2, 3 etc., so erhält man folgende speciellen Formeln:

---

*) Dieses frühere Werk des Verfassers, Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen, wird später oft mit den Zeichen G. T. d. P. F. angeführt werden.

$$\lambda^0(\varphi) = \varphi,$$
$$\lambda^1(\varphi) = \varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi,$$
$$\lambda^2(\varphi) = \varphi - \tfrac{2}{3}\sin 2\varphi + \frac{2.1}{3.4}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2},$$
$$\lambda^3(\varphi) = \varphi - \tfrac{3}{4}\sin 2\varphi + \frac{3.2}{4.5}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{3.2.1}{4.5.6}\cdot\frac{\sin 6\varphi}{3},$$
$$\lambda^4(\varphi) = \varphi - \tfrac{4}{5}\sin 2\varphi + \frac{4.3}{5.6}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{4.3.2}{5.6.7}\cdot\frac{\sin 6\varphi}{3} + \frac{4.3.2.1}{5.6.7.8}\cdot\frac{\sin 8\varphi}{4}$$

u. s. w.

Es hält auch nicht schwer, die Grenze anzugeben, welcher sich diese Ausdrücke bei dem Wachsen der Zeigezahl r ohne Ende nähern. Stellen wir den Ausdruck für $\lambda^r(\varphi)$ also dar:

$$\lambda^r(\varphi) = \varphi - \frac{1}{1+\frac{1}{r}}\sin 2\varphi + \frac{1-\frac{1}{r}}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{2}{r}\right)}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{r}\right)}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{3}{r}\right)}\cdot\frac{\sin 6\varphi}{3} + - \text{ etc.},$$

und setzen auf der rechten Seite $\frac{1}{r} = 0$, so erhalten wir für ein unendlich grofses r den Ausdruck

$$\lambda^r(\varphi) = \varphi - \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 4\varphi - \tfrac{1}{3}\sin 6\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 8\varphi - \tfrac{1}{5}\sin 10\varphi + - \text{ etc.},$$

welchen wir schlechtweg mit $\lambda(\varphi)$ bezeichnen. Es ist also

$$\lambda(\varphi) = \varphi - (\sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 6\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 8\varphi \ldots.).$$

Die Summe der hier von φ zu subtrahirenden Reihe läfst sich nach G. T. d. P. F. §. 52. leicht finden. Setzt man in der ersten Reihe daselbst $k = 2\varphi i$, so erhält man sogleich, wenn nur φ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist,

$$2.\quad \varphi = \sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 6\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 8\varphi \ldots.$$

und also $\lambda(\varphi) = \varphi - \varphi$ oder $\lambda(\varphi) = 0$, für jeden zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltenen Werth.

Die in §. 99. entwickelten Reihen (1.), (2.), (3.) convergiren also immer, wenn $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ ist, indem sich die Gröfsen $\lambda^1(\mathrm{am}\,u)$, $\lambda^2(\mathrm{am}\,u)$, $\lambda^3(\mathrm{am}\,u)$ etc. der Grenze $\lambda(\mathrm{am}\,u) = 0$ nähern, wenn $\mathrm{am}\,u < \frac{1}{2}\pi$ ist. Da nun auch die übrigen Factoren der Glieder in jenen Reihen für sich convergirende Reihen bilden, so haben wir einen hohen Grad der Convergenz, wenn zumal der Modul k nicht $> \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

§. 101.

Anderer Ausdruck der Hülfs-Function $\lambda^r(\varphi)$ und Folgerungen daraus.

Differenziirt man das Product $\sin^{2r+1}\Phi\cos\Phi$, so erhält man $(2r+1)\sin^{2r}\Phi.\partial\Phi-(2r+2)\sin^{2r+2}\Phi.\partial\Phi$; daher ist rückwärts

$$(2r+2).\int_0\partial\Phi.\sin^{2r+2}\Phi=(2r+1).\int_0\sin^{2r}\Phi.\partial\Phi-\sin^{2r+1}\Phi\cos\Phi.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{2.4.6....(2r)}{1.3.5....(2r-1)(2r+1)}$, so verwandelt sie sich in

$$\frac{2.4.6.8....(2r)(2r+2)}{1.3.5.7....(2r-1)(2r+1)}\int_0\partial\Phi.\sin^{2r+2}\Phi$$
$$=\frac{2.4.6....(2r)}{1.3.5....(2r-1)}\int_0\partial\Phi\sin^{2r}\Phi-\frac{2.4.6....2r}{3.5.7....(2r+1)}\sin^{2r+1}\Phi\cos\Phi,$$

oder in die einfachere Gleichung

$$4.\quad\lambda^{r+1}(\Phi)=\lambda^r(\Phi)-\frac{2.4.6.8....(2r)}{1.3.5.7....(2r-1)(2r+1)}\sin^{2r+1}\Phi.\cos\Phi.$$

Dieser Formel gemäfs haben wir also die folgenden eleganten Ausdrücke:

$$5.\quad\begin{cases}\lambda^0(\Phi)=\Phi,\\ \lambda^1(\Phi)=\Phi-\sin\Phi\cos\Phi,\\ \lambda^2(\Phi)=\Phi-\sin\Phi\cos\Phi-\frac{2}{3}\sin^3\Phi\cos\Phi,\\ \lambda^3(\Phi)=\Phi-\sin\Phi\cos\Phi-\frac{2}{3}\sin^3\Phi\cos\Phi-\frac{2.4}{3.5}\sin^5\Phi\cos\Phi,\\ \lambda^4(\Phi)=\Phi-\sin\Phi\cos\Phi-\frac{2}{3}\sin^3\Phi\cos\Phi-\frac{2.4}{3.5}\sin^5\Phi\cos\Phi-\frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^7\Phi\cos\Phi\\ \text{u. s. w.,}\end{cases}$$

welchen gemäfs die auf einander folgenden Hülfs-Functionen $\lambda^0(\Phi)$, $\lambda^1(\Phi)$, $\lambda^2(\Phi)$, $\lambda^3(\Phi)$ etc. auf die bequemste Weise recurrirend berechnet werden können. Nehmen wir die Zeigezahl r in $\lambda^r(\Phi)$ unendlich, so haben wir, da $\lambda^r(\Phi)$ nun $=\lambda(\Phi)=0$ wird, wenn $\Phi<\frac{1}{2}\pi$ ist, die Gleichung oder unendliche Reihe

$$6.\quad\Phi=\sin\Phi\cos\Phi+\tfrac{2}{3}\sin^3\Phi\cos\Phi+\frac{2.4}{3.5}\sin^5\Phi\cos\Phi+\frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^7\Phi\cos\Phi+\text{etc.},$$

welche dieselbe ist wie die am Schlusse des §. 102 in G. T. d. P. F. auf andere Art gefundene Reihe. Sie gilt also, dem vorigen Beweise gemäfs, so lange Φ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist, nicht aber in diesen Grenzfällen selbst. Es hat also diese Reihe, wie auch die im §. 100 gefundene Reihe (2.), eine ausgedehntere Anwendbarkeit als die bekannte Reihe

$$\varphi=\text{tang}\,\Phi-\tfrac{1}{3}\,\text{tang}^3\Phi+\tfrac{1}{5}\,\text{tang}^5\Phi-\tfrac{1}{7}\,\text{tang}^7\Phi+\text{etc.},$$

welche nur dann anwendbar ist, wenn Φ nicht $> \frac{1}{4}\pi$ ist. Die Reihe (6.) convergirt unter den erwähnten drei Reihen am raschesten, und die Ausdrücke (5.) oder eigentlich $\Phi - \lambda^0(\Phi)$, $\Phi - \lambda^1(\Phi)$, $\Phi - \lambda^2(\Phi)$, $\Phi - \lambda^3(\Phi)$ etc. sind gerade die auf einander folgenden Summen der ersten Glieder der Reihe (6.). Setzt man $\frac{1}{2}\pi - \Phi$ für Φ, so erhält man

$$\lambda^3(\tfrac{1}{2}\pi - \Phi) = \tfrac{1}{2}\pi - \Phi - \cos\Phi\sin\Phi - \tfrac{2}{3}\cos^3\Phi\sin\Phi - \frac{2.4}{3.5}\cos^5\Phi\sin\Phi \quad \text{und}$$

$$\lambda^3(\tfrac{1}{2}\pi + \Phi) = \tfrac{1}{2}\pi + \Phi + \cos\Phi\sin\Phi + \tfrac{2}{3}\cos^3\Phi\sin\Phi + \frac{2.4}{3.5}\cos^5\Phi\sin\Phi,$$

woraus durch Addition $\lambda^3(\frac{1}{2}\pi - \Phi) + \lambda^3(\frac{1}{2}\pi + \Phi) = \pi$ folgt. Ganz eben so zeigt man, dafs überhaupt

$$7. \quad \lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi - \Phi) + \lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi + \Phi) = \pi,$$

und wenn man r unendlich grofs nimmt, auch

$$\lambda(\tfrac{1}{2}\pi - \Phi) + \lambda(\tfrac{1}{2}\pi + \Phi) = \pi \text{ ist; und da } \lambda(\tfrac{1}{2}\pi - \Phi) = 0,$$

so ist auch $\lambda(\frac{1}{2}\pi + \Phi) = \pi$, wenn Φ positiv und zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist. Aufserdem ist noch $\lambda(\pi) = \pi$. Setzt man in der Gleichung (7.) $\frac{1}{2}\pi - \Phi$ für Φ, so erhält man

$$\lambda^r(\pi - \Phi) + \lambda^r(\Phi) = \pi, \text{ also}$$

$$\lambda^r(\pi + \Phi) = \pi + \lambda^r(\Phi), \text{ folglich überhaupt}$$

$$8. \quad \lambda^r(n\pi + \Phi) = n\pi + \lambda^r(\Phi),$$

wo n eine ganze Zahl bezeichnet. Nimmt man r unendlich, so hat man

$$9. \quad \lambda(n\pi + \Phi) = n\pi.$$

Zusatz. Da $\partial\lambda^r(\Phi) = \frac{2.4.6....(2r)}{1.3.5....(2r-1)}.\sin^{2r}\Phi.\partial\Phi$ ist, so erhält man, wenn man $\frac{1}{2}\pi - \Phi$ für Φ setzt,

$$\partial\Phi.\cos^{2r}\Phi = -\frac{1.3.5....(2r-1)}{2.4.6....(2r)}.\partial\lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi - \Phi).$$

Integrirt man also, so entsteht

$$\int_0 \partial\Phi.\cos^{2r}\Phi = \frac{1.3.5....(2r-1)}{2.4.6....(2r)}.(\text{const.} - \lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi - \Phi)).$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite für $\Phi = 0$ verschwinden soll, so erhält man const. $= \lambda^r(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi$ und also

$$\int_0 \partial\Phi.\cos^{2r}\Phi = \frac{1.3.5....(2r-1)}{2.4.6....(2r)}.(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi - \Phi)).$$

Anmerkung. Wegen der zahlreichen Anwendungen, welche von den Functionen $\lambda^1(\Phi)$, $\lambda^2(\Phi)$, $\lambda^3(\Phi)$, $\lambda^4(\Phi)$ u. s. w. gemacht, und wegen der Leichtigkeit, mit welcher ihre Werthe nach den Formeln (5.) berechnet werden können, wäre es sehr zweckmäfsig, wenn Tabellen da-

von verfertigt würden, zumal da diese eine leichte Interpolation gestatten werden, und es nicht nöthig sein wird, die Zunahmen der Amplitude Φ sehr klein anzunehmen. Weiter unten werden die erwähnten Functionen in noch wichtigeren Beziehungen zur Anwendung kommen; wodurch das Bedürfnifs solcher Tafeln noch fühlbarer werden wird.

§. 102.

Ausdrücke der Quadranten K und E durch den Modul k und die Gröfse $\theta = \arcsin(k)$.

Setzen wir in den Formeln (1.), (2.) und (3.) des §. 99. jetzt $\mathrm{am}\, u = \frac{1}{2}\pi$, so verwandelt sich u in K, $\mathrm{el}\, u$ in E; ferner ist $\lambda^1(\mathrm{am}\, u) = \lambda^2(\mathrm{am}\, u) = \lambda^3(\mathrm{am}\, u)$ etc. $= \frac{1}{2}\pi$. Hiernach haben wir also die Reihen:

1. $K = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(1 + \frac{1^2}{2^2}.k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}.k^8 + \text{etc.}\right)$,

2. $E = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}.k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}.k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}.k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}.k^8 - \text{etc.}\right)$,

3. $K - E = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}.k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}.k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}.k^8 + \text{etc.}\right)$.

Setzt man in diesen Formeln $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich, nach dem Zusatze 2. zu §. 31., der Quadrant K in $k'K$ und nach §. 68. verwandelt sich E in $\frac{E}{k'}$; daher erhalten wir noch

4. $k'K = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{k^2}{k'^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{k^4}{k'^4} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{k^6}{k'^6} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\cdot\frac{k^8}{k'^8} - \text{etc.}\right)$,

5. $\frac{E}{k'} = \frac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{k^2}{k'^2} - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}\cdot\frac{k^4}{k'^4} + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{k^6}{k'^6} - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}\cdot\frac{k^8}{k'^8} - \text{etc.}\right)$.

Diese Reihen convergiren nicht so rasch als die vorigen, da $\frac{k}{k'} > k$ ist.

Zusatz. Setzt man $k = \sin\theta$, also $k' = \cos\theta$; ferner $\theta' + \theta = \frac{1}{2}\pi$, also $k = \cos\theta'$ und $k' = \sin\theta'$: so ist $\lambda = \frac{k - ik'}{k + ik'} = e^{-2\theta' i}$. Setzt man aber $\lambda = \frac{k - ik'}{k + ik'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich nach §. 50. der Quadrant K in $\frac{1}{2}\frac{(K - iK')}{k - ik'} = \frac{1}{2}\frac{(K - iK')}{e^{-\theta' i}}$. Macht man diese Substitution in der Gleichung (1.), so erhält man

$$K - iK' = \pi\left(e^{-\theta' i} + \frac{1^2}{2^2}.e^{-5\theta' i} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.e^{-9\theta' i} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.e^{-13\theta' i} + \text{etc.}\right).$$

Da nun überhaupt $e^{-n\theta' i} = \cos(n\theta') - i\sin(n\theta')$ ist, so erhält man zwei Reihen; die eine reelle ist $= K$, die andere, mit i multiplicirte, ist $= -iK'$: daher ist

$$K = \pi\left(\cos\theta' + \frac{1^2}{2^2}\cos 5\theta' + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cos 9\theta' + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cos 13\theta' + \text{etc.}\right) \text{ und}$$

$$K' = \pi\left(\sin\theta' + \frac{1^2}{2^2}\sin 5\theta' + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\sin 9\theta' + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\sin 13\theta' + \text{etc.}\right).$$

Vertauscht man also θ' mit θ, so verwandelt sich die eine Reihe in die andere; wie es auch sein mufs. Führt man nun wieder θ ein, so erhält man

$$K = \pi\left(\sin\theta + \frac{1^2}{2^2}\sin 5\theta + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\sin 9\theta + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\sin 13\theta + \text{etc.}\right),$$

worin $\theta = \arcsin(k)$ ist. Es versagt diese Reihe indessen, wenn man $\theta = 0$ setzt; denn für $\theta = 0$ (also auch $k = 0$) müfste $K = \frac{1}{2}\pi$ werden, und die Reihe giebt $K = 0$. Ueberhaupt wird man wegen der langsamen Convergenz dieser nur zwischen den Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = \frac{1}{2}\pi$ gültigen Reihe keinen Gebrauch von ihr machen können.

Aus diesem Grunde übergehen wir auch die Herleitung einer ähnlichen Reihe für den Quadranten E.

Anmerkung. Auch die Convergenz der Reihen (1.) und (2.) wird schwach, wenn sich der Modul k der Grenze Eins nähert. Setzen wir wirklich $k = 1$, so ist nach G. T. d. P. F. §. 62. $\frac{2}{\pi}$ die Grenze, welcher sich die numerischen Coefficienten in der Reihe (1.) ohne Ende nähern. Einen höhern Grad der Kleinheit erreichen sie also nicht, und nur so ist es auch erklärlich, dafs die Summe jener Reihe, oder K selbst, unendlich wird, wenn man $k = 1$ setzt. Die Convergenz der Reihe (2.) ist etwas rascher, wenn $k = 1$ gesetzt wird.

§. 103.

Reihe für den Quadranten K', welche desto rascher convergirt, je gröfser der Modul k' dieses Quadranten ist.

Da nach §. 56., wenn der Modul k' wenig von Eins verschieden ist, der Quadrant K' durch die Formel

$$K' = \log\frac{4}{k} + \tfrac{1}{2}\log\sqrt{(1-k^2)}$$

ausgedrückt wird, so kann man schliefsen, dafs der allgemeine Ausdruck von K' durch k die folgende Form haben werde:

$$K' = P.\log\frac{4}{k} + Q,$$

wenn man sich nemlich unter P und Q Functionen von k in der Gestalt unendlicher Reihen vorstellt, welche so beschaffen sind, dafs $P = 1$ und $Q = 0$ wird, wenn man $k = 0$ setzt. Sehen wir K' als eine Function des Mo-

duls k an, so haben wir die Differenzial-Gleichung (11.) im §. 92.

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 K'}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial K'}{\partial k}-K'=0$$

anzuwenden und darin den fingirten Ausdruck von K' zu substituiren. Durch Differenziiren finden wir

$$\frac{\partial K'}{\partial k}=\frac{\partial P}{\partial k}\log\frac{4}{k}+\frac{\partial Q}{\partial k}-\frac{P}{k} \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 K'}{\partial k^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}\log\frac{4}{k}+\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2}-\frac{2}{k}.\frac{\partial P}{\partial k}+\frac{P}{k^2}.$$

Durch Substitution erhalten wir also die Gleichung

$$\left[(1-k^2).\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial P}{\partial k}-P\right].\log\frac{4}{k}$$

$$+(1-k)^2.\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial Q}{\partial k}-Q+(1-k^2)\left(\frac{P}{k^2}-\frac{2}{k}.\frac{\partial P}{\partial k}\right)-\frac{(1-3k^2)}{k^2}P=0.$$

Setzen wir den Coeffizienten von $\log\frac{4}{k}$ für sich $=0$, so entstehen die beiden Gleichungen

1. $(1-k^2).\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial P}{\partial k}-P=0,$

2. $(1-k^2).\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial Q}{\partial k}-Q+2P-\frac{2(1-k^2)}{k}.\frac{\partial P}{\partial k}=0;$

welche aber auch zur Bestimmung von P und Q hinreichen.

Da der ersten Gleichung gemäfs P als Function von k eben so von diesem Modul abhängt, wie der Gleichung (3.) im §. 91. gemäfs K von demselben Modul, so schliefst man, dafs $P=a.K$ sein werde, wenn durch a eine Constante vorgestellt wird. Da aber für $k=0$ $P=1$ werden soll, und der Quadrant $K=\frac{1}{2}\pi$ wird, so ist

$$1=a.\tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{oder} \qquad a=\frac{1}{\frac{1}{2}\pi},$$

und also

$$P=\frac{K}{\frac{1}{2}\pi}=\frac{1}{\eta}.$$

Substituiren wir die Reihe (1.) im §. 102., so erhalten wir

$$\frac{1}{\eta}=P=1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8+\text{etc.},$$

und dieselbe Reihe kann auch leicht mittelst der Gleichung (1.) hergeleitet werden. Setzen wir der Kürze wegen

$$^1a=\frac{1^2}{2^2}, \qquad ^2a=\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}, \qquad ^3a=\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \text{ etc.},$$

so dafs

$2^2.\overset{1}{a} = 1^2$, $4^2.\overset{2}{a} = 3^2.\overset{1}{a}$, $6^2.\overset{3}{a} = 5^2.\overset{2}{a}$, $8^2.\overset{4}{a} = 7^2.\overset{3}{a}$, $10^2.\overset{5}{a} = 9^2.\overset{4}{a}$ etc.

ist, so ist

$$P = 1 + \overset{1}{a}k^2 + \overset{2}{a}k^4 + \overset{3}{a}k^6 + \overset{4}{a}k^8 + \text{etc.}$$

Wären die drei ersten Glieder der Gleichung (2.) für sich $= 0$, so könnte man schliefsen, dafs Q nur um einen constanten Factor von P verschieden sei. Da übrigens Q für $k = 0$ selbst $= 0$ werden soll, und wie man leicht übersieht, nach Potenzen von k^2 ebenfalls fortschreitet, so setzen wir

$$Q = \overset{1}{a}\overset{1}{\nu}k^2 + \overset{2}{a}\overset{2}{\nu}k^4 + \overset{3}{a}\overset{3}{\nu}k^6 + \overset{4}{a}\overset{4}{\nu}k^8 + \overset{5}{a}\overset{5}{\nu}k^{10} + \text{etc.}$$

Substituiren wir diese Reihe und ihre Differenziale in den drei ersten Gliedern der Gleichung (2.), so erhalten wir, nach einer leichten Reduction,

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial Q}{\partial k} - Q$$

$$= \overset{1}{\nu} + 3^2\overset{1}{a}(\overset{2}{\nu} - \overset{1}{\nu})k^2 + 5^2\overset{2}{a}(\overset{3}{\nu} - \overset{2}{\nu})k^4 + 7^2\overset{3}{a}(\overset{4}{\nu} - \overset{3}{\nu})k^6 + 9^2\overset{4}{a}(\overset{5}{\nu} - \overset{4}{\nu})k^8 + \text{etc.}$$

Ferner erhalten wir durch die Substitution der Reihe P den Ausdruck

$$2P - \frac{2(1-k^2)}{k}.\frac{\partial P}{\partial k} = 1 + \frac{3}{2}\overset{1}{a}.k^2 + \frac{5}{3}\overset{2}{a}.k^4 + \frac{7}{4}\overset{3}{a}.k^6 + \frac{9}{5}\overset{4}{a}.k^8 + \text{etc.}$$

und der Gleichung (2.) gemäfs ist

$$\overset{1}{\nu} = -1;\quad \overset{2}{\nu} = \overset{1}{\nu} - \frac{2}{3.4};\quad \overset{3}{\nu} = \overset{2}{\nu} - \frac{2}{5.6};\quad \overset{4}{\nu} = \overset{3}{\nu} - \frac{2}{7.8};\ \text{etc.};$$

woraus folgt:

$$\overset{1}{\nu} = -1,$$
$$\overset{2}{\nu} = -\left(1 + \frac{2}{3.4}\right),$$
$$\overset{3}{\nu} = -\left(1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{5.6}\right),$$
$$\overset{4}{\nu} = -\left(1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{5.6} + \frac{2}{7.8}\right)$$
etc.

Werden diese, nach einem einfachen Gesetze fortschreitenden Ausdrücke substituirt, so erhalten wir die folgende Reihe:

$$K' = \frac{2K}{\pi}.\log\left(\frac{4}{k}\right) - \frac{1^2}{2^2}k^2 - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left(1+\frac{2}{3.4}\right).k^4 - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\left(1+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{5.6}\right).k^6$$
$$- \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}.\left(1+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{5.6}+\frac{2}{7.8}\right).k^8$$
$$- \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}.\left(1+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{5.6}+\frac{2}{7.8}+\frac{2}{9.10}\right).k^{10}$$
$$- \text{etc.},$$

welche aber, wenn der Modul k nicht sehr klein ist, nur langsam con-

vergirt. In dieser Gestalt, oder doch in nur wenig anderer, hat *Legendre* die Reihe aufgestellt. Man kann aber dieselbe durch Umordnung ihrer Glieder leicht so gestalten, dafs sie für jeden Modul k, welcher <1 ist, rasch, und zwar schneller noch als die Reihe (1.) im §. 102. selbst, convergirt. Lösen wir nemlich die Klammern in den auf das Anfangsglied folgenden Gliedern auf, so erhalten wir

$$K' = \frac{2K}{\pi}.\log\left(\frac{4}{k}\right) - \left(\frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{2}{3.4}\left(\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{2}{5.6}\left(\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}k^{10} + \text{etc.}\right)$$
$$- \text{etc.}$$

und die hier eingeklammerten unendlichen Reihen lassen sich summiren, oder doch auf eine einzige zurückbringen. Diese Reihe ist die oben für P gefundene. Wir setzen

$$\mathfrak{K} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4_2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}k^{10} + \text{etc.};$$

ferner setzen wir die Summen der ersten Glieder dieser Reihe

$$\mathfrak{K}_1 = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2,$$
$$\mathfrak{K}_2 = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4,$$
$$\mathfrak{K}_3 = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6,$$
$$\mathfrak{K}_4 = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8$$

u. s. w.

Alsdann nähern sich die Gröfsen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ etc. der Grenze $\mathfrak{K}$, und es ist

$$\mathfrak{K} = \frac{2K}{\pi}, \text{ oder umgekehrt}$$

$$K = \frac{\pi}{2}.K \text{ und}$$

$$K' = \mathfrak{K}.\log\left(\frac{4}{k}\right) - (\mathfrak{K}-1) - \frac{2}{3.4}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_1) - \frac{2}{5.6}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_2)$$
$$- \frac{2}{7.8}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_3) - \frac{2}{9.10}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_4) - \text{etc.}$$

Aus den successiven Summen der ersten Glieder der Reihe $\mathfrak{K}$ also lassen sich hiernach beide Quadranten K und K' mit ungefähr gleichem Grade der Convergenz der Reihen berechnen. Die Convergenz der Reihe für K' ist noch etwas gröfser wegen der Coefficienten $\frac{2}{3.4}$, $\frac{2}{5.6}$, $\frac{2}{7.8}$ etc. ihrer Glieder. Alle Modular-Quadranten lassen sich also hiernach berechnen, indem man k als zwischen den Grenzen 0 und $\sqrt{\frac{1}{2}}$ enthalten ansieht. Ist der Quadrant K nach der Formel $K = \frac{1}{2}\pi . \mathfrak{K}$ berechnet worden, so ist die Berechnung des Quadranten K' nach der vorstehenden Formel sehr bequem und einfach, da man, indem man die Glieder der Reihe $\mathfrak{K}$ berechnet, zugleich die Werthe von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ etc. erhält.

§. 104.

Reihe für den Quadranten E', welche desto rascher convergirt, je gröfser sein Modul k' ist.

Es kann die gesuchte Reihe für den Quadranten E' augenblicklich aus der für den Quadranten K' gefundenen Reihe

$$K' = \frac{2K}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right) - \left(\frac{2K}{\pi} - 1\right) - \frac{2}{3.4}\left(\frac{2K}{\pi} - \mathfrak{K}_1\right) - \frac{2}{5.6}\left(\frac{2K}{\pi} - \mathfrak{K}_2\right) - \frac{2}{7.8}\left(\frac{2K}{\pi} - \mathfrak{K}_3\right) - \text{etc.}$$

hergeleitet werden. Da nemlich nach §. 93.

$$E' = k^2 K' - (k - k^3) . \frac{\partial K'}{\partial k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E - k'^2 K}{k - k^3}$$

ist, so erhalten wir

$$(k - k^3) . \frac{\partial K'}{\partial k} = \frac{2(E - k'^2 K)}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right) - \frac{2Kk'^2}{\pi} - \frac{2}{\pi}(E - k'^2 K) - \frac{2}{3.4}\left(\frac{2}{\pi}(E - k'^2 K) - (k - k^3)\frac{\partial \mathfrak{K}_1}{\partial k}\right) - \frac{2}{5.6}\left(\frac{2}{\pi}(E - k'^2 K) - (k - k^3)\frac{\partial \mathfrak{K}_2}{\partial k}\right) - \text{etc.}$$

und da

$$k^2 . K' = \frac{2Kk^2}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right) - \left(\frac{2Kk^2}{\pi} - k^2\right) - \frac{2}{3.4}\left(\frac{2Kk^2}{\pi} - k^2\mathfrak{K}_1\right) - \frac{2}{5.6}\left(\frac{2Kk^2}{\pi} - k^2\mathfrak{K}_2\right) - \text{etc.}$$

ist, so findet sich, wenn von dieser Reihe die vorige subtrahirt wird,

$$E' = \frac{2(K-E)}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{2Kk'^2}{\pi} - \left(\frac{2(K-E)}{\pi} - k^2\right)$$
$$- \frac{2}{3.4}\left(\frac{2(K-E)}{\pi} + (k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_1}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_1\right)$$
$$- \frac{2}{5.6}\left(\frac{2(K-E)}{\pi} + (k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_2}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_2\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(\frac{2(K-E)}{\pi} + (k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_3}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_3\right)$$
$$- \text{etc.}$$

Der Ausdruck gestattet noch manche Reductionen. Es ist zunächst, wie in §. 103.,

$$\mathfrak{K}_r = 1 + \overset{1}{a}k^2 + \overset{2}{a}k^4 + \overset{3}{a}k^6 \ldots + \overset{r}{a}k^{2r},$$

also

$$\frac{\partial \mathfrak{K}_r}{\partial k} = 2\overset{1}{a}k + 4\overset{2}{a}k^3 + 6\overset{3}{a}k^5 \ldots + 2r.\overset{r}{a}k^{2r-1},$$

also

$$(k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_r}{\partial k} = 2\overset{1}{a}k^2 + 4\overset{2}{a}k^4 + 6\overset{3}{a}k^6 \ldots + 2r.\overset{r}{a}k^{2r}$$
$$- 2\overset{1}{a}k^4 - 4\overset{2}{a}k^6 \ldots - (2r-2)^{r-1}\overset{r-1}{a}.k^{2r} - 2r\overset{r}{a}k^{2r+2}$$

und

$$-k^2.\mathfrak{K}_r = -k^2 - \overset{1}{a}k^4 - \overset{2}{a}k^6 \ldots - \overset{r-1}{a}.k^{2r} - \overset{r}{a}k^{2r+2};$$

folglich ist

$$(k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_r}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_r = -(1-2\overset{1}{a})k^2 - (3\overset{1}{a} - 4\overset{2}{a})k^4 - (5\overset{2}{a} - 6\overset{3}{a})k^6 \ldots.$$
$$\ldots - ((2r-1)\overset{r-1}{a} - 2r\overset{r}{a})k^{2r} - (2r+1)\overset{r}{a}k^{2r+2}.$$

Da aber überhaupt $(2r)^2.\overset{r}{a} = (2r-1)^2.\overset{r-1}{a}$ und also $2r.\overset{r}{a} = \frac{(2r-1)^2}{2r}.\overset{r-1}{a}$ ist, so ist $(2r-1)\overset{r-1}{a} - 2r\overset{r}{a} = \frac{2r-1}{2r}.\overset{r-1}{a}$ und also

$$(k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_r}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_r$$
$$= -\left(\tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 \ldots + \frac{1^2.3^2.5^2 \ldots (2r-3)^2\,(2r-1)}{2^2.4^2.6^2 \ldots (2r-2)^2.2r}k^{2r}\right)$$
$$- \frac{1^2.3^2.5^2.7^2 \ldots (2r-1)^2.(2r+1)}{2^2.4^2.6^2.8^2 \ldots (2r)^2}k^{2r+2}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung $\frac{2(K-E)}{\pi} = t$, so ist rückwärts

$$E = K - \tfrac{1}{2}\pi.t,$$

und nach §. 102. ist

$$t = \tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}k^8 + \text{etc.}$$

Diesen Werth als bekannt vorausgesetzt, haben wir

$$E' = t.\log\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{2k'^2.K}{\pi} - t - \frac{2}{3.4}(t - \tfrac{1}{2}k^2) - \frac{2}{5.6}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6\right) - \text{etc.}$$
$$+ k^2 + \frac{2k^4}{2^2.4} + \frac{2.1^2.3^2}{2^2.4^2.6}k^6 + \frac{2.1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8}k^8 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}k^{10} + \text{etc.}$$

Substituirt man nun auch noch für $\frac{2k'^2 K}{\pi}$ die Reihe

$$1 - \frac{3k^2}{2^2} - \frac{1^2.7k^4}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.11}{2^2.4^2.6^2}k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.15}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 - \frac{1^2\,3^2.5^2.7^2.19}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}k^{10} + \text{etc.},$$

so erhalten wir den mehr reducirten Ausdruck

$$E' = t.\log\left(\frac{4}{k}\right) + 1 - t - \frac{2}{3.4}(t - \tfrac{1}{2}k^2) - \frac{2}{5.6}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6\right) - \text{etc.}$$
$$+ \frac{1.k^2}{2^2} + \frac{1^2.k^4}{2^2.4^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.},$$

welcher leicht auch also dargestellt werden kann:

$$E' = t.\log\left(\frac{4}{k}\right) + 1 - (t - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}k^2) - \frac{2}{3.4}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3}{2^2.4}k^4\right)$$
$$- \frac{2}{5.6}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 - \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}k^8\right)$$
$$- \text{etc.}$$

Setzen wir also noch

$$t_1 = \tfrac{1}{2}.\frac{k^2}{2},$$
$$t_2 = \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3}{2^2.4}k^4,$$
$$t_3 = \tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6,$$
$$t_4 = \tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}k^8,$$
$$t_5 = \tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 + \frac{1^2.3^2\,5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}k^8 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}k^{10}$$

u. s. w.

so nähern sich auch diese Ausdrücke ohne Ende dem Werthe $\mathfrak{L}$, und wir haben

$$E' = t.\log\left(\frac{4}{k}\right) + 1 - (t-t_1) - \frac{2}{3.4}(t-t_2) - \frac{2}{5.6}(t-t_3) - \frac{2}{7.8}(t-t_4) - \frac{2}{9.10}(t-t_5) - \text{etc.};$$ so wie

$$E = K - \tfrac{1}{2}\pi.t.$$

Berechnet man nach dieser Formel den Quadranten E, so ist die Berechnung des Quadranten E' nach der vorigen Formel sehr einfach.

§. 105.

Andere Reihen für u und $\mathrm{el}\,u$, welche nach Potenzen von k und $\frac{k}{k'}$ fortschreiten.

Die im §. 99. entwickelten Reihen können auch also dargestellt werden:

1. $$u = \mathrm{am}\,u + \frac{1^2}{2^2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u)k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\left(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u\right)k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\left(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4.6}{3.5.7}\mathrm{sn}^7 u\,\mathrm{cn}\,u\right)k^8 + \text{etc.},$$

2. $$\mathrm{el}\,u = \mathrm{am}\,u - \frac{1}{2^2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u)k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\left(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u\right)k^6 - \text{etc.},$$ und

3. $$u - \mathrm{el}\,u = \tfrac{1}{2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u)k^4 + \frac{1^2\,3^2.5}{2^2.4^2.6}\left(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2\,4}{3.5}\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u\right)k^6 + \text{etc.}$$

Man wird diese Reihen zur Berechnung von u und $\mathrm{el}\,u$ dann anwenden, wenn die Amplitude φ dieselbe bleiben, der Modul k aber sich ändern soll, weil dann auch alle Coefficienten der Potenzen von k in diesen Reihen dieselben bleiben, und also bei jeder neuen Berechnung immer wieder

gebraucht werden können. Die Convergenz dieser Reihen vermindert sich aber, wenn das Argument u gröfser und gröfser genommen wird. Wird $u > \frac{1}{2}K$, so wird man sofort $K-u$ für u setzen; dadurch verwandelt sich $\operatorname{am} u$ in $\operatorname{amc} u = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} u)$, und es ist nun also $\operatorname{amc} u$ beträchtlich geringer; $\operatorname{el} u$ verwandelt sich nun in

$$\operatorname{elc} u = E - \operatorname{el} u + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u.$$

Setzen wir also $\operatorname{amc} u = \psi$ und $\operatorname{am} u = \varPhi$, so haben wir $\operatorname{tang}\psi . \operatorname{tang}\varPhi = \frac{1}{k'}$ und

$$4.\quad \begin{cases} u = K - \psi - \frac{1^2}{2^2}\lambda^1(\psi)k^2 - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\lambda^2(\psi).k^4 - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\psi).k^6 - \text{etc.} \\ \operatorname{el} u = E + k^2 \sin\varPhi \sin\psi - \psi + \frac{1}{2^2}\lambda^1(\psi).k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4^2}\lambda^2(\psi).k^4 \\ \qquad\qquad + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\lambda^3(\psi).k^6 + \text{etc.} \\ u - \operatorname{el} u = K - E - k^2 \sin\varPhi \sin\psi - \frac{1}{2}\lambda^1(\psi)k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}\lambda^2(\psi)k^4 \\ \qquad\qquad - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\lambda^3(\psi)k^6 + \text{etc.} \end{cases}$$

Diese Reihen convergiren um desto rascher, je gröfser u wird. Denn je gröfser $\varPhi = \operatorname{am} u$ genommen wird, desto kleiner wird ψ, und desto rascher nähern sich also die Gröfsen $\lambda^1(\psi)$, $\lambda^2(\psi)$, $\lambda^3(\psi)$, $\lambda^4(\psi)$ etc. der Grenze Null. Diese Formeln verfehlen nur dann ihren Zweck, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden ist, weil, der Formel $\operatorname{tang}\psi = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\varphi}$ gemäfs, dann ψ dennoch eine beträchtliche Gröfse haben kann.

Setzen wir in den Formeln (1.), (2.), (3.) $k'u$ für u und $\frac{ik}{k'}$ statt k, so verwandelt sich $\operatorname{am} u$ in $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u$; ferner $\operatorname{el} u$ in $\frac{E - \operatorname{elc} u}{k'}$; daher erhalten wir sofort noch

$$5.\quad \begin{cases} k'.u = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u - \frac{1^2}{2^2}\lambda^1(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^2}{k'^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\lambda^2(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^4}{k'^4} \\ \qquad - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^6}{k'^6} + - \text{etc.} \\ \frac{E - \operatorname{elc} u}{k'} = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u + \frac{1}{2^2}\lambda^1(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^2}{k'^2} - \frac{1^2.3}{3^2.4^2}\lambda^2(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^4}{k'^4} \\ \qquad - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^6}{k'^6} - + \text{etc.} \end{cases}$$

Setzen wir in der Formel (1.) ui für u und k' für k, so erhalten wir, da $\operatorname{am}'(ui) = i\,\mathfrak{Am}'u = i\,\mathfrak{L}\operatorname{am} u$ ist, sogleich

6. $$u = \text{Lam}\,u + \frac{1^2}{2^2}\left(\text{Lam}\,u - \frac{\text{tn}\,u}{\text{cn}\,u}\right)k'^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left(\text{Lam}\,u - \frac{\text{tn}\,u}{\text{cn}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tn}^3\,u}{\text{cn}\,u}\right)k'^4$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\left(\text{Lam}\,u - \frac{\text{tn}\,u}{\text{cn}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tn}^3\,u}{\text{cn}\,u} - \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\text{tn}^5\,u}{\text{cn}\,u}\right)k'^6$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\left(\text{Lam}\,u - \frac{\text{tn}\,u}{\text{cn}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tn}^3\,u}{\text{cn}\,u} - \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\text{tn}^5\,u}{\text{cn}\,u} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{\text{tn}^7\,u}{\text{cn}\,u}\right)k'^8$$
$$+ \text{etc.}$$

Dieser Formel bedient man sich mit Vortheil, wenn der Modul k der gegebenen Amplitude $\text{am}\,u$ wenig von Eins verschieden und das Argument $u < \frac{1}{2}K$ ist. Die eingeklammerten Coefficienten nähern sich, wenn $\text{am}\,u < \frac{1}{4}\pi$ ist, ebenfalls der Grenze Null, was fast auf dieselbe Art bewiesen werden kann, wie die Formel $\lambda(\Phi) = 0$ im §. 100. bewiesen worden ist. Jene Coefficienten sind übrigens abwechselnd negativ und positiv. Da $u - \mathfrak{El}'u = \text{el}\,u - \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u$ nach §. 70. ist, so verwandelt sich die Formel (3.) in

7. $$\text{el}\,u = \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u + \frac{1}{2}\left(\text{Lam}\,u - \frac{\text{tn}\,u}{\text{cn}\,u}\right)k'^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}\left(\text{Lam}\,u - \frac{\text{tn}\,u}{\text{cn}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tn}^3\,u}{\text{cn}\,u}\right)k'^4$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\left(\text{Lam}\,u - \frac{\text{tn}\,u}{\text{cn}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tn}^3\,u}{\text{cn}\,u} - \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\text{tn}^5\,u}{\text{cn}\,u}\right)k'^6 + \text{etc.}$$

und auch diese Formel ist zweckmäfsig, wenn k grofs und das Argument $u < \frac{1}{2}K$ ist.

Ist das Argument $u > \frac{1}{2}K$, also $K - u < \frac{1}{2}K$, so bedient man sich am besten der Formel

8. $$u = K - \text{Lamc}\,u - \frac{1^2}{2^2}\left(\text{Lamc}\,u - \frac{\text{tnc}\,u}{\text{cnc}\,u}\right)k'^2 - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left(\text{Lamc}\,u - \frac{\text{tnc}\,u}{\text{cnc}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tnc}^3\,u}{\text{cnc}\,u}\right)k'^4$$
$$- \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\left(\text{Lamc}\,u - \frac{\text{tnc}\,u}{\text{cnc}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tnc}^3\,n}{\text{cnc}\,u} - \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\text{tnc}^5\,u}{\text{cnc}\,u}\right).k'^6$$
$$- \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\left(\text{Lamc}\,u - \frac{\text{tnc}\,u}{\text{cnc}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tnc}^3\,u}{\text{cnc}\,u} - \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\text{tnc}^5\,u}{\text{cnc}\,u} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{\text{tnc}^7\,u}{\text{cnc}\,u}\right).k'^6$$
$$- \text{etc.},$$

wenn der Modul k wenig von Eins verschieden ist.

Setzen wir auch in der Formel (7.) $K - u$ für u, so erhalten wir, da $\text{el}\,u = E - \text{elc}\,u + k^2\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u$, und $\text{tnc}\,u\,\text{dnc}\,u - k^2\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u = \frac{\text{dn}\,u}{\text{tn}\,u}$ $= \frac{k'^2.\text{tnc}\,u}{\text{dnc}\,u}$ ist, die Reihe

9. $$\text{el}\,u = E - \frac{\text{dn}\,u}{\text{tn}\,u} - \frac{1}{2}\left(\text{Lamc}\,u - \frac{\text{tnc}\,u}{\text{cnc}\,u}\right).k'^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}\left(\text{Lamc}\,u - \frac{\text{tnc}\,u}{\text{cnc}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tnc}^3\,u}{\text{cnc}\,u}\right)k'^4$$
$$- \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\left(\text{Lamc}\,u - \frac{\text{tnc}\,u}{\text{cnc}\,u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{tnc}^3\,u}{\text{cnc}\,u} - \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\text{tnc}^5\,u}{\text{cn}\,u}\right)k'^6 - \text{etc.},$$

welche dann zur Berechnung von el u dient, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden und das Argument $u > \frac{1}{2}K$ ist, die Reihe (7.) also nicht mehr rasch genug convergirt.

Wie die Quadranten K und E unter diesen Umständen zu berechnen sind, ist in §. 103. — §. 105. umständlich gezeigt worden.

Zusatz. Es ist $\partial \operatorname{el} u = \operatorname{dn}^2 u . \partial u = \frac{k'^2 . \partial u}{\operatorname{dnc}^2 u}$. Setzt man nun $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u$, so ist $\partial \varphi = \partial u . \operatorname{dnc} u$, also $\partial u = \frac{\partial \varphi}{\operatorname{dnc} u}$: folglich ist $\partial \operatorname{el} u = k'^2 . \frac{\partial \varphi}{\operatorname{dnc}^3 u} = \frac{k'^2 . \partial \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{snc}^2 u)^3}} = \frac{k'^2 . \partial \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \cos^2 \varphi)^3}}$. Da nun

$$(1 - k^2 \cos^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2} k^2 \cos^2 \varphi + \frac{3.5}{2.4} k^4 \cos^4 \varphi + \frac{3.5.7}{2.4.6} k^6 \cos^6 \varphi + \ldots .$$

ist, so erhält man, wenn man diese Reihe mit $k'^2 . \partial \varphi$ multiplicirt und integrirt:

$$\operatorname{el} u = k'^2 (\varphi + \frac{3}{2^2} k^2 (\tfrac{1}{2}\pi - \lambda'(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)) + \frac{3^2.5}{2^2.4^2} k^4 (\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi))$$
$$+ \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2} k^6 (\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)) + \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} . k^8 (\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^4(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)) + \ldots .$$

Für $u = K$ hat man noch die Reihe

$$E = \tfrac{1}{2}\pi . k'^2 \left(1 + \frac{3}{2^2} k^2 + \frac{3^2.5}{2^2.4^2} k^4 + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2} k^6 + \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} k^8 + \ldots\right);$$

daher kann die vorige Reihe auch also dargestellt werden:

1. $$\operatorname{el} u = E - k'^2 \left[\psi + \frac{3}{2^2} k^2 \lambda^1(\psi) + \frac{3^2.5}{2^2.4^2} k^4 \lambda^2(\psi) + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2} k^6 \lambda^3(\psi) + \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} k^8 \lambda^4(\psi) \ldots .\right],$$

wenn man wieder $\psi = \operatorname{amc} u$ setzt. Es kann diese Reihe als eine Umformung der Reihe $\operatorname{el} u = E + k^2 \sin\varphi \sin\psi - \psi + \frac{1}{2^2} k^2 \lambda^1(\psi) + \ldots .$ angesehen werden. Wird wieder $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u$ gesetzt, so folgt aus $\operatorname{el} u = \frac{1}{k'} \int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{k'^2} \sin^2 \varphi\right)^3}}$ noch die Reihe

2. $$\operatorname{el} u = \frac{1}{k'} \left(\varphi - \frac{3}{2^2} \cdot \frac{k^2}{k'^2} \lambda'(\varphi) + \frac{3^2.5}{2^2.4^2} \cdot \frac{k^4}{k'^4} \lambda^2(\varphi) - \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{k^6}{k'^6} \lambda^3(\varphi) + \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} \cdot \frac{k^8}{k'^8} \lambda^4(\varphi) - + \ldots .\right)$$

§. 106.

Reihen zur Berechnung von u und $\mathrm{el}\,u$ aus $\mathrm{am}\,u$, welche zum Theil nach Potenzen von $\mathrm{sn}\,u$ fortschreiten.

Wenn man in der Reihe (1.) des §. 105. die Klammern auflöset, so erhält man

$$u = \mathrm{am}\,u\left(1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8+\text{etc.}\right)$$
$$-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\left(\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6+\text{etc.}\right)$$
$$-\tfrac{2}{3}\,\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u\left(\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6+\text{etc.}\right)$$

u. s. w.

Wenden wir nun dieselbe Bezeichnung an, wie in §. 103., so erhalten wir die Formel

$$1.\quad u = \mathfrak{K}.\mathrm{am}\,u-(\mathfrak{K}-1)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u-\tfrac{2}{3}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_1)\,\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$-\frac{2.4}{3.5}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_2)\,\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{sn}\,u-\frac{2.4.6}{3.5.7}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_3)\,\mathrm{sn}^7 u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$-\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_4)\,\mathrm{sn}^9 u\,\mathrm{cn}\,u-\text{etc.}$$

Diese Reihe hat immer einen hohen Grad der Convergenz und ist vorzüglich dann anzuwenden, wenn der Modul k constant, hingegen $\mathrm{am}\,u$ veränderlich ist. Wird $\mathrm{am}\,u > \mathrm{amc}\,u$, so wird man $K-u$ für u setzen. Dieselben Zahlen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ etc. also, welche zur Berechnung von K und K' dienen, dienen hier auch zur Berechnung von u aus $\mathrm{am}\,u$.

Setzen wir ferner

$$\mathfrak{N}_1 = 1-\frac{1}{2^2}k^2,$$
$$\mathfrak{N}_2 = 1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4,$$
$$\mathfrak{N}_3 = 1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4-\frac{1^3.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6,$$
$$\mathfrak{N}_4 = 1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6-\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8$$

etc., und

$$\mathfrak{N} = 1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6-\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.3^2.6^2.8^2}k^8-\text{etc.},$$

so dafs $E = \frac{1}{2}\pi.\mathfrak{N}$ ist, so finden wir auf ähnliche Art wie vorhin:

$$2.\quad \mathrm{el}\,u = \mathfrak{N}.\mathrm{am}\,u + (1-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u + \tfrac{2}{3}(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u + \frac{2.4}{3.5}(\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\mathfrak{N}_3-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}^7 u\,\mathrm{cn}\,u + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}(\mathfrak{N}_4-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}^9 u\,\mathrm{cn}\,u + \text{etc.}$$

Auch für $u-\mathrm{el}\,u$ läfst sich eine ähnliche Reihe herleiten. Dadurch, dafs man die Sätze des §. 31. anwendet, und ferner, indem man ui für u setzt, lassen sich aus diesen Reihen leicht noch andere herleiten; womit wir uns hier aber nicht aufhalten.

§. 107.

Reihen für u und $\mathrm{el}\,u$, welche nach dem Sinus der vervielfachten Amplitude $\varphi = \mathrm{am}\,u$ fortschreiten.

Wenn man in der Reihe

$$u = \Phi + \frac{1^2}{2^2}\lambda^1(\Phi).k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\lambda^2(\Phi).k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\Phi).k^6 + \text{etc.}$$

für $\lambda^1(\Phi)$, $\lambda^2(\Phi)$, $\lambda^3(\Phi)$ die in §. 100. gefundenen Werthe substituirt, so erhält man eine Reihe von der Form

$$1.\quad \arg\mathrm{am}(\Phi) = \overset{0}{a}.\Phi - \frac{\overset{1}{a}}{1}\sin 2\Phi + \frac{\overset{2}{a}}{2}\sin 4\Phi - \frac{\overset{3}{a}}{3}\sin 6\Phi + \frac{\overset{4}{a}}{4}\sin 8\Phi - \frac{\overset{5}{a}}{5}\sin 10\Phi + - \text{etc.}$$

und die darin vorkommenden Coefficienten sind selbst ausgedrückt durch die Reihen

$$2.\quad \begin{cases} \overset{0}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \overset{1}{a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}k^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{5}{6}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \overset{2}{a} = \frac{2.1}{3.4}\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{3.2}{4.5}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{4.3}{5.6}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \overset{3}{a} = \frac{3.2.1}{4.5.6}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{4.3.2}{5.6.7}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Reihen schreiten nach einem einfachen Gesetze fort; die erste Reihe ist offenbar

$$\overset{0}{a} = \frac{2K}{\pi}.$$

Differenziirt man die Reihe (1.), so erhält man, wenn $\sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)} = \Delta$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{1}{\Delta} = \overset{0}{a} - 2\overset{1}{a}\cos 2\Phi + 2\overset{2}{a}\cos 4\Phi - 2\overset{3}{a}\cos 6\Phi + 2\overset{4}{a}\cos 8\Phi - 2\overset{5}{a}\cos 10\Phi + - \text{etc.}$$

Multiplicirt man diese Reihe mit $\cos 2\Phi$, so erhält man

$$\frac{\cos 2\varphi}{\Delta} = \overset{0}{a}\cos 2\Phi - \overset{1}{a}(1+\cos 4\Phi) + \overset{2}{a}(\cos 2\Phi + \cos 6\Phi) - \overset{3}{a}(\cos 4\Phi + \cos 8\Phi) + - \text{etc.}$$

Hieraus folgt

$$\int_0 \frac{\cos\varphi . \partial\varphi}{\Delta} = \frac{\overset{0}{a}}{2}\sin 2\Phi - \overset{1}{a}\left(\sin\Phi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right) + \overset{2}{a}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right) - \overset{3}{a}\left(\frac{\sin 4\varphi}{4} + \frac{\sin 8\varphi}{8}\right) + \text{etc.}$$

Setzt man nun $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, so wird $\sin 2\Phi = \sin 4\Phi = 6\Phi$ etc. $= 0$ und es bleibt also nur noch die einfache Gleichung

$$\overset{1}{a}.\tfrac{1}{2}\pi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi . \partial\varphi}{\Delta}.$$

Es ist aber $\cos 2\Phi = 1 - 2\sin^2\Phi = 1 - \frac{2}{k^2}.k^2\sin^2\Phi = 1 - \frac{2}{k^2}(1-\Delta^2) = 1 - \frac{2}{k^2} + \frac{2\Delta^2}{k^2}$, also

$$\overset{1}{a}.\tfrac{1}{2}\pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{k^2} - 1\right).\frac{\partial\varphi}{\Delta} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{k^2}.\partial\Phi.\Delta,$$

oder auch

$$\overset{1}{a}.\tfrac{1}{2}\pi = \left(\frac{2}{k^2} - 1\right)K - \frac{2}{k^2}E = \frac{2}{k^2}(K-E) - K,$$

folglich

$$4. \quad \overset{1}{a} = \frac{4}{\pi k^2}(K-E) - \frac{2K}{\pi}.$$

In ähnlicher Weise können auch die folgenden Coefficienten $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, $\overset{4}{a}$ etc. in geschlossenen Ausdrücken angegeben werden. Indessen können diese Coefficienten auch recurrirend aus den beiden vorigen $\overset{0}{a}$ und $\overset{1}{a}$ berechnet werden; die allgemeine Recursions-Formel leiten wir also her. Differenziirt man die vorhin angegebene Reihe für $\frac{1}{\Delta}$ noch einmal, so erhält man

$$\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} = 4\overset{1}{a}\sin 2\Phi - 8\overset{2}{a}\sin 4\Phi + 12\overset{3}{a}\sin 6\Phi - 16\overset{4}{a}\sin 8\Phi + 20\overset{5}{a}\sin 10\Phi - + \text{etc.}$$

Es ist aber $\Delta^2 = 1 - k^2\sin^2\Phi = 1 - \frac{k^2}{2}(1-\cos 2\Phi) = 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2}\cos 2\Phi$ und $\sin\Phi\cos\Phi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$, also ist auch

$$\frac{k^2 \sin 2\varphi}{\triangle(2-k^2+k^2\cos 2\varphi)} = \frac{\sin 2\varphi}{\triangle\left(\frac{2}{k^2}-1+\cos 2\varphi\right)} = 4\overset{1}{a}\sin 2\Phi - 8\overset{2}{a}\sin 4\Phi + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\sin 2\varphi}{\triangle} = \left\{\begin{array}{r} 4n\overset{1}{a}\sin 2\Phi - 8n\overset{2}{a}\sin 4\Phi + 12n\overset{3}{a}\sin 6\Phi - 16n\overset{4}{a}\sin 8\Phi + \text{etc.} \\ + \ 2\overset{1}{a}\sin 4\Phi - \ 4\overset{2}{a}\sin 6\Phi + \ 6\overset{3}{a}\sin 8\Phi - \text{etc.} \\ -\ 4\overset{2}{a}\sin 2\Phi + \ 6\overset{3}{a}\sin 4\Phi - \ 8\overset{4}{a}\sin 6\Phi + 10\overset{5}{a}\sin 8\Phi + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

wenn der Kürze wegen $n = \frac{2}{k^2} - 1$ gesetzt wird. Einen ähnlichen Ausdruck für $\frac{\sin 2\varphi}{\triangle}$ erhalten wir, wenn wir die anfängliche Reihe für $\frac{1}{\triangle}$ noch mit $\sin 2\Phi$ multipliciren, nämlich

$$\frac{\sin 2\varphi}{\triangle} = \overset{0}{a}\sin 2\Phi - \overset{1}{a}\sin 4\Phi + \overset{2}{a}\sin 6\Phi - \overset{3}{a}\sin 8\Phi + - \text{etc.}$$
$$- \overset{2}{a}\sin 2\Phi + \overset{3}{a}\sin 4\Phi - \overset{4}{a}\sin 6\Phi + \overset{5}{a}\sin 8\Phi - + \text{etc.},$$

und da diese beiden Entwicklungen identisch sein müssen, so ist

$$5.\quad \left\{\begin{array}{l} 3\overset{2}{a} = 4\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{1}{a} - 1.\overset{0}{a}, \\ 5\overset{3}{a} = 8\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{2}{a} - 3.\overset{1}{a}, \\ 7\overset{4}{a} = 12\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{3}{a} - 5.\overset{2}{a}, \\ 9\overset{5}{a} = 16\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{4}{a} - 7.\overset{3}{a}, \\ 11\overset{6}{a} = 20\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{5}{a} - 9.\overset{4}{a} \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

Nach diesen einfachen Formeln geht die Berechnung von $\overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \overset{5}{a}$ etc. sehr bequem von Statten. Ueberhaupt ist

$$(2r+1).\overset{r+1}{a} = 4r\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{r}{a} - (2r-1)\overset{r-1}{a}.$$

Die Reihen (2.) zeigen, was aus diesen Recursions-Formeln nicht sogleich ersichtlich ist: dafs die Coefficienten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc. eine rasch convergirende Reihe bilden.

Substituiren wir auch in der Reihe (2.) des §. 99. die Ausdrücke des §. 100., so erhalten wir für el$u$ eine Reihe von der Form

$$6.\quad \text{el}u = \overset{0}{c}.\Phi + \overset{1}{c}\sin 2\Phi - \frac{\overset{2}{c}}{2}\sin 4\Phi + \frac{\overset{3}{c}}{3}\sin 6\Phi - \frac{\overset{4}{c}}{4}\sin 8\Phi$$
$$+ \frac{\overset{5}{c}}{5}\sin 10\Phi - + \text{etc.}$$

Für die hierin vorkommenden Coefficienten selbst haben wir die Reihen

$$7.\quad \begin{cases} \overset{0}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 - \text{etc.} \\ \overset{1}{c} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^4 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^6 + \text{etc.} \\ \overset{2}{c} = \frac{2.1}{3.4}\cdot\frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4 + \frac{3.2}{4.5}\cdot\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{4.3}{5.6}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \overset{3}{c} = \frac{3.2.1}{4.5.6}\cdot\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{4.3.2}{5.6.7}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die erste Reihe kam schon oft vor. Es ist

$$8.\quad \overset{0}{c} = \frac{2E}{\pi}.$$

Die Coefficienten $\overset{0}{c}, \overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \overset{3}{c}$ etc. hangen auf eine ziemlich einfache Weise zusammen mit den Coefficienten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc. Multiplicirt man die anfängliche Reihe für $\frac{1}{\triangle}$ mit $\triangle = \frac{k^2}{2}\left(\frac{2}{k^2} - 1 + \cos 2\varphi\right)$, so erhält man

$$\triangle = \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)(\overset{0}{a} - 2\overset{1}{a}\cos 2\varphi + 2\overset{2}{a}\cos 4\varphi - 2\overset{3}{a}\cos 6\varphi + 2\overset{4}{a}\cos 8\varphi - + \text{etc.})$$
$$+ \frac{k^2}{2}.(\overset{0}{a}\cos 2\varphi - \overset{1}{a}(1 + \cos 4\varphi) + \overset{2}{a}(\cos 2\varphi + \cos 6\varphi)$$
$$- \overset{3}{a}(\cos 4\varphi + \cos 8\varphi) + \text{etc.}))$$

oder

$$\triangle = \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)(\overset{0}{a} - 2\overset{1}{a}\cos 2\varphi + 2\overset{2}{a}\cos 4\varphi - 2\overset{3}{a}\cos 6\varphi + 2\overset{4}{a}\cos 8\varphi - + \text{etc.})$$
$$+ \frac{k^2}{2}(-\overset{1}{a} + \overset{2}{a}\cos 2\varphi - \overset{3}{a}\cos 4\varphi + \overset{4}{a}\cos 6\varphi - \overset{5}{a}\cos 8\varphi + - \text{etc.})$$
$$+ \frac{k^2}{2}\ (\ + \overset{0}{a}\cos 2\varphi - \overset{1}{a}\cos 4\varphi + \overset{2}{a}\cos 6\varphi - \overset{3}{a}\cos 8\varphi + - \text{etc.})$$

Differenziirt man aber die Gleichung (6.), so erhält man auch

$$\triangle = \overset{0}{c} + 2\overset{1}{c}\cos 2\varphi - 2\overset{2}{c}\cos 4\varphi + 2\overset{3}{c}\cos 6\varphi - 2\overset{4}{c}\cos 8\varphi + - \text{etc.},$$

und da diese Reihe mit der vorigen identisch sein mufs, so finden sich die Gleichungen

$$9.\quad \begin{cases} \overset{0}{c} = \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\overset{0}{a} - \frac{k^2}{2}\overset{1}{a}, & 2\overset{3}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{4}{a} + \overset{2}{a}) - 2\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\overset{3}{a}, \\ 2\overset{1}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{2}{a} + \overset{0}{a}) - 2\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\overset{1}{a}, & 2\overset{4}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{5}{a} + \overset{3}{a}) - 2\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\overset{4}{a}, \\ 2\overset{2}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{3}{a} + \overset{1}{a}) - 2\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\overset{2}{a}, & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Noch etwas einfacher sind die Ausdrücke, welche man wie folgt erhält. Differenziirt man die vorige Reihe für Δ, so erhält man $\partial\Delta = \frac{-k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.\partial\varphi$, also

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi} = -\frac{k^2\sin 2\varphi}{2\Delta} = -4\overset{1}{c}\sin 2\Phi + 8\overset{2}{c}\sin 4\Phi - 12\overset{3}{c}\sin 6\Phi + - \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\sin 2\varphi}{\Delta} = \frac{2}{k^2}(4\overset{1}{c}\sin 2\Phi - 8\overset{2}{c}\sin 4\Phi + 12\overset{3}{c}\sin 6\Phi - 16\overset{4}{c}\sin 8\Phi + - \text{etc.})$$

Wird diese Reihe mit der vorigen für $\frac{\sin 2\varphi}{\Delta}$ verglichen, so hat man

10.
$$\begin{cases} 4\overset{1}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{0}{a} - \overset{2}{a}), & 12\overset{3}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{2}{a} - \overset{4}{a}), \\ 8\overset{2}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{1}{a} - \overset{3}{a}), & 16\overset{4}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{3}{a} - \overset{5}{a}) \end{cases}$$

u. s. w.

§. 108.

Entwicklung der Hülfs-Function $\lambda^n(\varphi)$ in eine nach Potenzen von φ fortschreitende Reihe.

Für die folgenden Betrachtungen ist die Kenntnifs der höheren Differenzial-Verhältnisse einer unbestimmten Potenz von $\sin\Phi$, deren Exponent übrigens eine positive ganze Zahl sein soll, nöthig. Erforderliche Ausdrücke dieser Art finden sich bereits in G. T. d. P. F. §. 112., nämlich

$$\frac{\partial^{2r}\sin^n\varphi}{\partial\varphi^{2r}} = S(-1)^\alpha [n]^{2\beta}_{(\beta)} \overset{\alpha}{C}.\sin^{n-2\beta}\Phi \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial^{2r+1}\sin^n\varphi}{\partial\varphi^{2r+1}} = S(-1)^\alpha [n]^{2\beta+1}_{(\beta)} \overset{\alpha}{C}.\sin^{n-2\beta-1}\Phi.\cos\Phi,$$

worin $\alpha+\beta=r$ die gemeinschaftliche Bedingungs-Gleichung der beiden veränderlichen positiven ganzen Zahlen α und β ist. Unter $\overset{\alpha}{C}_{(\beta)}$ wird eine aus den Elementen der Scale

$$(\beta) = [n^2, (n-2)^2, (n-4)^2, \ldots (n-2\beta)^2],$$

welche $\beta+1$ Elemente befafst, bei unbedingter Wiederholbarkeit gebildete Combinations-Classe des αten Grades verstanden.

Setzen wir in der ersten Formel $2n$ für n und dann noch $n+r$ für r, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\partial^{2n+2r}.\sin^{2n}\varphi}{\partial\varphi^{2n+2r}} = (S(-1)^\alpha [2n]^{2\beta}_{(\beta)}.\overset{\alpha}{C}.\sin^{2n-2\beta}\Phi) \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n+r).$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke $\Phi=0$, so ist $\sin^{2n-2\beta}\Phi=0$ für $\beta<n$, aber $=1$ für $\beta=n$, oder $\alpha=r$; daher ist nun

$$\frac{\partial^{2n+2r}.\sin^{2n}\varphi}{\partial\varphi^{2n+2r}} = (-1)^r.(2n)'.\overset{r}{\underset{(n)}{C}}.$$

Die in diesem Ausdrucke geforderte Scale ist

$$(n) = [(2n)^2, (2n-2)^2, \ldots. (2n-2n)^2]$$

und ihr letztes Element also $=0$. Alle Elemente dieser Scale haben den gemeinschaftlichen Factor $2^2=4$; daher kann man diesen Factor absondern, und die einfachere Scale

$$(n) = [1^2, 2^2, 3^2, \ldots. n^2]$$

nehmen, welche die Quadrate der n ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe begreift, wenn man nur $2^{2r}.\overset{r}{\underset{(n)}{C}}$ für das vorige $\overset{r}{\underset{(n)}{C}}$ setzt und die Combinations-Classe nun auf diese neue Scale bezieht. Setzen wir

$$\sin^{2n}\Phi = \Phi^{2n} - A_1.\Phi^{2n+2} + A_2.\Phi^{2n+4} - A_3.\Phi^{2n+6} + A_4.\Phi^{2n+8} - + \text{etc.},$$

so ist nach *Maclaurin's* Satze

$$(-1)^r.A_r = \frac{\partial^{2n+2r}\sin^{2n}\varphi}{(2n+2r)'.\partial\varphi^{2n+2r}} \text{ (für } \Phi=0), \text{ und also}$$

$$A_r = \frac{(2n)'}{(2n+2r)'}.2^{2r}.\overset{r}{\underset{(n)}{C}} = [2n]^{-2\alpha}.4^r.\overset{r}{\underset{(n)}{C}}.$$

Die Substitution dieses Werthes giebt die unendliche Reihe

$$\sin^{2n}\Phi = S(-1)^\alpha [2n]^{-2\alpha}.4^\alpha.\overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}}.\Phi^{2n+2\alpha} \text{ *).}$$

Die Reihen für $\sin^{2n}\Phi$ und $\sin^{2n+1}\Phi$ lassen sich leicht umkehren, wodurch man Reihen für die Potenzen von Φ erhält, welche nach Potenzen von $\sin\Phi$ fortschreiten. Nicht auf diesem Wege sind jene Reihen hergeleitet worden vom Hrn. Prof. *Scherk* in *Crelle's* Journal der Mathematik Band XI., Seite 101.

Multiplicirt man die vorhin gefundene Reihe mit $\partial\Phi$, und integrirt, so entsteht

$$\int_0 \sin^{2n}\Phi.\partial\Phi = S(-1)^\alpha [2n]^{-(2\alpha+1)}.4^\alpha.\overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}}.\Phi^{2n+2\alpha+1}.$$

Da aber nach §. 99.

$$\lambda^n(\Phi) = \frac{n'}{(-1)^n.[-\frac{1}{2}]^n}.\int_0 \sin^{2n}\Phi.\partial\Phi$$

---

*) Für die ungerade Potenz des Sinus erhält man mit Bezugnahme auf die Scale $(n) = [1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots. (2n+1)^2]$ die Reihe

$$\sin^{2n+1}\varphi = S(-1)^\alpha [2n+1]^{2\alpha}.\overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}}.\varphi^{2n+2\alpha+1},$$

und zwar auf ähnliche Weise.

ist, so erhalten wir, wenn wir beachten dafs $[2n^{-(2\alpha+1)}] = \frac{(2n)'}{(2n+2\alpha+1)'}$ und $(2n)' = (-1)^n.n'.2^{2n}.[-\frac{1}{2}^n]$ ist, endlich die Formel

$$\lambda^n(\Phi) = S(-1)^\alpha.n'.n'.2^{2n+2\alpha}.\overset{\alpha}{C}_{(n)}.\frac{\varphi^{2n+2\alpha+1}}{(2n+2\alpha+1)'}.$$

Zusatz. Für die Combinationsklasse $\overset{m}{C}_{(n)}$ läfst sich nach G. T. d. P. F. §. 113 — 115. auch leicht ein analytischer Ausdruck herleiten. Setzt man daselbst nur $m+n$ für m; ferner $a=0$, $\overset{1}{a}=1^2$, $\overset{2}{a}=2^2$, $\overset{3}{a}=3^2$, ... $\overset{\alpha}{a}=\alpha^2$, ... $\overset{n}{a}=n^2$, so ist

$$\overset{\alpha}{\psi}_n = (\alpha^2-0^2)(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-2^2)....(\alpha^2-(\alpha-1)^2).(\alpha^2-(\alpha+1)^2)(\alpha^2-(\alpha+2)^2)... \\ ...(\alpha^2-n^2) \text{ oder}$$

$$\overset{\alpha}{\psi}_n = (-1)^{n-\alpha}.(\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....1)(\alpha(\alpha+1)....(2\alpha-1))(1.2.3....(n-\alpha)) \\ \times((2\alpha+1)(2\alpha+2)....(n+\alpha)) \text{ oder}$$

$$\overset{\alpha}{\psi}_n = (-1)^{n-\alpha}\frac{(n-\alpha)'.(n+\alpha)'}{2} \text{ und also } \overset{m}{C}_{(n)} = 2S(-1)^{n-\alpha}.\frac{\alpha^{2m+2n}}{(n-\alpha)'(n+\alpha)'}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch mit $(2n)'$, um die Brüche unter gleiche Benennung zu bringen, so erhält man

$$\overset{m}{C}_{(n)} = \frac{2}{(2n)'}(S(-1)^\beta.[2n^{\beta}_{\beta'}.\alpha^{2m+2n}) \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n)$$

zum gesuchten analytischen Ausdrucke des Werthes von $\overset{m}{C}_{(n)}$. Alle besonderen Werthe von $\overset{m}{C}_{(n)}$, für welche $m+n$ nicht >10 ist, enthält eine in G. T. d. P. F. §. 71. befindliche Tabelle, woraus ihre Werthe also entnommen werden können. Daselbst ist auch das Rechnungs-Verfahren angegeben, wodurch jene Tabelle leicht beliebig erweitert werden kann.

Zu derselben Formel kann man auch auf folgende Art gelangen: Substituirt man in dem Ausdrucke $\lambda^n(\Phi) = \Phi + S(-1)^\alpha[n^{-\alpha}][n^{\alpha}].\frac{\sin(2\alpha\varphi)}{\alpha}$ (für $\alpha>0$) statt $\sin(2\alpha\Phi)$ die bekannte Reihe $S(-1)^\beta\frac{(2\alpha)^{2\beta+1}.\varphi^{2\beta+1}}{(2\beta+1)'}$, so erhält man

$$\lambda^n(\Phi) = \Phi + 2.S(-1)^{\alpha+\beta}.[n^{\alpha}][n^{-\alpha}].2^{2\beta}.\alpha^{2\beta}.\frac{\varphi^{2\beta+1}}{(2\beta+1)'}.$$

Die Potenzen von Φ, welche niedriger im Grade sind, als Φ^{2n+1}, haben in diesem Ausdrucke jede einen Coefficienten, welcher $=0$ ist; daher darf

man sogleich $n+\beta$ für β setzen, wodurch man erhält:

$$\lambda^n(\Phi) = 2 . S(-1)^{n+\alpha+\beta} . [n]^{\alpha} [n]^{-\alpha} . 2^{2n+2\beta} . \alpha^{2n+2\beta} . \frac{\varphi^{2n+2\beta+1}}{(2n+2\beta+1)'} .$$

Wird diese Reihe für $\lambda^n(\Phi)$ mit der früheren identificirt, so erhält man denselben Ausdruck für $\overset{m}{C}_{(n)}$, wie vorher.

§. 109.

Reihen für $\arg\operatorname{am}(\varphi)$ und $\arg\operatorname{am}(\frac{1}{2}\pi-\varphi)$, welche nach Potenzen von φ fortschreiten.

Aus der im §. 108. für $\lambda^n(\Phi)$ gefundenen Reihe folgt sogleich noch

$$[-\tfrac{1}{2}]^{n}_{n'} . [-\tfrac{1}{2}]^{n}_{n'} . \lambda^n(\Phi) = S(-1)^{\alpha}([1,-2]^{n})^2 . 2^{2\alpha} . \overset{\alpha}{C}_{(n)} . \frac{\varphi^{2n+2\alpha+1}}{(2n+2\alpha+1)'} .$$

Wird diese Reihe mit k^{2n} multiplicirt, und dann selbst als allgemeines Glied einer neuen Reihe, nämlich der für $\arg\operatorname{am}(\Phi)$ dem §. 99. gemäfs angesehen, und zu diesem Ende β für n gesetzt, so erhält man

$$\arg\operatorname{am}(\Phi) = \left[S(-1)^{\alpha}([1,-2]^{\beta})^2 . 4^{\alpha} . \overset{\alpha}{C}_{(\beta)} . k^{2\beta} . \frac{\varphi^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'}\right] \text{ cond. } (\alpha+\beta=\gamma).$$

Man kann diese Reihe einfacher vorstellen unter

$$\arg\operatorname{am}(\Phi) = \Phi + \overset{1}{a} . \frac{\varphi^3}{3'} + \overset{2}{a} . \frac{\varphi^5}{5'} + \overset{3}{a} . \frac{\varphi^7}{7'} + \overset{4}{a} . \frac{\varphi^9}{9'} + \text{etc.},$$

und hat dann zur independenten Bestimmung der Coefficienten in dieser Reihe die allgemeine Formel

$$2. \quad \overset{r}{a} = (S(-1)^{\alpha}[1,-2]^{\beta}[1,-2]^{\beta} . k^{2\beta} . 2^{2\alpha} . \overset{\alpha}{C}_{(\beta)}) \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r)$$

oder auch, in gewöhnlicher Darstellung:

$$\overset{r}{a} = [1,-2]^{r} . k^{2r} - [1,-2]^{r-1} . 4 . \overset{1}{C}_{(r-1)} . k^{2r-2} + [1,-2]^{r-2} . 4^2 . \overset{2}{C}_{(r-2)} . k^{2r-4} \ldots .$$
$$\ldots . (-1)^{r-1} . 4^{r-1} . \overset{r-1}{C}_{(1)} . k^2 .$$

Diese allgemeine Formel giebt die folgende besonderen Ausdrücke:

$$3. \quad \begin{cases} \overset{1}{a} = k^2, \\ \overset{2}{a} = k^2(9k^2-4), \\ \overset{3}{a} = k^2(225k^4-180k^2+16), \\ \overset{4}{a} = k^2(11025k^6-12600k^4+3024k^2-64), \\ \overset{5}{a} = k^2(893025k^8-1323000k^6+529200k^4-48960k^2+256) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche zwar im Fortgange immer mehr zusammengesetzt werden, aber

wegen der Abwechselung der Vorzeichen dennoch nicht sehr grofse Werthe haben.

Für $k=0$ ist $\overset{1}{a}=\overset{2}{a}=\overset{3}{a}=\overset{4}{a}=$ etc. $=0$;

für $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist $\overset{1}{a}=\frac{1}{2}$, $\overset{2}{a}=\frac{1}{4}$, $\overset{3}{a}=-8\frac{7}{8}$, $\overset{4}{a}=-99\frac{7}{16}$ etc.,

für $k=1$ ist $\overset{1}{a}=1$, $\overset{2}{a}=5$, $\overset{3}{a}=61$, $\overset{4}{a}=1385$ etc.

In dem letzten Falle für $k=1$ erhält man also dieselben Coefficienten, welche in G. T. d. P. F. §. 41. berechnet wurden; wie auch sein mufs, da nun $\arg\operatorname{am}(\Phi)=\int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi)}}=\int_0 \frac{\partial\partial}{\cos\varphi}=\S\varphi$ wird.

Für die recurrirende Berechnung der Coefficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}$ etc. findet man leicht die Formel

$$\overset{r}{a}=k^2.\left[(2r-1)[2r]_{2'}.\overset{r-1}{a}-(2r-2)[2r]_{4'}.2^2.\overset{r-2}{a}+(2r-3)[2r]_{6'}.2^4.\overset{r-3}{a}\ldots(-1)^{r-1}r.2^{2r-2}\right],$$

deren Herleitung wir übergehen, weil sie selbst nicht sehr bequem ist.

Setzen wir in der gefundenen Reihe $k'(K-u)$ für $\arg\operatorname{am}(\varphi)$ und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich φ in $\frac{1}{2}\pi-\operatorname{am}u$. Setzen wir nun $\frac{1}{2}\pi-\operatorname{am}u=\varphi$, so ist $\operatorname{am}u=\frac{1}{2}\pi-\varphi$. Verwandeln wir ferner $\overset{r}{a}$ in $(-1)^r.\frac{\overset{r}{a}}{k'^{2r}}$, so erhalten wir

$$k'(K-\arg\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi))=\varphi-\frac{\overset{1}{a}}{k'^2}.\frac{\varphi^3}{3'}+\frac{\overset{2}{a}}{k'^4}.\frac{\varphi^5}{5'}-\text{etc. oder}$$

$$4.\quad \arg\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)=K-\frac{\varphi}{k'}+\frac{\overset{1}{a}}{3'}.\left(\frac{\varphi}{k'}\right)^3-\frac{\overset{2}{a}}{5'}.\left(\frac{\varphi}{k'}\right)^5+\frac{\overset{3}{a}}{7'}.\left(\frac{\varphi}{k'}\right)^7-\frac{\overset{4}{a}}{9'}.\left(\frac{\varphi}{k'}\right)^9+-\text{etc.},$$

und für die in dieser Reihe vorkommenden Coefficienten haben wir die Ausdrücke

$$5.\quad\begin{cases}\overset{1}{a}=k^2,\\ \overset{2}{a}=k^2(9k^2+4k'^2),\\ \overset{3}{a}=k^2(225k^4+180k^2k'^2+16k'^4),\\ \overset{4}{a}=k^2(11025k^6+1260k^4k'^2+3024k^2k'^4+64k'^6),\\ \overset{5}{a}=k^2(893025k^8+1323000k^6k'^2+529200k^4k'^4+48960k^2k'^6+256k'^8)\\ \quad\text{u. s. w.}\end{cases}$$

Diese Reihe convergirt indessen nur dann ziemlich schnell, wenn der Modul k sehr gering und $\frac{\varphi}{k'}$ ein ächter Bruch ist.

§. 110.

Reihen für $\mathrm{el}\,u$, welche nach Potenzen von φ und $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ fortschreiten, wenn $\varphi=\mathrm{am}\,u$ gesetzt wird.

Gehen wir nun von der Formel $\mathrm{el}\,u = S\left[\frac{1}{2}\right]^{\alpha}_{\alpha'}\left[-\frac{1}{2}\right]^{\alpha}_{\alpha'}.\lambda^{\alpha}(\Phi).k^{2\alpha}$ des §. 99. aus, so finden wir, eben so wie vorhin, die Reihe

$$1.\quad \mathrm{el}\,u = \Phi - \overset{1}{a}.\frac{\varphi^3}{3'} + \overset{2}{a}.\frac{\varphi^5}{5'} - \overset{3}{a}.\frac{\varphi^7}{7'} + \overset{4}{a}.\frac{\varphi^9}{9'} - + \text{ etc.},$$

und die in ihr vorkommenden Coefficienten sind ausgedrückt durch die Formel

$$2.\quad \overset{r}{a} = \left(S(-1)^{\beta}\left[-1,-1\right]^{\beta}\left[1,-2\right]^{\beta}.2^{2\alpha}.\overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}}.k^{2\beta}\right)\ \text{cond.}\ (\alpha+\beta=r),$$

woraus man die folgenden besonderen Ausdrücke erhält:

$$3.\quad \begin{cases} \overset{1}{a} = k^2, \\ \overset{2}{a} = k^2(-3k^2+4), \\ \overset{3}{a} = k^2(45k^4-60k^2+16), \\ \overset{4}{a} = k^2(-1575k^6+3520k^4-1008k^2+64), \\ \overset{5}{a} = k^2(99225k^8-189000k^6+105840k^4-16320k^2+256) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Auch diese Ausdrücke werden im Fortgange sehr zusammengesetzt; aber ihre Werthe sind für denselben Modul k immer beträchtlich kleiner, als die Werthe der ähnlichen Ausdrücke (3.) im §. 109. Für $k=0$ ist jeder $=0$, und für $u=1$ ist jeder $=1$. So ist z. B.

$$\overset{5}{a} = 99225-189000+105840-16320+256 = 205321-205320 = +1;$$

dieser Umstand erklärt sich daraus, dafs für $k=1$,

$$\mathrm{el}\,u = \int_0 \partial\Phi.\sqrt{(1-\sin^2\Phi)} = \sin\Phi = \Phi - \frac{\varphi^3}{3'} + \frac{\varphi^5}{5'} - \frac{\varphi^7}{7'} + \text{etc. ist.}$$

Für $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ erhält man

$$\overset{1}{a}=\frac{1}{2},\quad \overset{2}{a}=\frac{5}{4},\quad \overset{3}{a}=\frac{-11}{8},\quad \overset{4}{a}=\frac{1945}{16},\quad \overset{5}{a}=\frac{18221}{32},\quad \text{u. s. w.}$$

Die in der Reihe (1.) vorkommenden Permutations-Zahlen geben ihr einen hohen Grad der Convergenz, zumal wenn $\Phi<1$ ist.

Setzen wir nun $k'(K-u)$ für u und $\frac{ik}{k'}$ für k, so verwandelt sich $\mathrm{el}\,u$ in $\frac{E-\mathrm{el}\,u}{k'}$ und $\varphi = \mathrm{am}\,u$ in $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u = \varphi'$, wenn $\varphi + \varphi' = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt wird. Aendern wir gleichzeitig $\overset{r}{a}$ in $-\frac{\overset{r}{a}}{k'^{2r}}$, so erhalten wir die Reihe

$$\frac{E-\mathrm{el}\,u}{k'} = \varphi' + \frac{\overset{1}{a}}{k'^2}\cdot\frac{\varphi'^3}{3'} - \frac{\overset{2}{a}}{k'^4}\cdot\frac{\varphi'^5}{5'} + - \text{etc.},$$

oder auch

$$4.\quad \mathrm{el}\,u = E - k'^2\left[\frac{\varphi'}{k'} + \frac{\overset{1}{a}}{3'}\cdot\left(\frac{\varphi'}{k'}\right)^3 - \frac{\overset{2}{a}}{5'}\cdot\left(\frac{\varphi'}{k'}\right)^5 + \frac{\overset{3}{a}}{7'}\cdot\left(\frac{\varphi'}{k'}\right)^7 - \frac{\overset{4}{a}}{9'}\cdot\left(\frac{\varphi'}{k'}\right)^9 + \frac{\overset{5}{a}}{11'}\cdot\left(\frac{\varphi'}{k'}\right)^{11} - + \text{etc.}\right],$$

und die in dieser Reihe vorkommenden Coefficienten sind nun ausgedrückt durch die Formeln

$$5.\quad \begin{cases} \overset{1}{a} = k^2, \\ \overset{2}{a} = k^2(3k^2 + 4k'^2), \\ \overset{3}{a} = k^2(45k^4 + 60k^2k'^2 + 16k'^4), \\ \overset{4}{a} = k^2(1575k^6 + 3520k^4k'^2 + 1008k^2k'^4 + 64k'^6), \\ \overset{5}{a} = k^2(99225k^8 + 189000k^6k'^2 + 105840k^4k'^4 + 16320k^2k'^6 + 256k'^8) \\ \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Reihe (4.) convergirt nur dann, wenn $k < \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\frac{\varphi'}{k'} < 1$ ist, ziemlich rasch.

§. 111.

Reihe für u, welche völlig nach Potenzen von $\mathrm{sn}\,u$ fortschreitet.

Setzen wir $\mathrm{sn}\,u = t$, so ist $\partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}$. Da nun aber

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = S(-1)^\alpha\left[-\tfrac{1}{2}\right]_{\alpha'}^{\alpha} t^{2\alpha} \text{ und}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-k^2t^2)}} = S(-1)^\beta k^{2\beta}t^{2\beta}\cdot\left[-\tfrac{1}{2}\right]_{\beta'}^{\beta}$$

ist, so hat das Product beider Reihen die Form

$$S\frac{\overset{\gamma}{a}}{2^\gamma\cdot\gamma'}\cdot t^{2\gamma} = 1 + \frac{\overset{1}{a}}{2}\cdot t^2 + \frac{\overset{2}{a}\cdot t^4}{2.4} + \frac{\overset{3}{a}\cdot t^6}{2.4.6} + \text{etc.},$$

und man findet

$$\overset{r}{a} = (-1)^r . 2^r . r' . (S[-\tfrac{1}{2}]_{\alpha'}^{\alpha}[-\tfrac{1}{2}]_{\beta'}^{\beta} k^{2\beta}) \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Da aber $[-\frac{1}{2}]_{\alpha}^{\alpha} = (-1)^{\alpha}.[1,-2]_{2^{\alpha}.\alpha'}^{\alpha}$ und $[-\frac{1}{2}]_{\beta'}^{\beta} = (-1)^{\beta}.[1,-2]_{2^{\beta}.\beta'}^{\beta}$ ist, so erhalten wir den einfacheren Ausdruck

$$1. \quad \overset{r}{a} = (S[r]_{\alpha'}^{\alpha}[1,-2]^{\alpha}[1,-2]^{\beta}.k^{2\beta}) \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Wird nun die Reihe für $\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}$ noch mit ∂u multiplicirt und dann integrirt, so erhält man

$$2. \quad \arg \operatorname{sn}(t) = S\frac{\overset{\alpha}{a}}{2^{\alpha}.\alpha'}\cdot\frac{t^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'} = t + \frac{\overset{1}{a}}{2}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{\overset{2}{a}}{2.4}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{\overset{3}{a}}{2.4.6}\cdot\frac{t^7}{7} + \text{etc.},$$

und die in dieser Reihe vorkommenden ersten Coefficienten sind

$$3. \quad \begin{cases} \overset{1}{a} = 1+k^2, \\ \overset{2}{a} = 3+2k^2+3k^4, \\ \overset{3}{a} = 15+9k^2+9k^4+15k^6, \\ \overset{4}{a} = 105+60k^2+54k^4+60k^6+105k^8, \\ \overset{5}{a} = 945+525k^2+450k^4+450k^6+525k^8+945k^{10} \\ \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Reihe (2.) convergirt immer; wird aber t oder $\operatorname{sn} u > \operatorname{snc} u$, so wird man $K-u$ für u und also $\frac{\sqrt{(1-t^2)}}{\sqrt{(1-k^2t^2)}}$ für t setzen.

Anmerkung. Man findet leicht, dafs für $k=1$ $\overset{r}{a}=2.4.6....(2r)$ ist; daher ist immer $\frac{a}{2^{\alpha}\alpha'}<1$, wenn $k<1$ ist; woraus erhellet, dafs die Reihe immer convergirt.

§. 112.

Andere Darstellung und Berechnung der Coefficienten in der nach Potenzen von $\operatorname{sn} u$ fortschreitenden Reihe für u.

Da $\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}} = (1-(1+k^2)t^2+k^2t^4)^{-\frac{1}{2}}$ ist, so finden wir leicht eine Formel für die recurrirende Berechnung der Coefficienten in der Reihe des §. 111., indem wir nur die in G. T. d. P. F. §. 105. entwickelte Recursions-Formel auf die Entwicklung der Potenz des vorste-

henden Trinoms anwenden. Wir haben nur $\overset{0}{a}=1$, $\overset{1}{a}=-(1+k^2)$, $\overset{2}{a}=k^2$, $x=t^2$, $\overset{r}{A}=\frac{\overset{r}{a}}{2^r.r'}$, $\overset{r-1}{A}=\frac{\overset{r-1}{a}}{2^{r-1}.(r-1)'}$, $\overset{r-2}{A}=\frac{\overset{r-2}{a}}{2^{r-2}.(r-2)'}$ zu setzen. Führen wir aber diese Substitutionen in der Formel

$$r.\overset{0}{a}\overset{r}{A}=(n-r+1)\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}+(2n-r+2)\overset{2}{a}\overset{r-2}{A}+(3n-r+3)\overset{3}{a}\overset{r-3}{A}+\text{etc.}$$

aus, so erhalten wir die einfache Formel

$$4.\quad \overset{r}{a}=(2r-1)(1+k^2).\overset{r-1}{a}-4(r-1)^2.k^2.\overset{r-2}{a},$$

in deren Anwendung die successiven Coefficienten $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, $\overset{4}{a}$, $\overset{5}{a}$ etc. auch sehr bequem recurrirend berechnet werden können.

Die Entwicklung kann noch auf eine andere Art gemacht werden, wodurch man noch einfachere Ausdrücke für die Coefficienten erhält. Da $(1-t^2)(1-k^2t^2)=1-(1+k^2)t^2+k^2t^4$ ist, so können wir dieses Trinom einstweilen als ein Binom ansehen, und $=1-pt^2$ setzen. Dann ist $p=1+k^2-k^2t^2$. Da nun $(1-pt^2)^{-\frac{1}{2}}=S(-1)^\alpha\left[-\frac{1}{2}\right]^{\alpha}_{\alpha'}p^\alpha t^{2\alpha}$ ist, so hat man in dieser Reihe noch für p den Werth zu substituiren. Es ist aber $p^n=S(-1)^\beta\left[n\right]^{\beta}_{\beta'}(1+k^2)^{n-\beta}.k^{2\beta}t^{2\beta}$ und also

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}=(S(-1)^\gamma\left[-\tfrac{1}{2}\right]^{\alpha}_{\alpha'}\left[\alpha\right]^{\beta}_{\beta'}(1+k^2)^{\alpha-\beta}k^{2\beta}.t^{2\gamma})\ \text{cond.}\ (\alpha+\beta=\gamma).$$

Wird dieses Product mit dem vorigen verglichen, so ist

$$\frac{\overset{r}{a}}{2^r.r'}=(S(-1)^{\alpha+\beta}\left[-\tfrac{1}{2}\right]^{\alpha}_{\alpha'}\left[\alpha\right]^{\beta}_{\beta'}(1+k^2)^{\alpha-\beta}.k^{2\beta})\quad\text{cond.}\ (\alpha+\beta=r).$$

Dieser Ausdruck gestattet noch eine Reduction. Da nämlich $\left[\alpha\right]^{\beta}=0$ ist für $\beta>\alpha$, so kann sogleich $(\alpha+\beta)$ für α gesetzt werden, wodurch man erhält:

$$\frac{\overset{r}{a}}{2^r.r'}=(S(-1)^\alpha\left[-\tfrac{1}{2}\right]^{\alpha+\beta}_{(\alpha+\beta)'}\left[\alpha+\beta\right]^{\beta}_{\beta'}(1+k^2)^\alpha.k^{2\beta})\quad\text{cond.}\ (\alpha+2\beta=r).$$

Setzt man nun $v=\frac{1+k^2}{2k}$, so ist rückwärts $1+k^2=2vk$ und $(1+k^2)^\alpha.k^{2\beta}=(2v)^\alpha.k^r$; ferner ist $\left[\alpha+\beta\right]^{\beta}_{\beta'}=\frac{(\alpha+\beta)'}{\alpha'\beta'}$ und da $\left[-\frac{1}{2}\right]^{\alpha+\beta}=\left[-\frac{1}{2}\right]^{r-\beta}=(-1)^{r-\beta}\left[1,-2\right]^{r-\beta}_{2^{r-\beta}}$ ist, so ist

$$\overset{r}{a}=2^r.r'k^r\left(S(-1)^\beta\left[1,-2\right]^{r-\beta}_{2^{r-\beta}}.\frac{1}{\alpha'\beta'}.(2v)^\alpha\right)\quad\text{cond.}\ (\alpha+2\beta=r),\ \text{oder}$$

$$\overset{r}{a}=(2k)^r.\left(S(-1)^\beta\left[1,-2\right]^{r-\beta}.\left[r\right]^{2\beta}_{2^\beta.\beta'}.v^\alpha\right).$$

Setzt man nun noch $a=(2k)^r.\overset{r}{c}$, so erhalten wir

$$\arg\operatorname{sn}(t) = S\frac{\overset{\alpha}{c}}{\alpha'}.k^\alpha.\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1},$$

oder auch

$$5.\quad \arg\operatorname{sn}(t) = t+\overset{1}{c}.\frac{k}{1}.\frac{t^3}{3}+\frac{\overset{2}{c}k^2}{1.2}.\frac{t^5}{5}+\frac{\overset{3}{c}k^3}{1.2.3}.\frac{t^7}{7}+\frac{\overset{4}{c}k^4}{1.2.3.4}.\frac{t^9}{9}+\text{etc.},$$

und zur Bestimmung der Coefficienten in dieser Reihe dient nun die Formel

$$6.\quad \overset{r}{c} = (S(-1)^\beta.[1,-2\overset{r-\beta}{]}.[\underset{2^\beta.\beta'}{r\overset{2\beta}{]}}.v^\alpha)\quad \text{cond.}\ (\alpha+2\beta=r).$$

Diese Formel hat nicht so viele einzelne Glieder, als die Formel (1.) für $\overset{r}{a}$ in §. 111. Man findet danach die folgenden Ausdrücke:

$$7.\quad \begin{cases} \overset{1}{c} = v, \\ \overset{2}{c} = 3v^2-1, \\ \overset{3}{c} = 15v^3-9v, \\ \overset{4}{c} = 105v^4-90v^2+9, \\ \overset{5}{c} = 945v^5-1050v^3+225v, \\ \overset{6}{c} = 10395v^6-14175v^4+4725v^2-225 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzt man auch in der Recursions-Formel (4.) $1+k^2=2vk$, so wird sie zunächst $\overset{r}{a}=2vk(2r-1).\overset{r-1}{a}-4(r-1)^2k^2.\overset{r-2}{a}$. Setzt man ferner auch hierin $\overset{r}{a}=(2k)^r.\overset{r}{c}$, $\overset{r-1}{a}=(2k)^{r-1}.\overset{r-1}{c}$ und $\overset{r-2}{a}=(2k)^{r-2}.\overset{r-2}{c}$, so verwandelt sie sich in die einfachere:

$$8.\quad \overset{r}{c} = (2r-1).v.\overset{r-1}{c}-(r-1)^2.\overset{r-2}{c}.$$

Zusatz. Differenziirt man den Ausdruck $(v^2-1)^r=S(-1)^\beta[r\overset{\beta}{]}_{\beta'}v^{2r-2\beta}$ nach einander r mal, so erhält man

$$\frac{\partial^r(v^2-1)^r}{\partial v^r} = S(-1)^\beta[2r-2\beta\overset{r}{]}[r\underset{\beta'}{\overset{\beta}{]}}v^{r-2\beta}.$$

Da aber $[2r-2\beta\overset{r}{]}=\frac{(2r-2\beta)'}{(r-2\beta)'}$ und $(2r-2\beta)'=[1,-2\overset{r-\beta}{]}.2^{r-\beta}.(r-\beta)'$; ferner $(r-\beta)'[r\overset{\beta}{]}=r'$ ist, so ist

$$[2r-2\beta\overset{r}{]}.[r\underset{\beta'}{\overset{\beta}{]}} = [1,-2\overset{r-\beta}{]}.\frac{r'}{(r-2\beta)'}.\frac{2^{r-\beta}}{\beta'} = [1,-2\overset{r-\beta}{]}.[\underset{2^\beta.\beta}{r\overset{2\beta}{]}}.2^r,$$

und also

$$\frac{\partial^r (v^2-1)}{2^r . \partial v^r} = (S(-1)^\beta [1,-2]^{r-\beta} . [r]^{2\beta}_{2^\beta . \beta} . v^\alpha) \quad \text{cond. } (\alpha+2\beta=r),$$

oder

$$9. \quad \overset{r}{c} = \frac{\partial^r (v^2-1)^r}{2^r . \partial v^r}.$$

Da $v = \frac{k+\frac{1}{k}}{2}$ ist, so wird v nicht geändert, wenn man den Modul k mit $\frac{1}{k}$ vertauscht. Setzt man $k = \text{tang}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\nu)$, also $k^{-1} = \text{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\nu)$, so ist $v = \frac{1}{\cos\nu}$, und also $v > 1$. Setzt man $\nu = \frac{1}{2}\pi$, also $k = 0$, so ist $v = \frac{1}{0}$; und setzt man $\nu = 0$, also $k = 1$, so ist $v = 1$; daher nimmt v beim Wachsen des Moduls beständig ab, von $\frac{1}{0}$ an bis auf 1.

§. 113.

Reihe für $\text{sn}\, u$, welche nach Potenzen von u fortschreitet.

Aus den Reihen u, welche nach Potenzen von $t = \text{sn}\, u$ fortschreiten, schliefst man, dafs umgekehrt die Reihe für $\text{sn}\, u$ die folgende Form haben werde:

$$\text{sn}\, u = u + b . u^3 + c . u^5 + d . u^7 + \text{etc.},$$

und in Anwendung des Reversions-Problems könnte man auch die Coefficienten in dieser Reihe aus den Coefficienten der Reihe im §. 111. oder §. 112. herleiten. Es läfst sich indessen ein ziemlich bequemes recurrirendes Verfahren ermitteln, wodurch man die erste und dritte Potenz der Reihe für $\text{sn}\, u$ zugleich erhält. Nach §. 62. ist

$$\frac{\partial^2 \text{sn}\, u}{\partial u^2} = -(1+k^2)\, \text{sn}\, u + 2k^2 . \text{sn}^3 u.$$

Diese Gleichung wird am einfachsten, wenn man $x = u\sqrt{(2k)}$ und $z = \sqrt{(2k)} . \text{sn}\, u$ setzt. Nun ist $\partial u = \frac{\partial x}{\sqrt{(2k)}}$ und $\partial^2 \text{sn}\, u = \frac{\partial^2 z}{\sqrt{(2k)}}$, also

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sqrt{(2k)} = -(1+k^2) . \frac{z}{\sqrt{(2k)}} + 2k^2 . \frac{z^3}{\sqrt{(2k)^3}},$$

folglich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -v . z + \frac{z^3}{2},$$

wenn man wieder $v = \frac{1+k^2}{2k}$ setzt. Wenn man in der obigen Reihe ebenfalls $\frac{x}{\sqrt{(2k)}}$ für u setzt, dann mit $\sqrt{(2k)}$ multiplicirt, und z für

$\sqrt{(2k)}.\operatorname{sn} u$ setzt, so wird das Anfangsglied der Reihe für z gerade $= x$, so dafs wir setzen können:

$$z = x - \overset{1}{a}.\frac{x^3}{3'} + \overset{2}{a}.\frac{x^5}{5'} - \overset{3}{a}.\frac{x^7}{7'} + \overset{4}{a}.\frac{x^9}{9'} - \overset{5}{a}.\frac{x^{11}}{11'} + - \text{ etc. und}$$

$$z^2 = x^3 - \overset{1}{c}.\frac{x^5}{3'} + \overset{2}{c}.\frac{x^7}{5'} - \overset{3}{c}.\frac{x^9}{7'} + \overset{4}{c}.\frac{x^{11}}{9'} - \overset{5}{c}.\frac{x^{13}}{13'} + - \text{ etc.}$$

Werden diese Reihen in der vorigen Differenzial-Gleichung substituirt, so findet man für ihre Coefficienten die einfache Relation

$$1. \quad \overset{r+1}{a} = r(2r+1).\overset{r-1}{c} + v.\overset{r}{a}.$$

Sind nun in der Reihe für z bereits die Coefficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{r}{a}$ berechnet, so läfst sich in der Reihe für z^3 der Coefficient $\overset{r+1}{c}$ berechnen. Hieraus findet sich, der Formel (1.) gemäfs, der nächste Coefficient $\overset{r+1}{a}$, und es läfst sich also die Rechnung immer weiter fortsetzen. Dem Polynomial-Theoreme gemäfs findet man aber

$$2. \quad \overset{r}{c} = \frac{4-r}{r}.[2r+1\overset{2}{]}_{3'}.\overset{1}{a}\,\overset{r-1}{c} + \frac{8-r}{r}.[2r+1\overset{4}{]}_{5'}.\overset{2}{a}\,\overset{r-2}{c} + \frac{12-r}{r}.[2r+1\overset{6}{]}_{7'}.\overset{3}{a}\,\overset{r-3}{c} \ldots + 3.\overset{r}{a}.$$

Durch die combinirte Anwendung der Formeln (1.) und (2.) erhält man die gesuchten Coefficienten, oder die Reihe

$$3. \quad \operatorname{sn} u = u - \frac{v(2k)}{3'}u^3 + \frac{v^2+3}{5'}(2k)^2.u^5 - \frac{v^3+33v}{7'}(2k)^3.u^7 + \frac{v^4+306v^2+189}{9'}(2k)^4.u^9 - \frac{v^5+2766v^3+8289v}{11'}(2k)^5.u^{11} + - \text{ etc.}$$

Zusatz. Hebt man aus dieser Reihe die Glieder $u - \frac{(2vk).u^3}{3'} + \frac{(2vk)^2.u^5}{5'} - \frac{(2vk)^3.u^7}{7'} + -$ etc. hervor, so bilden sie für sich eine Reihe, welche summirt werden kann. Multiplicirt man dieselbe nämlich mit $\sqrt{(1+k^2)} = \sqrt{(2vk)}$, so ist das Product gerade $= \sin(u\sqrt{(1+k^2)})$ und also jene Reihe $= \frac{\sin(u\sqrt{(1+k^2)})}{\sqrt{(1+k^2)}}$. Werden die übrigen Glieder hinzugefügt, so ist

$$\operatorname{sn} u = \frac{\sin(u\sqrt{(1+k^2)})}{\sqrt{(1+k^2)}} + \frac{3}{5'}(2k)^2.u^5 - \frac{33v}{7'}(2k)^3.u^7 + \frac{306v^2+189}{9'}(2k)^4.u^9 - \frac{2766v^3+8289v}{11'}(2k)^6.u^{11} + - \text{ etc.},$$

und diese Reihe convergirt noch rascher als die vorige.

§. 114.

Reihen für $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ und $\mathrm{am}\,u$, welche nach Potenzen des Argumentes u fortschreiten.

Aus der Reihe für $\mathrm{sn}\,u$ §. 113. schliefst man, dafs die Reihe für $\mathrm{cn}\,u$ die folgende Form haben werde:

$$\mathrm{cn}\,u = 1 - \overset{1}{a}\cdot\frac{u^2}{2'} + \overset{2}{a}\cdot\frac{u^4}{4'} - \overset{3}{a}\cdot\frac{u^6}{6'} + \overset{4}{a}\cdot\frac{u^8}{8'} - + \text{etc.}$$

Da nun nach §. 62. $\frac{\partial^2 \mathrm{cn}\,u}{\partial u^2} = -\mathrm{cn}\,u + 2k^2(\mathrm{cn}\,u - \mathrm{cn}^3 u)$ ist, so nehmen wir noch eine Reihe von der Form

$$\mathrm{cn}^3 u = 1 - \overset{1}{c}\cdot\frac{u^2}{2'} + \overset{2}{c}\cdot\frac{u^4}{4'} - \overset{3}{c}\cdot\frac{u^6}{6'} + \overset{4}{c}\cdot\frac{u^8}{8'} - + \text{etc.}$$

Substituiren wir die beiden Reihen in der angegebenen Differenzial-Gleichung, so erhalten wir die einfache Relation

$$\overset{r+1}{a} = \overset{r}{a} + 2k^2(\overset{r}{c} - \overset{r}{a}).$$

Aufserdem erhält man nach dem Polynomial-Theoreme die Gleichung

$$\overset{r}{c} = \frac{4-r}{r}\cdot[2r]_{2'}\overset{2}{a}\overset{r-1}{c} + \frac{8-r}{r}\cdot[2r]_{4'}\overset{4}{a}\overset{r-2}{c} + \frac{12-r}{r}\cdot[2r]_{6'}\overset{6}{a}\overset{r-3}{c} \ldots + 3\cdot\overset{r}{a}.$$

Die Rechnung nach diesen beiden Formeln ist ziemlich bequem, und man findet

$$\begin{aligned}
1.\quad \mathrm{cn}\,u = 1 &- \frac{u^2}{2'} + \frac{1+4k^2}{4'}\cdot u^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6'}u^6 \\
&+ \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{8'}\cdot u^8 \\
&- \frac{1+3688k^2+30768k^4+15808k^6+256k^8}{10'}\cdot u^{10} \\
&+ \frac{1+33212k^2+870640k^4+1538560k^6+259328k^8+1024k^{10}}{12'}\cdot u^{12} \\
&- + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Nach §. 30. erhält man hieraus sogleich für die Differente noch die Reihe

$$\begin{aligned}
2.\quad \mathrm{dn}\,u = 1 &- \frac{k^2u^2}{2'} + \frac{k^2(k^2+4)}{4'}\cdot u^4 - \frac{k^2(k^4+44k^2+16)}{6'}\cdot u^6 \\
&+ \frac{k^2(k^6+408k^4+912k^2+64)}{8'}\cdot u^8 \\
&- \frac{k^2(k^8+3688k^6+30768k^4+15808k^2+256)}{10'}\cdot u^{10} \\
&+ \frac{k^2(k^{10}+33212k^8+870640k^6+1538560k^4+259328k^2+1024)}{12'}\cdot u^{12} \\
&- + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Wird diese Reihe noch mit ∂u multiplicirt und integrirt, so erhält man sofort

$$3.\quad \mathrm{am}\,u = u - \frac{k^2}{3'}.u^3 + \frac{k^2(k^2+4)}{5'}.u^5 - \frac{k^2(k^4+44k^2+16)}{7'}.u^7$$
$$+ \frac{k^2(k^6+408k^4+912k^2+64)}{9'}.u^9$$
$$- \frac{k^2(k^8+3688k^6+30768k^4+15808k^2+256)}{11'}.u^{11}$$
$$+ \frac{k^2(k^{10}+33212k^8+870640k^6+1538560k^4+259328k^2+1024)}{13'}.u^{13}$$
$$- + \text{etc.}$$

Zusatz 1. Die Reihe für $\mathrm{cn}\,u$ kann offenbar auch also dargestellt werden:

$$8.\quad \mathrm{cn}\,u = \cos u + \frac{4k^2}{4'}.u^4 - \frac{44k^2+16k^4}{6'}.u^6 + \frac{408k^2+912k^4+64k^6}{8'}.u^8$$
$$- \frac{3688k^2+30768k^4+15808k^6+256k^8}{10'}.u^{10}$$
$$+ \frac{33212k^2+870640k^4+1538560k^6+259328k^8+1024k^{10}}{12'}.u^{12}$$
$$- + \text{etc.}$$

Hebt man aber die Glieder $1 - \frac{u^2}{2'} + \frac{4k^2}{4'}u^4 - \frac{16k^4}{6'}u^6 \ldots = x$ hervor, so ist

$(x-1).4k^2+1 = 1 - \frac{2^2k^2u^2}{2'} + \frac{2^4k^4u^4}{4'} - \frac{2^6k^6u^6}{6'} + - \text{etc.} = \cos(2ku)$, also $(x-1).4k^2 = -(1-\cos(2ku)) = -2\sin^2(ku)$, folglich $1-x = \frac{\sin^2(ku)}{2k^2}$, oder $x = 1 - \frac{\sin^2(ku)}{2k^2}$. Es ist demnach auch

$$5.\quad \mathrm{cn}\,u = 1 - \frac{\sin^2(ku)}{2k^2} + \frac{1}{4'}.u^4 - \frac{1+44k^2}{6'}.u^6 + \frac{1+408k^2+912k^4}{8'}.u^8$$
$$- \frac{1+3688k^2+30768k^4+15808k^6}{10'}.u^{10}$$
$$+ \frac{1+33212k^2+870640k^4+1538560k^6+259328k^8}{12'}.u^{12}$$
$$- + \text{etc.}$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man nach §. 30. leicht auch für $\mathrm{dn}\,u$, und wenn man sie mit ∂u multiplicirt und integrirt, so erhält man

$$6.\quad \mathrm{am}\,u = \frac{\sin(ku)}{k} + \frac{4k^2}{5'}.u^5 - \frac{k^2(44k^2+16)}{7'}.u^7 + \frac{k^2(408k^4+912k^2+64)}{9'}.u^9$$
$$- \frac{k^2(3688k^6+30768k^4+15808k^2+256)}{11'}.u^{11} + - \text{etc.},$$

$$7.\quad \mathrm{am}\,u = \left(1-\frac{k^2}{4}\right)u + \frac{k^2}{4}\sin(2u) + \frac{k^4}{5'}.u^5 - \frac{k^2(k^4+44k^2)}{7'}.u^7$$
$$+ \frac{k^2(k^6+408k^4+912k^2)}{9'}.u^9$$
$$- \frac{k^2(k^8+3688k^6+30768k^4+15808k^2)}{11'}.u^{11}$$
$$+ \frac{k^2(k^{10}+33212k^8+870640k^6+1538560k^4+259328k^2)}{13'}.u^{13}$$
$$- + \text{etc.}$$

Diese Reihe hat unfehlbar einen höheren Grad der Convergenz, als die vorige.

Zusatz 2. Setzt man in der Formel (3.) $k'u$ für u und $\frac{ik}{k'}$ für k, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u = k'u + \frac{k'k^2}{3'}u^3 - \frac{k'k^2(-k^2+4k'^2)}{5'}u^5 + \text{etc.},$$

also ist

$$8.\quad \mathrm{amc}\,u = \tfrac{1}{2}\pi - k'\left(u + \frac{k^2}{3'}u^3 - \frac{k^2(4k'^2-k^2)}{5'}u^5 + \frac{k^2(16k'^4-44k^2k'^2+k^4)}{7'}u^7\right.$$
$$\left. - \frac{k^2(64k'^6-912k^2k'^4+408k^4k'^2-k^6)}{9'}u^9 + - \text{etc.}\right).$$

Aus den Formeln (6.) und (7.) können ähnliche Ausdrücke für $\mathrm{amc}\,u$ hergeleitet werden, welche noch rascher convergiren.

Ueberhaupt läfst sich die Anzahl solcher nach Potenzen von u fortschreitender Reihen leicht noch ansehnlich vermehren.

§. 115.

Die sieben ersten Glieder der Reihen für $\mathrm{el}\,u$ und $\mathrm{lm}\,u$, welche nach Potenzen von u fortschreiten.

Multiplicirt man die Reihe (3.) des §. 113. mit sich selbst, so erhält man, wenn wieder $v = \frac{1+k^2}{2k}$ ist,

$$\mathrm{sn}^2u = u^2 - \frac{2^4kv}{4'}u^4 + \frac{2^4k^2(8v^2+9)}{6'}u^6 - \frac{2^8k^3(4v^3+27v)}{8'}u^8$$
$$+ \frac{2^9k^4(16v^4+486v^2+189)}{10'}u^{10} - \frac{2^{11}.k^5(131v^5+7596v^3+16659v)}{12'}u^{12}$$
$$+ - \text{etc.}$$

Wird diese Reihe mit k^2 multiplicirt und dann von Eins subtrahirt, so entsteht

$$\mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2 u^2 + \frac{2^4 k^3 v}{4'} u^4 - \frac{2^4 k^4 (8v^2+9)}{6'} u^6 + \frac{2^8 k^5 (4v^3+27v)}{8'} u^8$$
$$- \frac{2^9 k^6 (16v^4+486v^2+189)}{10'} u^{10} + \frac{2^{11} k^7 (131v^5+7596v^3+16659v)}{12'} u^{12}$$
$$- + \text{etc.}$$

Multiplicirt man also mit ∂u und integrirt, so erhält man

$$\mathrm{el}\, u = u - \frac{2k^2 u^3}{5'} + \frac{2^4 k^3 v}{5'} u^5 - \frac{2^4 k^4 (8v^2+9)}{7'} u^6 + \frac{2^8 k^5 (4v^3+27v)}{9'} u^9$$
$$- \frac{2^9 k^6 (16v^4+486v^2+189)}{11'} u^{11} + \frac{2^{11} k^7 (131v^5+7596v^3+16659v)}{13'} u^{13}$$
$$- + \text{etc.}$$

Wird diese Reihe aufs Neue mit ∂u multiplicirt, und dann integrirt, so erhält man endlich

$$\mathrm{lm}\, u = \frac{u^2}{2} - \frac{2k^2 . u^4}{4'} + \frac{2^4 k^3 . v}{6'} . u^6 - \frac{2^4 k^4 (8v^2+9)}{8'} . u^8 + \frac{2^8 k^5 (4v^3+27v)}{10'} . u^{10}$$
$$- \frac{2^9 k^6 . (16v^4+486v^2+189)}{12'} . u^{12} + \frac{2^{11} k^7 . (131v^5+7596v^3+16659v)}{14'} . u^1$$
$$- + \text{etc.}$$

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

3.

Sur la décomposition d'une certaine classe de fonctions.

(Par Mr. *Chr. Jürgensen*, de Copenhague.)

La décomposition des fractions rationnelles est connue depuis longtemps; mais personne, que je sache, n'a encore essayé d'opérer quelque chose de semblable pour les fractions irrationelles correspondantes, c'est-à-dire les fractions de la forme

$$Fx = \frac{P}{Q},$$

P étant une fonction rationnelle et entière, et Q une fonction de la forme

$$(x-a_1)^{1-\mu_1}(x-a_2)^{1-\mu_2}(x-a_3)^{1-\mu_3}\ldots.(x-a_n)^{1-\mu_n},$$

où $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots. \mu_n$ sont des quantités comprises entre zéro et l'unité. C'est cependant ce qu'on peut faire facilement, au moyen du calcul des différentielles à indices quelconques, développé dans les excellents mémoires de Mr. *Liouville*, qu'on trouve dans le journal de l'école polytechnique cah. 21. et dans le 11me et 12me vol. de ce journal. On retrouve en effet par la recherche même de la décomposition mentionnée, les formules fondamentales de ce calcul. Pour le faire voir, je vais d'abord établir les théorèmes sur les fractions rationnelles de la manière suivante. Soit

$$fx = \frac{X}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)},$$

X étant une fonction entière de x du dégré $n+p$; soit $x-a_i$ un quelconque des facteurs du dénominateur et $(x-a_i)fx = \varphi_i x$; soit enfin $H(\psi t)$ le coefficient de $\frac{1}{t}$ dans le développement d'une fonction ψt suivant les puissances déscendantes de t. Cela posé, on aura

$$1. \quad fx = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi_i a_i}{x-a_i} + H\left[\frac{ft}{t-x}\right].$$

Pour le démontrer il n'y a qu'à supposer

$$fx = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots. + \frac{A_n}{x-a_n} + B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots. + B_{p-1} x + B_p.$$

Faisant disparaitre les dénominateurs et posant alternativement $x = a_1$, $x = a_2$, $\ldots.$ $x = a_n$ on trouve

$$A_i = \varphi_i a_i.$$

Remarquant ensuite, que $B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_{p-1} x + B_p$ sont les $p+1$ premières termes du développement de fx suivant les puissances descendantes de x, on a, en y changeant x en t et multipliant par

$$\frac{1}{t-x} = \frac{1}{t} + \frac{x}{t^2} + \frac{x^2}{t^3} + \ldots,$$

$$B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_{p-1} x + B_p = H\left[\frac{ft}{t-x}\right].$$

A présent, si l'on différentie un nombre quelconque de fois les deux membres de l'équation (1.) par rapport à chacune des quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$, ou en tire sans difficulté le théorème plus général que voici. Si l'on fait

$$Fx = \frac{X}{(x-a_1)^{1+\mu_1}(x-a_2)^{1+\mu_2}\ldots(x-a_n)^{1+\mu_n}},$$

X étant une fonction entière de degré quelconque, et $\varphi_i = (x-a_i)^{1+\mu_i}.Fx$, on a

$$2. \quad Fx = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^{\mu_i}\left(\frac{\varphi_i a_i}{x-a_i}\right)}{1.2.3\ldots\mu_i.\partial a_i^{\mu_i}} + H\left[\frac{Ft}{t-x}\right].$$

Au moyen de la formule (1.) on simplifie considérablement la démonstration du théorème de l'illustre *Abel* (Tome 3. p. 314 de ce journal) et on parvient en même temps à un théorème encore plus général, qu'il a indiqué dans une lettre imprimé Tome 6. p. 78 et suiv.

Pour le faire voir, je donne d'abord à l'équation (1.) la forme

$$\frac{fx}{\varphi x} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{fa_i}{(x-a_i)\varphi_i a_i} + H\left[\frac{ft}{(t-x)\varphi t}\right],$$

f et φ étant deux fonctions entières de degré quelconque et $\varphi_i x$ désignant la fonction $\frac{\varphi x}{x-a_i}$, φx étant supposée $= A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Maintenant, si l'on considère les coefficiens dans fx, ainsi que les quantités $A, a_1, a_2, \ldots a_n$ comme des fonctions d'une autre variable y, on a

$$\varphi_i a_i = -\left(\frac{\partial \varphi x}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial a_i} \quad \text{lorsqu'on y fait} \quad x = a_i$$

de sorte qu'en posant pour abréger $\frac{\partial \varphi x}{\partial y} = \varphi' x$ on a

$$\frac{fx}{\varphi x} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{fa_i}{(a_i-x)\varphi' a_i}.\frac{\partial a_i}{\partial y} + H\left[\frac{ft}{(t-x)\varphi t}\right],$$

d'où l'on tire en intégrant par rapport à y

$$3. \quad \int \frac{fx}{\varphi x}\partial y = \sum_{i=1}^{i=n} \int \frac{fa_i}{(a_i-x)\varphi' a_i}.\frac{\partial a_i}{\partial y}\partial y + H\left[\int \frac{ft.\partial y}{(t-x)\varphi t}\right] + C,$$

où C ne depend pas de y.

Soient maintenant πx et $\psi x = pq$ deux fonctions entières des x seul, r et s deux fonctions de x et y, mais entières par rapport à x. Cela posé, si l'on suppose

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{2\pi x\left[r\frac{\partial s}{\partial y} - s\frac{\partial r}{\partial y}\right]}{pr^2 - qs^2},$$

on a, en remarquant que

$$\left(\frac{\partial \varphi x}{\partial y}\right) = 2\left[pr\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) - qs\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)\right]$$

et que $x = a_i$ donne $pr^2 - qs^2 = 0$, donc

$$pr = \pm s\sqrt{(\psi a_i)}, \quad qs = \pm r\sqrt{(\psi a_i)};$$

$$\frac{fa_i}{\varphi' a_i} = \mp \frac{\pi a_i}{\sqrt{(\psi a_i)}};$$

valeur qui étant substituée dans l'équation (3.) donne le premier des théorèmes dont nous parlons.

En donnant à la fonction $\frac{fx}{\varphi x}$ une forme un peu différente, on voit tout de suite comment on peut parvenir au théorème plus général. En effet, supposons $p = 1$, donc $q = \psi x$, écrivons r_0 et r_1 au lieu de r et s et faisons

$$\theta_0 = r_0 + r_1\sqrt{q}, \qquad \theta_1 = r_0 + \alpha r_1\sqrt{q},$$

1 et α étant les deux racines de l'équation $x^2 - 1 = 0$.

Cela posé, on aura en faisant $\left(\frac{\partial \theta_0}{\partial y}\right) = \theta'_0$, $\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y}\right) = \theta'_1$,

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{\pi x}{\sqrt{q}}\left[\frac{\theta'_0}{\theta_0} + \alpha\frac{\theta'_1}{\theta_1}\right],$$

ou bien

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{\pi x}{\sqrt{(\psi x)}}\left[\frac{\theta'_0\theta_1 - \theta'_1\theta_0}{\theta_0\theta_1}\right],$$

donc

$$\frac{fa_i}{\varphi' a_i} = \frac{\pi a_i}{\sqrt{(\psi a_i)}}\left[\frac{\theta'_0\theta_1 - \theta'_1\theta_0}{\theta'_0\theta_1 + \theta'_1\theta_0}\right],$$

où l'on doit faire dans les fonctions θ et θ', $x = a_i$, ce qui fait évanouir θ_0 ou θ_1; partant

$$\frac{fa_i}{\varphi' a_i} = \varepsilon\frac{\pi a_i}{\sqrt{(\psi a_i)}},$$

ε étant $= +1$ ou -1 selon que $\theta_0 = 0$ ou $\theta_1 = 0$. Cette règle à été donnée par *Abel* lui même dans le mémoire cité.

A présent il est facile de passer au théorème général. Si l'on observe en effet, qu'en désignant par λx une fraction rationnelle, dont le développement en série soit

$$\lambda x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.$$

et par $1, \alpha, \alpha^2, \ldots. \alpha^{m-1}$ les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$, on a

$$\lambda(x) + \alpha^{-\mu}\lambda(\alpha x) + \alpha^{-2\mu}\lambda(\alpha^2 x) + \ldots. + \alpha^{-(m-1)\mu}\lambda(\alpha^{m-1}x)$$
$$= m x^{\mu}(A_{\mu} + A_{m+\mu}x^m + A_{2m+\mu}x^{2m} + \ldots.)$$

(voir p. ex. Tome 6. p. 196, 197 de ce journal), et si l'on représente par θ_k la fonction rationnelle et entière en $q^{\frac{1}{m}}$

$$r_0 + \alpha^k r_1 q^{\frac{1}{m}} + \alpha^{2k} r_2 q^{\frac{2}{m}} + \ldots. + \alpha^{(m-1)k} r_{m-1} q^{\frac{m-1}{m}},$$

$r_0, r_1, r_2, \ldots. r_{m-1}$ étant des fonctions de x et y, mais rationnelles et entières en x, et $q = \psi x$ comme ci-dessus, on voit que la fonction

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{\pi x}{q^{\frac{\mu}{m}}}\left[\frac{\theta'_0}{\theta_0} + \alpha^{-\mu}\frac{\theta'_1}{\theta_1} + \alpha^{-2\mu}\frac{\theta'_2}{\theta_2} + \ldots. + \alpha^{-(m-1)\mu}\frac{\theta'_{m-1}}{\theta_{m-1}}\right],$$

θ' étant toujours $= \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)$, sera rationnelle en q et par conséquent aussi en x. En faisant

$$\theta_0\theta_1\theta_2\ldots.\theta_{m-1} = A(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)$$

on en tire, en réduisant au même dénominateur et différentiant,

$$\frac{fa_i}{\varphi' a_i} = \frac{\pi a_i}{(\psi a_i)^{\frac{\mu}{m}}}\left[\frac{\theta'_0\theta_1\theta_2\ldots.\theta_{m-1} + \alpha^{-\mu}\theta'_1\theta_0\theta_2\ldots.\theta_{m-1} + \ldots.}{\theta'_0\theta_1\theta_2\ldots.\theta_{m-1} + \quad \theta'_1\theta_0\theta_2\ldots.\theta_{m-1} + \ldots.}\right],$$

où l'on doit faire $x = a_i$, donc

$$\frac{fa_i}{\varphi' a_i} = \varepsilon\frac{\pi a_i}{(\psi a_i)^{\frac{\mu}{m}}},$$

ε étant $=$ à $1, \alpha^{-\mu}, \alpha^{-2\mu}, \ldots. \alpha^{-(m-1)\mu}$ selon que $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots. \theta_{m-1}$ s'évanouissent par l'hypothèse $x = a_i$.

Substituant dans l'équation (3.) et observant que

$$\int\frac{fx}{\varphi x}\partial y = \frac{\pi x}{(\psi x)^{\frac{\mu}{m}}}[\log\theta_0 + \alpha^{-\mu}\log\theta_1 + \alpha^{-2\mu}\log\theta_2 + \ldots. + \alpha^{-(m-1)\mu}\log\theta_{m-1}],$$

on a le théorème général pour les transcendantes de la forme

$$\int\frac{\pi z\,.\,\partial z}{\sqrt[m]{((\psi z)^{\mu})}}.$$

La formule (3.) suppose que les facteurs du dénominateur sont inégaux; le cas contraire exigerait l'emploi de la formule (2.), mais il est inutile de considérer ce cas séparément (voir le mém. cité).

Revenons à l'objet spécial de cette note. L'équation (2.) étant deduite de (1.) au moyen de la seule différentiation par rapport aux quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n$, en divisant ensuite par $1.2.3\ldots.\mu_1$, $1.2.3\ldots.\mu_2$ etc.,

pour l'étendre à des valeurs fractionnaires de μ_1, μ_2 etc., il n'y a qu'à imaginer une opération telle ∂^μ, qu'elle donne pour toute valeur de μ, entière ou fractionnaire

$$\frac{\partial^\mu \left(\frac{1}{x-a}\right)}{\Gamma(\mu+1).\partial a^\mu} = \frac{1}{(x-a)^{\mu+1}},$$

Γ ayant la signification ordinaire. Or, en développant les deux fonctions

$$\frac{1}{x-a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(x-a)^{\mu+1}}$$

suivant les puissances négatives de a et comparant, on trouve que cette condition est identique avec celle-ci:

$$\frac{\partial^\mu (a^{-p})}{\Gamma(\mu+1).\partial a^\mu} = (-1)^\mu \frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots(p-1)} a^{-(\mu+p)}$$

ou bien

$$\frac{\partial^\mu (a^{-p})}{\partial a^\mu} = (-1)^\mu \frac{\Gamma(p+\mu)}{\Gamma(p)} a^{-(p+\mu)},$$

ce qui est l'une des formules fondamentales de Mr. *Liouville.* On suppose ici que μ est une quantité négative comprise entre zéro et l'unité, et l'on écrira en conséquence

$$(-1)^\mu \int^\mu a^{-p}\, \partial a^\mu = \frac{\Gamma(p-\mu)}{\Gamma(p)} . \frac{1}{a^{p-\mu}},$$

μ étant positif et compris entre 0 et 1. Au moyen de cette définition on exprime aisément en quadrature définie l'intégrale $\int^\mu fa.\partial a^\mu$, fa étant une fonction développable en série de la forme

$$fa = \Sigma \frac{N_p}{a^p},$$

p étant toujours positif et plus grand que μ. En effet on a alors

$$(-1)^\mu \int^\mu fa.\partial a^\mu = \Sigma \frac{\Gamma(p-\mu)}{\Gamma(p)} . \frac{N_p}{a^{p-\mu}},$$

équation qui, en vertu de la formule connue

$$\int_0^1 \theta^{m-1}(1-\theta)^{n-1}\, \partial\theta = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

se transforme dans celle-ci:

$$(-1)^\mu\, \Gamma(\mu) \int^\mu fa.\partial a^\mu = \Sigma \int_0^1 \frac{N_p}{a^{p-\mu}} \theta^{p-\mu-1}(1-\theta)^{\mu-1}\, \partial\theta,$$

qu'on peut écrire comme suit:

$$(-1)^\mu\, \Gamma(\mu) \int^\mu fa.\partial a^\mu = a^\mu \Sigma \int_0^1 \frac{N_p\, \theta^p}{a^p} . \frac{(1-\theta)^{\mu-1}}{\theta^{\mu+1}}\, \partial\theta;$$

donc

$$4. \quad \int^\mu fa.\partial a^\mu = \frac{a^\mu}{(-1)^\mu\, \Gamma(\mu)} \int_0^1 f\left(\frac{a}{\theta}\right) \frac{(1-\theta)^{\mu-1}}{\theta^{\mu+1}}\, \partial\theta,$$

formule qui ne diffère pas de celle qu'on trouve dans le mémoire de Mr. *Liouville* (Tome 12. p. 281 de ce journ.), ce qu'on voit en y faisant $F(\sqrt{x}) = x.fx$ et en écrivant a au lieu de x. Posant $\theta \frac{a}{a+\alpha}$, substituant et renversant les limites, on trouve

$$(-1)^{\mu}\, \Gamma(\mu) \int^{\mu} fa.\partial a^{\mu} = \int_0^{\infty} f(a+\alpha)\, \alpha^{\mu-1}\, \partial \alpha,$$

ce qui est l'expression en quadrature définie, d'où part Mr. *Liouville* dans le mémoire cité.

Maintenant, rien n'est plus facile que d'étendre la formule (2.) au cas où μ_1, μ_2 etc. ont des valeurs fractionnaires comprises entre 0 et -1, pourvu que l'on suppose le dégré du numérateur de Fx moindre que celui du dénominateur. En effet, on peut alors développer $\frac{\varphi a_i}{x-a_i}$ en série de la forme $\Sigma \frac{N_p}{a_i^p}$, p étant toujours plus grand que μ_i. On a dans ce cas $H\left(\frac{Ft}{t-x}\right) = 0$, donc en faisant

$$Fx = \frac{X}{(x-a)^{1-\mu_1}(x-a_2)^{1-\mu_2}\ldots.(x-a_n)^{1-\mu_n}},$$

on aura

$$Fx = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \frac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \int^{\mu_i} \frac{\varphi_i a_i}{x-a_i}\, \partial a_i,$$

ou bien, en transformant les intégrales en quadratures définies au moyen de l'équation (4.),

$$Fx = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \frac{a_i^{\mu_i}}{(-1)^{\mu_i}\, \Gamma(\mu_i)\, \Gamma(1-\mu_i)} \int_0^1 \frac{\varphi_i\left(\frac{a_i}{\theta}\right)}{\theta x - a_i} \cdot \frac{\partial\theta}{\theta^{\mu_i}(1-\theta)^{1-\mu_i}},$$

ou bien en se rappellant que $\Gamma(\mu_i)\, \Gamma(1-\mu_i) = \frac{\pi}{\sin \mu_i \pi}$,

$$Fx = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \frac{a_i^{\mu} \sin \mu_i \pi}{(-1)^{\mu_i} \pi} \int_0^1 \frac{\varphi_i\left(\frac{a_i}{\theta}\right)}{\theta x - a_i} \cdot \frac{\partial\theta}{\theta^{\mu_i}(1-\theta)^{1-\mu_i}}.$$

On peut donner à cette équation une forme plus simple en observant que

$$\varphi_i(x) = F(x).(x-a_i)^{1-\mu_i},$$

donc

$$\varphi_i\left(\frac{a_i}{\theta}\right) = F\left(\frac{a_i}{\theta}\right)(1-\theta)^{1-\mu_i}\left(\frac{a_i}{\theta}\right)^{1-\mu_i}$$

et partant

$$5. \quad Fx = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \frac{\sin \mu_i \pi}{(-1)^{\mu_i} \pi} \int_0^1 \frac{F\left(\frac{a_i}{\theta}\right)}{\theta x - a_i} \cdot \frac{a_i\, \partial\theta}{\theta}.$$

Dans le cas particulier ou $\mu_1 = \mu_2 = \ldots. = \mu_n = \frac{1}{2}$ on a

$$Fx = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^1 \frac{F\left(\frac{a_i}{\theta}\right)}{\theta x - a_i} \cdot \frac{a_i \partial\theta}{\theta}$$

expression aisée de vérifier lorsque $n=1$ ou $n=2$.

Reprenons la formule

$$fx = \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi_i a_i}{x-a_i},$$

$\varphi_i x$ étant $=(x-a_i)fx$. Intégrant par rapport aux quantités $a_1, a_2, \ldots a_n$ et aux indices $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, on en tire, en désignant par Fx le résultat de l'intégration, divisé par $\Gamma(1-\mu_1).\Gamma(1-\mu_2)\ldots$, et faisant $\varphi_i x = (x-a_i)^{1-\mu_i} Fx$,

$$Fx = \frac{1}{(x-a_1)^{1-\mu_1}(x-a_2)^{1-\mu_2}\ldots(x-a_n)^{1-\mu_n}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \int^{\mu_i} \frac{\varphi_i a_i}{x-a_i} \partial a_i^{\mu_i},$$

où l'on ne doit point ajouter de fonction complémentaire, parceque Fx s'évanouit lorsque $a_i = \infty$.

Multipliant les deux membres de cette équation par x^m, m étant un nombre entier, remarquant que

$$\frac{x^m}{x-a_i} = \frac{a_i^m}{x-a_i} + a_i^{m-1} + a_i^{m-2}x + a_i^{m-3}x^2 + \ldots + a_i x^{m-2} + x^{m-1}$$

et faisant pour abréger $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \int^{\mu_i} a_i^k \varphi_i a_i \partial a_i^{\mu} = S_k$ on a

$$x^m Fx = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \int^{\mu_i} \frac{a_i^m \varphi_i a_i}{x-a_i} \partial a_i^{\mu_i} + S_{m-1} + S_{m-2}x + S_{m-3}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + S_1 x^{m-2} + S_0 x^{m-1}.$$

Or, en développant l'expression de Fx suivant les puissances descendantes de x, on voit sans peine qu'on peut représenter la fonction

$$S_{m-1} + S_{m-2}x + S_{m-3}x^2 + \ldots + S_1 x^{m-2} + S_0 x^{m-1} \quad \text{par} \quad H\left[\frac{t^m Ft}{t-x}\right],$$

d'où l'on conclut, en étendant à $X.Fx$, X étant une fonction entière quelconque, ce qui a été dit de $x^m Fx$, que si l'on fait

$$Fx = \frac{X}{(x-a_1)^{1-\mu_1}(x-a_2)^{1-\mu_2}\ldots(x-a_n)^{1-\mu_n}}, \quad \text{et} \quad \varphi_i x = (x-a_i)^{1-\mu_i} Fx,$$

on a toujours

$$Fx = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \int^{\mu_i} \frac{\varphi_i a_i}{x-a_i} \partial a^{\mu_i} + H\left[\frac{Ft}{t-x}\right],$$

formule correspondante à l'équation (2.) pour le cas de valeurs négatives et fractionnaires de $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ comprises entre 0 et —1. Quoiqu'on ne puisse la vérifier par l'intégration directe, que dans quelques cas très-particuliers, cependant les considérations par lesquelles nous l'avons trouvée, ne semblent-elles laisser de doute sur son exactitude.

24. Mars 1838.

4.
Note au mémoire No. 1.

Dans le mémoire, qu'on vient de lire, nous sommes parvenu, en partant du principe de *Fresnel,* à la détermination suivante de l'onde lumineuse.

En un point quelconque M de la surface du premier ellipsoïde construisez le plan tangent, et abaissez du centre O une perpendiculaire OP sur ce plan. Faitez tourner ensuite le triangle MOP dans son propre plan autour du centre O, de manière qu'il décrive un angle de 90 degrés. Dans la position nouvelle du triangle MOP, le point M appartiendra à la surface de l'onde lumineuse, tandis que le plan perpendiculaire à OP en P (plan qui, dans la position primitive du triangle, touchoit l'ellipsoïde) sera tangent à l'onde en M. Enfin le plan même du triangle sera celui de vibration.

On sait que *Fresnel* a donné deux constructions isolées, celle des plans tangents à l'onde, qui résulte immédiatement de ses principes et celle des points de l'onde, à laquelle il est parvenu par une sorte de devination. Il jugeait impraticable à effectuer les calculs nécessaires pour lier la deuxième construction à la première. M. *Ampère,* en remplissant cette lacune, déduisit le premier, d'une manière rigoureuse, l'équation de l'onde en coordonnées ordinaires. La construction nouvelle, en renfermant à la fois les deux constructions de *Fresnel,* rend inutiles les calculs immenses de M. *Ampère.* Nous l'avons fondée sur des considérations de première simplicité; le but de cette Note est de faire voir, qu'on peut en bannir la dernière trace de calcul. Il suffit pour cela de remplacer les développements analytiques, qui nous ont fourni la solution du problème suivant:

> **„Un ellipsoïde et un de ses points *M* étant donnés, conduire par ce point un plan diamétral tel, que l'un des deux axes de l'ellipse d'intersection se confonde avec *OM*"**

par des considérations directes. Rien de plus facile. Les tangentes en *M* à chacune des ellipses d'intersection, dont le plan passe par le rayon vecteur *OM,* forment en général avec ce rayon des angles différents: dans

l'ellipse à construire cet angle est droit. Chaque ligne droite, qui, dans le plan qui touche l'ellipsoïde en M, passe par ce point, est du nombre des tangentes en question; il s'agit donc de choisir parmi ces droites, celle qui est perpendiculaire au rayon vecteur OM. Pour cela abaissons du centre O une perpendiculaire OP sur le plan tangent, joignons les deux points M et P par une ligne droite MP et menons par M, dans le plan tangent, une ligne droite et perpendiculaire à MP. Cette ligne droite sera la tangente demandée. L'on n'aura donc, qu'à faire passer un plan par le rayon vecteur OM et la ligne droite que nous venons de construire, pour que ce rayon vecteur coïncide avec un des deux axes de l'ellipse d'intersection.

5.

Ueber die Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$.

(Theorie der trigonometrischen Functionen in Bezug auf Congruenzen.)

(Von Herrn *Theodor Schönemann* zu Berlin.)

§. 1.

Nehmen wir an, es gäbe zwei Paaren von Zahlen u, v und u_1, v_1, welche beide der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$ genügten, so dafs also $u^2+v^2\equiv 1 \pmod{p}$ und $u_1^2+v_1^2\equiv 1 \pmod{p}$ wären, und setzen wir ferner $u_2 = uu_1 - vv_1$, $v_2 = uv_1 + u_1v$, so folgt hieraus $(u_2^2+v_2^2) = (u^2+v^2)(u_1^2+v_1^2)$, also auch die Congruenz $u_2^2+v_2^2\equiv 1 \pmod{p}$.

Da die Relationen unter den Gröfsen uv, u_1v_1 und u_2v_2 ganz denen der Cosinusse und Sinusse von einfachen und zusammengesetzten Bögen entsprechen, so erlauben wir uns auch für diese Gröfsen eine ähnliche Bezeichnung einzuführen. Zugleich wird hierdurch der Gang der Untersuchung deutlicher werden.

Wir bezeichnen also

u durch $\cos(n)$, u_1 durch $\cos(m)$, u_2 durch $\cos(n+m)$,
v durch $\sin(n)$, v_1 durch $\sin(m)$, v_2 durch $\sin(n+m)$.

Hieraus folgt nun die Congruenz $[\cos(n)+\sin(n)\sqrt{-1}][\cos(m)+\sin(m)\sqrt{-1}] \equiv \cos(n+m)+\sin(n+m)\sqrt{-1} \pmod{p}$ und daher auch folgende $[\cos(n)+\sin(m)\sqrt{-1}]^\alpha \equiv \cos(\alpha n)+\sin(\alpha n)\sqrt{-1} \pmod{p}$, wenn α eine ganze Zahl bedeutet. Beide Congruenzen müssen, um als richtige Folgerungen der gemachten Voraussetzungen zu erscheinen, in der Art aufgefafst werden, dafs jede die Stelle von zweien vertritt, so dafs die Gröfsen, welche in $\sqrt{-1}$ multiplicirt sind, einander congruent werden, und die andern ebenfalls.

Es gelten also zu gleicher Zeit folgende beide Congruenzen

$$[\cos(n)+\sin(n)\sqrt{-1}]^\alpha \equiv \cos(\alpha n)+\sin(\alpha n)\sqrt{-1} \pmod{p},$$
$$[\cos(n)-\sin n\sqrt{-1}]^\alpha \equiv \cos(\alpha n)-\sin(\alpha n)\sqrt{-1} \pmod{p},$$

aus welchen man leicht die bekannten Entwicklungen von $\cos(\alpha n)$ und $\sin(\alpha n)$ durch Potenzen und Producte von $\cos(n)$ und $\sin(n)$ ableitet. Man erhält nämlich

$$\cos(\alpha n) = \cos(n)^\alpha - \frac{\alpha.\alpha-1}{1.2}\cos(n)^{\alpha-2}\sin(n)^2 + \text{etc.},$$
$$\sin(\alpha n) = \alpha\cos(n)^{\alpha-1}\sin(n) - \frac{\alpha.\alpha-1.\alpha-2}{1.2.3}\cos(n)^{\alpha-3}\sin(n)^3 + \text{etc.}$$

Sobald also $\cos(n)$ und $\sin(n)$ bestimmt sind, so sind es auch $\cos(\alpha n)$ und $\sin(\alpha n)$, und zwar nur auf eine Weise ihrem Werthe nach; denn setzt man $\alpha=\beta+\gamma=\beta'+\gamma'$, wo β, γ, β' und γ' ganze positive Zahlen bedeuten, so folgt, dafs $\cos((\beta+\gamma)n)=\cos((\beta'+\gamma')n)$ ist, oder vielmehr dafs $\cos(\beta n)\cos(\gamma n)-\sin(\beta n)\sin(\gamma n)=\cos(\beta' n)\cos(\gamma' n)-\sin(\beta' n)\sin(\gamma' n)$ ist, weil $\cos(\beta n)$, $\cos(\beta' n)$, $\sin(\beta n)$ und $\sin(\beta' n)$, auf beiden Seiten durch Potenzen und Producte von $\cos(n)$ und $\sin(n)$ ausgedrückt, identische Entwicklungen geben müssen.

Wir bemerken noch, dafs aus obigen Entwicklungen auch die bekannten Ausdrücke für $\cos((\alpha-\beta)n)$ und $\sin((\alpha-\beta)n)$ folgen, vorausgesetzt dafs α und β ganze Zahlen seien, und dafs α gröfser als β sei. Setzen wir nämlich $\alpha-\beta=\gamma$, so erhalten wir:

$$\cos(\alpha n) = \cos(\beta n)\cos(\gamma n) - \sin(\beta n)\sin(\gamma n),$$
$$\sin(\alpha n) = \sin(\beta n)\cos(\gamma n) + \sin(\gamma n)\cos(\beta n),$$

und hieraus folgt

$$\cos(\alpha n)\cos(\beta n) + \sin(\alpha n)\sin(\beta n)$$
$$= (\cos(\beta n)^2+\sin(\beta n)^2)\cos\gamma n \equiv \cos(\gamma n) \pmod{p},$$
$$\sin(\alpha n)\cos(\beta n) - \cos(\alpha n)\sin(\beta n)$$
$$= (\cos(\beta n)^2+\sin(\beta n)^2)\sin\gamma n \equiv \sin(\gamma n) \pmod{p},$$

oder

$$\cos((\alpha-\beta)n) \equiv \cos(\alpha n)\cos(\beta n) + \sin(\alpha n)\sin(\beta n) \pmod{p},$$
$$\sin((\alpha-\beta)n) \equiv \sin(\alpha n)\cos(\beta n) - \sin(\beta n)\cos(\alpha n) \pmod{p};$$

welches jene Entwicklungen sind.

§. 2.

Setzen wir nun voraus, dafs der Modul p eine Primzahl sei, so folgt, dafs sich die Entwicklungen von $\cos(pn)$ und $\sin(pn)$ nach dem Modul p sehr vereinfachen werden.

Wir erhalten nämlich

$$\cos(pn) = \cos(n)^p - \frac{p.p-1}{1.2}\cos(n)^{p-2}\sin(n)^2 + \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^{\frac{p-1}{2}} p\cos(n)\sin(n)^{p-1},$$
$$\sin(pn) = p\sin(n)\cos(n)^{p-1} - \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3}\sin(n)^3\cos(n)^{p-3} + \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^{\frac{p-1}{2}}\sin(n)^p,$$

folglich

$$\cos(pn) \equiv \cos(n)^p \equiv \cos(n) \pmod{p},$$
$$\sin(pn) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sin(n)^p \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sin(n) \pmod{p}.$$

Ist also

1) p von der Form $4n+1$, so folgt
$\cos(pn) \equiv \cos(n) \pmod{p}$, $\sin(pn) \equiv \sin(n) \pmod{p}$;
2) p von der Form $4n-1$, so folgt
$\cos(pn) \equiv \cos(n) \pmod{p}$, $\sin(pn) \equiv -\sin(n) \pmod{p}$.

Für den ersten Fall erhalten wir hierdurch

$$\cos((p-1)n) \equiv \cos(pn)\cos(n)+\sin(pn)\sin(n)$$
$$\equiv \cos(n)^2+\sin(n)^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

und

$$\sin((p-1)n) \equiv \sin(pn)\cos(p)-\sin(n)\cos(pn)$$
$$\equiv \sin(n)\cos(n)-\sin(n)\cos(n) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Hieraus leitet man nun leicht die Congruenzen

$$\cos(k(p-1)n) \equiv 1 \pmod{p}, \quad \sin(k(p-1)n) \equiv 0 \pmod{p}$$

ab, die immer Statt finden müssen, wenn k eine ganze positive Zahl bedeutet.

Für den zweiten Fall erhalten wir auf ähnliche Weise

$$\cos((p+1)n) = 1 \pmod{p}, \quad \sin((p+1)n) \equiv 0 \pmod{p}$$

und

$$\cos(k(p+1)n) \equiv 1 \pmod{p}, \quad \sin(k(p+1)n) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wir können demnach folgende beiden Sätze aufstellen:

§. 3.

1) Wenn p von der Form $4n+1$ ist und
$$r \equiv t \pmod{p-1},$$
so wird
$$\cos(rn) \equiv \cos(tn) \pmod{p}, \quad \sin(rn) \equiv \sin(tn) \pmod{p},$$
denn es ist t von der Form $r+k(p-1)$, folglich
$$\cos(tn) = \cos[(r+k(p-1))n]$$
$$= \cos(rn)\cos(k(p-1)n) - \sin(rn)\sin(k(p-1)n) \equiv \cos(rn) \pmod{p}.$$

Die andere Congruenz leitet man ähnlich ab:

2) Wenn p von der Form $4n-1$ ist und
$$r \equiv t \pmod{p+1},$$
so folgt auf ähnliche Weise
$$\cos(rn) \equiv \cos(tn) \pmod{p}, \quad \sin(rn) \equiv \sin(tn) \pmod{p}.$$

§. 4.

Was wir bis jetzt auseinander gesetzt haben, bezog sich wesentlich auf die Voraussetzung, dafs zwei Zahlen existiren, welche der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1$ (mod. p) genügen. Um nun die Existenz solcher Zahlen, ihre gegenseitige Beziehung und Anzahl näher zu erforschen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Jeder Zahl a aus der Zahlenreihe 0, 1, 2, ... $p-1$ werden entweder irgend zwei andere b und $p-b$ derselben Zahlenreihe so entsprechen, dafs $a^2+b^2\equiv 1$ (mod. p), oder gar keine. Mit andern Worten $1-a^2$ wird entweder quadratischer Rest, oder Nicht-Rest sein. Gesetzt nun $1-a^2$ wäre quadratischer Nicht-Rest, so können wir die Gröfse x so bestimmen, dafs $a^2+x\equiv 1$ (mod. p) sei. Bezeichnen wir nun a durch $\cos(n)$, $\sqrt{x}$ durch $\sin(n)$ und bestimmen $\cos(\alpha n)$ und $\sin(\alpha n)$ wie früher, so folgt, dafs $\cos(\alpha n)$ immer einen rationalen Ausdruck bedeuten werde, weil darin nur Potenzen von $\sin(n)^2$ oder von x vorkommen; $\sin(\alpha n)$ hingegen wird sich unter der Form eines Products aus $\sqrt{x}$ in eine rationale Zahl darstellen lassen; denn der Ausdruck von $\frac{\sin(\alpha n)}{\sin(n)}$ enthält ebenfalls nur Potenzen von $\sin(n)^2$ oder von x. $\cos(\alpha n)^2+\sin(\alpha n)^2$ wird aber nach den frühern Entwicklungen auch hier stets $\equiv 1$ (mod. p) sein, wenn α irgend eine ganze positive Zahl bedeutet. Wir können $\sin(n)$ in Bezug auf Congruenzen als einen imaginären Ausdruck ansehen, der zwar seine Bedeutung erst in einer rationalen Function von sich, nämlich in $\sin(n)^2$ erhält; gar wohl aber in mehrfacher Beziehung mit ähnlichen imaginären Ausdrücken verglichen werden kann.

Denken wir uns nun die Reihe der Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ in zwei Classen A und B getheilt, von denen diejenigen, welche, wenn man ihr Quadrat von 1 abzieht, quadratischen Resten congruent werden, zur Classe A gehören, die übrigen zur Classe B, so sind sämmtliche Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ in dieser oder jener Classe enthalten. Es ist aber zu beachten, dafs die Zahlen 1 und $p-1$ in beiden Classen vorkommen werden, weil 0 sowohl als quadratischer Rest wie als Nicht-Rest zu betrachten ist. Diese Eigenthümlichkeit wird sich indessen in der folgenden Behandlung von selbst klar herausstellen. — Wir bemerken noch, dafs wenn $\cos(n)$ und $\cos(m)$ zu einer Classe gehören, auch $\cos(n\pm m)$ zu derselben Classe gehören wird.

Wenden wir nun obige Entwicklungen auf $\cos(pn)$ und auf $\sin(pn)$ an, so erhalten wir

$$\cos(pn) \equiv \cos(n)^p \equiv \cos(n) \pmod{p},$$

$$\sin(pn) \equiv \sin(n)\sin(n)^{2\cdot\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Gehört nun $\cos(n)$ zur Classe B, so wird $\sin(n)^{2\cdot\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, und folglich $\sin(pn) \equiv \sin(n)(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$. Ist also

1) p von der Form $4n+1$, so folgt

$$\cos(pn) \equiv \cos(n), \qquad \sin(pn) \equiv -\sin(n);$$

demnach ist

$$\cos((p+1)n) \equiv 1, \qquad \sin((p+1)n) \equiv 0,$$

daher sich auch, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, folgende Congruenzen ergeben:

$\cos(k(p+1)n) \equiv 1 \pmod{p}$, $\sin(k(p+1)n) \equiv 0 \pmod{p}$. Ist

2) p von der Form $4n-1$, so folgt

$$\cos(pn) \equiv \cos(n), \qquad \sin(pn) \equiv \sin(n)$$

und daher

$$\cos((p-1)n) \equiv 1, \qquad \sin((p-1)n) \equiv 0$$

und

$\cos(k(p-1)n) \equiv 1 \pmod{p}$, $\sin(k(p-1)n) \equiv 0 \pmod{p}$.

Es ist aber für den ersten Fall die Congruenz $\sin((p+1)n) \equiv 0$ und für den zweiten $\sin((p-1)n) \equiv 0 \pmod{p}$ so zu verstehen, dafs im ersten Falle $\frac{\sin((p+1)n)}{\sin(n)}$, im zweiten $\frac{\sin((p+1)n)}{\sin(n)} \equiv 0 \pmod{p}$ werden.

Wir können demnach folgende beiden Sätze aufstellen:

§. 5.

Gehört $\cos(n)$ zur Classe B, so wird

1) wenn p von der Form $4n+1$ ist,

$$\cos(rn) \equiv \cos(tn) \pmod{p} \text{ sein,}$$

wenn

$$r \equiv t \pmod{p+1};$$

2) wenn p von der Form $4n-1$ ist, so wird

$$\cos(rn) \equiv \cos(tn) \pmod{p} \text{ sein,}$$

wenn

$$r \equiv t \pmod{p-1} \text{ ist.}$$

Fassen wir also die Resultate des §. 3. und des §. 5. zusammen, so erhalten wir folgende Sätze.

§. 6.

I. Ist p von der Form $4n+1$ und gehört $\cos(n)$

a) zur Classe A, so wird

$$\cos(rn)\equiv\cos(tn)\ \text{sein,}$$

wenn

$$r\equiv t\ (\text{mod. } p-1)\ \text{ist;}$$

b) gehört $\cos(n)$ zur Classe B, so wird

$$\cos(rn)\equiv\cos(tn)\ (\text{mod. } p)\ \text{sein,}$$

wenn

$$r\equiv t\ (\text{mod. } p+1)\ \text{ist.}$$

II. Ist p von der Form $4n-1$ und gehört $\cos(n)$

a) zur Classe A, so wird

$$\cos(rn)\equiv\cos(tn)\ \text{sein,}$$

wenn

$$r\equiv t\ (\text{mod. } p+1)\ \text{ist;}$$

b) gehört $\cos(n)$ zur Classe B, so wird

$$\cos(rn)\equiv\cos(tn)\ \text{sein,}$$

wenn

$$r\equiv t\ (\text{mod. } p-1)\ \text{ist.}$$

§. 7.

Lehrsatz. Gehört $\cos(n)$ zur Classe A, und α ist die kleinste ganze Zahl, welche der Congruenz $\cos(\alpha n)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$ genügt, so ist α ein Theiler von $p-1$ oder von $p+1$, je nachdem p von der Form $4n+1$ oder von der Form $4n-1$ ist.

Gehört $\cos(n)$ aber zur Classe B, und α ist die kleinste Zahl, welche der Congruenz $\cos(\alpha n)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$ genügt, so ist α ein Theiler von $p+1$ oder von $p-1$, je nachdem p von der Form $4n+1$ oder von der Form $4n-1$ ist.

Beweis. Für die entsprechenden Fälle bezeichne m entweder $p+1$ oder $p-1$. Setzen wir nun voraus, α sei kein Theiler von n, so sei $m=\gamma\alpha+v$ und v der kleinste Rest von m nach dem Modul α, also $\alpha>v$. Bilden wir jetzt $\cos((m-\gamma\alpha)n)$, so mufs diese Zahl, da $\cos(mn)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$ und $\cos(\gamma\alpha n)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$, offenbar auch $\equiv 1\ (\text{mod. } p)$ werden: folglich genügte v gegen die Hypothese der Congruenz $\cos(vn)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$. Es kann also m, durch α getheilt, keinen Rest lassen, oder mit andern Worten m mufs ein Vielfaches von α sein.

Jede andere Zahl β, die der Congruenz $\cos(\beta n)$ genügt, befindet sich in demselben Falle wie m gegen α, d. h. sie mufs ein Vielfaches von α sein.

Ist nun α die kleinste Zahl, die für einen bestimmten $\cos(n)$ die Congruenz $\cos(\alpha n)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$ realisirt, so wollen wir sagen $\cos(n)$ gehöre zur Zahl α.

§. 8.

Betrachten wir nun die Congruenz vom αten Grade $\cos(\alpha n)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$, und denken sie uns nach Potenzen von $\cos(n)$ entwickelt, so bemerken wir zuerst, dafs auch jede von den Gröfsen: $\cos(2n)$, $\cos(3n)$, ... $\cos(\alpha n)$ für $\cos(n)$ gesetzt, diese Congruenz realisiren werde, weil, sobald $\cos(\alpha n)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$ ist, auch $\cos(\alpha\beta n)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$ folgt, wenn β eine ganze Zahl ist. Ferner wird, wenn $\alpha>\beta$ ist, $\cos((\alpha-\beta)n)\equiv\cos(\beta n)\ (\text{mod. } p)$ werden, wie man leicht aus der Entwicklung sieht: folglich werden in der Reihe $\cos(n)$, $\cos(2n)$, ... $\cos(\alpha n)$ je zwei Glieder congruent werden, $\cos(\alpha n)$ allein ausgenommen, wenn α ungerade ist, aufser welchem, wenn α gerade ist, $\cos\left(\frac{\alpha}{2}n\right)$ ebenfalls noch allein stehen bleibt, und nothwendigerweise $\equiv -1\ (\text{mod. } p)$ wird, da $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}n\right)^2-1\equiv\cos(\alpha n)\equiv 1\ (\text{mod. } p)$ ist.

Die entsprechenden Sinusse von $\cos(\beta n)$ und von $\cos((\alpha-\beta)n)$, die offenbar durch die Congruenz $\sin(\beta n)\equiv\pm\sin((\alpha-\beta)n)$ verbunden sind, müssen entgegengesetzte Zeichen haben; denn setzten wir $\sin(\beta n)\equiv\sin((\alpha-\beta)n)$, so müfste, wenn $\alpha-\beta=\beta'$ gesetzt wird, je nachdem $\beta'>\beta$ oder $\beta>\beta'$ wäre, $\cos((\beta'-\beta)n)$ oder $\cos((\beta-\beta')n)\equiv\cos(\beta n)^2+\sin(\beta n)^2\equiv 1\ (\text{mod. } p)$ werden, gegen die Voraussetzung, da doch $\beta-\beta'$ oder $\beta'-\beta$ jedenfalls kleiner als α sein mufs. Zugleich folgt auch hieraus, dafs nicht mehr als zwei Cosinusse in der Reihe $\cos(n)$, $\cos(2n)$, ... $\cos(\alpha n)$ gleich werden können, da die ihnen entsprechenden Sinusse nicht alle unter einander entgegengesetztes Zeichen haben könnten.

Bemerkt man nun ferner, dafs

1) wenn α ungerade ist,

$$\frac{\cos(\alpha n)-1}{\cos(n)-1}$$

$$=K\left\{\left[\cos(n)-\cos\frac{2\pi}{\alpha}\right]\left[\cos(n)-\cos 2\frac{2\pi}{\alpha}\right]\ldots\left[\cos(n)-\cos\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\frac{2\pi}{\alpha}\right]\right\}^2$$

ist, wo K eine bestimmte rationale Zahl bedeutet, und dafs, wenn

2) α gerade ist,

$$\frac{\cos(\alpha n)-1}{\cos(n)^2-1}$$

$$= K'\left\{\left[\cos(n)-\cos\frac{2\pi}{\alpha}\right]\left[\cos(n)-\cos 2\frac{2\pi}{\alpha}\right]\ldots\left[\cos(n)-\cos\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\frac{2\pi}{\alpha}\right]\right\}^2$$

ist, wo K' ebenfalls eine bestimmte rationale Zahl bedeutet, dafs sich ferner die Gröfsen in den Klammern als eine rationale, durch ganze Zahlen ausgedrückte Function von $\cos(n)$ schreiben lassen, so sieht man leicht ein, dafs die Gröfse auf der linken Seite des Gleichheits-Zeichens $\equiv 0 \pmod{p}$ gesetzt, im ersten Falle nicht mehr als $\frac{\alpha-1}{2}$, im zweiten Falle nicht mehr als $\frac{\alpha-2}{2}$ verschiedene Wurzeln zulassen kann. Hieraus folgt nun, dafs wenn irgend ein $\cos(n')$ auch zur Zahl α oder zu einem Factor derselben gehört, also der Congruenz $\cos(\alpha n') \equiv 1 \pmod{p}$ genügt, $\cos(n')$ nothwendigerweise unter den Gröfsen $\cos(n)$, $\cos(2n)$, ... $\cos(\alpha n)$ vorkommen müsse, weil sonst die Congruenz $\cos(\alpha n) \equiv 1 \pmod{p}$ mehr verschiedene Wurzeln zuliefse als sich aus Vorigem ergeben.

§. 9.

Gehören zwei Cosinusse $\cos(n)$ und $\cos(n')$ aus derselben Classe, zu zwei Zahlen α und α' die zu einander relative Primzahlen sind, so mufs $\cos(n \pm n')$ zu $\alpha\alpha'$ gehören; denn es folgt leicht, dafs $\cos(\alpha\alpha'(n \pm n')) \equiv 1 \pmod{p}$ sein müsse, folglich müfste die Zahl α'', zu der $\cos(n \pm n')$ gehören mag, ein Theiler von $\alpha\alpha'$ sein. Da also $\cos(\alpha''(n \pm n')) \equiv 1 \pmod{p}$ ist, so folgt auch $\cos(\alpha\alpha''(n \pm n')) \equiv 1 \pmod{p}$ und hieraus $\cos(\alpha\alpha'' n') \equiv 1 \pmod{p}$, folglich ist $\alpha\alpha''$ ein Vielfaches von α', also ist α'' selbst ein Vielfaches von α'; ähnlich beweist man, dafs α'' ein Vielfaches von α sei, und hieraus folgt dann $\alpha'' = \alpha\alpha'$. Hätten nun aber die beiden Zahlen α und α' einen gemeinschaftlichen Theiler, so kann man dennoch durch $\cos(n)$ und $\cos(n')$ einen Cosinus finden, der zu dem kleinsten Vielfachen von α und α' gehört. Denn es sei

$$\alpha = A^a B^b C^c \ldots M^m N^n R^r \ldots, \qquad \alpha' = A^{a'} B^{b'} C^{c'} \ldots M^{m'} N^{n'} R^{r'} \ldots$$

so dafs $A, B, C, \ldots M, N, R$ etc. verschiedene Primzahlen und a, b, c etc., a', b', c' etc. ganze positive Zahlen oder 0 bedeuten; ferner seien die Zahlen a, b, c etc. bis m einzeln gleich oder gröfser als a, b, c etc.; m', n', r' etc. aber einzeln gröfser als m, n, r etc., so wird $\cos(M^m N^n R^r n)$ zu $A^a B^b C^c$ und $\cos(A^{a'} B^{b'} C^{c'} n')$ zu $M^{m'} N^{n'} R^{r'}$ gehören; folglich wird

nach dem Vorigen $\cos(M^m N^n R^r n \pm A^{a'} B^{b'} C^{c'} n')$ zu $A^a B^b C^c \ldots M^{m'} N^{n'} R^{r'}$ oder zu dem kleinsten Vielfachen von α und α' gehören.

Nimmt man jetzt aus irgend einer Classe eine beliebige Anzahl Cosinusse: $\cos(n')$, $\cos(n'')$, ... $\cos(n^{(\nu)})$, so kann man aus den vorhandenen offenbar einen solchen $\cos(n)$ bilden, dafs $\cos(n')$, $\cos(n'')$, ... $\cos(n^{(\nu)})$ in der Reihe $\cos(n)$, $\cos(2n)$, ... $\cos(\alpha n)$ enthalten sind; denn hierzu ist weiter nichts erforderlich, als dafs α das kleinste Vielfache derjenigen Zahlen sei, zu welchen $\cos(n')$, $\cos(n'')$, ... $\cos(n^{(n)})$ gehören; welches nach dem Vorigen immer erreichbar ist. Hat man nun zwei Cosinusse $\cos(n)$ und $\cos(m)$ gebildet, von der Art dafs in der Reihe $\cos(n)$, $\cos(2n)$, $\cos(3n)$, ... $\cos(\alpha n)$ sämmtliche Cosinusse der ersten Classe enthalten sind, in $\cos(m)$, $\cos(2m)$, $\cos(3m)$, ... $\cos(\beta m)$ sämmtliche Cosinusse der zweiten Classe, und gehört $\cos(n)$ zur Zahl α, $\cos(m)$ zur Zahl β, so mufs α ein Theiler von $p-1$ oder $p+1$ sein, je nachdem p von der Form $4n+1$ oder $4n-1$ ist, β mufs dagegen entsprechend ein Theiler von $p-1$ oder von $p+1$ sein. Es sei also $\alpha=\frac{p\mp 1}{\delta}$, $\beta=\frac{p\pm 1}{\delta'}$. Bemerken wir nun, dafs in den Reihen $\cos(n)$, $\cos(2n)$, ... $\cos(\alpha n)$ und $\cos(m)$, $\cos(2m)$, ... $\cos(\beta m)$ die Zahlen der entsprechenden Classen aufser $+1$ und -1 doppelt vorkommen müssen, dafs aber $+1$ und -1 in beiden Classen einzeln vorkommen, so sieht man leicht ein, dafs $\frac{p\mp 1}{\delta}+\frac{p\pm 1}{\delta'}=2p$, oder gleich der doppelten Anzahl der Gröfsen 0, 1, 2, ... $p-1$, welche die erste und zweite Classe bilden, sein müsse. Die Gleichung $\frac{p\mp 1}{\delta}+\frac{p\pm 1}{\delta'}=2p$ kann aber nicht anders bestehen, als wenn δ und δ' gleich 1 werden; und hieraus schliefsen wir: dafs es in der ersten Classe gewisse Cosinusse gebe, die zur Zahl $p-1$ oder $p+1$ gehören, nachdem p von der Form $4n+1$ oder $4n-1$ ist, und in der zweiten Classe solche, die für die entsprechenden Fälle zu $p+1$ oder $p-1$ gehören. Nennt man nun diejenigen Cosinus, die zu $p\pm 1$ gehören, primitive Wurzeln der Congruenz $\cos((p\pm 1)n)\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ p)$, so sieht man leicht, dafs es stets so viele primitive Wurzeln solcher Congruenz geben werde, als respective relative Primzahlen zu $p\pm 1$ vorhanden sind, die kleiner als $p\pm 1$ sind.

§. 10.

Bevor wir nun unsere Untersuchung fortsetzen, wird es gut sein, für einige Zahlen die beiden Classen der Cosinusse mit den entsprechenden Sinussen aufzustellen.

Es sei also $p=13$, so ist eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos(12n)\equiv 1 \pmod{13}$ congruent 2, der entsprechende Sinus $\equiv \pm 7 \pmod{13}$. Wir wählen das obere Zeichen aus einem Grunde, der sogleich hervortreten wird. Demnach ergiebt sich nach dem Modul 13:

$$\begin{array}{lll}
\cos(n)\equiv 2, & \cos(2n)\equiv 7, & \cos(3n)\equiv 0,\\
\sin(n)\equiv 7, & \sin(2n)\equiv 2, & \sin(3n)\equiv 1,\\
\hline
\cos(4n)\equiv -7, & \cos(5n)\equiv -2, & \cos(6n)\equiv -1,\\
\sin(4n)\equiv 2, & \sin(5n)\equiv 7, & \sin(6n)\equiv 0,\\
\hline
\cos(7n)\equiv -2, & \cos(8n)\equiv -7, & \cos(9n)\equiv 0,\\
\sin(7n)\equiv -7, & \sin(8n)\equiv -2, & \sin(9n)\equiv -1,\\
\hline
\cos(10n)\equiv 7, & \cos(11n)\equiv 2, & \cos(12n)\equiv +1,\\
\sin(10n)\equiv 2, & \sin(11n)\equiv -7, & \sin(12n)\equiv 0.
\end{array}$$

Da $\cos(12n)=1$ ist, so mufs $\cos(6n)\equiv -1$ und $\cos(3n)\equiv 0$ werden, indem $2\cos(3n)^2-1\equiv -1 \pmod{13}$ ist; $\sin(3n)$ ist folglich ± 1, beide Zeichen werden aber den beiden Zeichen von $\sin(n)\equiv \pm 7$ entsprechen; deshalb wählten wir bei letzterem das Zeichen mit Fleifs so, dafs $\sin(3n)\equiv +1 \pmod{13}$ wird.

Die Analogie obiger Reihen mit $\cos\frac{1}{12}2\pi$, $\cos\frac{2}{12}2\pi$ etc. und $\sin\frac{1}{12}2\pi$, $\sin\frac{2}{12}2\pi$ etc. fällt in die Augen.

Stellen wir jetzt die zweite Classe auf, so ist 3 eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos(14.m)\equiv 1 \pmod{13}$, und wir erhalten:

$$\begin{array}{llll}
\cos(m)\equiv 3, & \cos(2m)\equiv 4, & \cos(3m)\equiv 8, & \cos(4m)\equiv -8,\\
\sin(m)\equiv \sqrt{5}, & \sin(2m)\equiv 6\sqrt{5}, & \sin(3m)\equiv 9\sqrt{5}, & \sin(4m)\equiv 9\sqrt{5},\\
\cos(5m)\equiv -4, & \cos(6m)\equiv -3, & \cos(7m)\equiv -1, & \\
\sin(5m)\equiv 6\sqrt{5}, & \sin(6m)\equiv \sqrt{5}, & \sin(7m)\equiv 6\sqrt{5}, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\cos(8m)\equiv -3, & \cos(9m)\equiv -7, & \cos(10m)\equiv -8, & \cos(11m)\equiv 8,\\
\sin(8m)\equiv -\sqrt{5}, & \sin(9m)\equiv -6\sqrt{5}, & \sin(10m)\equiv -9\sqrt{5}, & \sin(11m)\equiv -9\sqrt{5},\\
\cos(12m)\equiv 4, & \cos(15m)\equiv 3, & \cos(14m)\equiv +1, & \\
\sin(12m)\equiv -6\sqrt{5}, & \sin(13m)\equiv -\sqrt{5}, & \sin(14m)\equiv 0\sqrt{5}. &
\end{array}$$

Die Analogie dieser Reihen mit $\cos\frac{1}{14}2\pi$, $\cos\frac{2}{14}2\pi$ etc. und $\sin\frac{1}{14}2\pi$, $\sin\frac{2}{14}2\pi$ etc. fällt in die Augen.

Wir wollen jetzt noch beide Classen für einen Modul von der Form $4n-1$, also z. B. für 11 aufstellen. Man erhält für die erste Classe

$$\begin{array}{lll} \cos(n)\equiv 3, & \cos(2n)\equiv 6, & \cos(3n)\equiv 0, \\ \sin(n)\equiv 6, & \sin(2n)\equiv 3, & \sin(3n)\equiv +1, \\ \cos(4n)\equiv -6, & \cos(5n)\equiv -3, & \cos(6n)\equiv -1, \\ \sin(4n)\equiv 3, & \sin(5n)\equiv 6, & \sin(6n)\equiv 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \cos(7n)\equiv -3, & \cos(8n)\equiv -6, & \cos(9n)\equiv 0, \\ \sin(7n)\equiv -6, & \sin(8n)\equiv -3, & \sin(9n)\equiv -1, \\ \cos(10n)\equiv 6, & \cos(11n)\equiv 3, & \cos(12n)\equiv +1, \\ \sin(10n)\equiv -3, & \sin(11n)\equiv -6, & \sin(12n)\equiv 0, \end{array}$$

und für die zweite Classe:

$$\begin{array}{lll} \cos(m)\equiv 2, & \cos(2m)\equiv 7, & \cos(3m)\equiv -7, \\ \sin(m)\equiv \sqrt{8}, & \sin(2m)\equiv 4\sqrt{8}, & \sin(3m)\equiv 4\sqrt{8}, \\ \cos(4m)\equiv -2, & \cos(5m)\equiv -1, & \\ \sin(4m)\equiv \sqrt{8}, & \sin(5m)\equiv 0\sqrt{8}, & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \cos(0m)\equiv -2, & \cos(7m)\equiv -7, & \cos(8m)\equiv 7, \\ \sin(6m)\equiv -\sqrt{8}, & \sin(7m)\equiv -4\sqrt{8}, & \sin(8m)\equiv -8\sqrt{8}, \\ \cos(9m)\equiv 9, & \cos(10m)\equiv +1, & \\ \sin(9m)\equiv -\sqrt{8}, & \sin(10m)\equiv 0\sqrt{8}. & \end{array}$$

§. 11.

Wir wollen jetzt die Anzahl der Auflösungen der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1$ (mod. p) bestimmen.

Es sei also erstens p von der Form $4n+1$. Ist nun $\cos(n)$ eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos((p-1)n)\equiv 1$ (mod. p), so sind alle Auflösungen, in welchen für x und y reelle Werthe auftreten, in

$$\begin{array}{llll} \cos(n), & \cos(2n), & \ldots. & \cos((p-1)n) \text{ und} \\ \sin(n), & \sin(2n), & \ldots. & \sin((p-1)n) \end{array}$$

enthalten. Demnach giebt es $(p-1)$ Auflösungen der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1$ (mod. p). Im Allgemeinen wird es indessen, wenn die Cosinusse immer dem x entsprechen, vier verschiedene Darstellungen einer bestimmten Congruenz $x_1^2+y_1^2\equiv 1$ (mod. p) geben; denn entsprechen dieser Congruenz die Werthe $x_1=\cos(\mu n)$, $y_1\equiv\sin(\mu n)$, und setzen wir voraus, dafs $\mu<\frac{p-1}{2}$ sei, so werden derselben Congruenz auch noch folgende Werthe entsprechen:

$$x_1 \equiv \cos[(p-1-\mu)n], \quad y_1 \equiv \sin[(p-1-\mu)n],$$
$$x_1 \equiv \cos\left[\left(\tfrac{p-1}{2}-\mu\right)n\right], \quad y_1 \equiv \sin\left[\left(\tfrac{p-1}{2}-\mu\right)n\right],$$
$$x_1 \equiv \cos\left[\left(\tfrac{p-1}{2}+\mu\right)n\right], \quad y_1 \equiv \sin\left[\left(\tfrac{p-1}{2}+\mu\right)n\right].$$

Für $\mu=\frac{p-1}{4}$ fällt aber die erste und dritte Darstellung, so wie die zweite und vierte, in eine zusammen. Eben so fällt für den Grenzfall, wenn $\mu=\frac{p-1}{2}$ wird, die erste und zweite Darstellung zusammen, und die dritte und vierte enbenfalls; oder, wenn man will, die dritte kommt gar nicht vor.

Um jedoch die Untersuchung mit der gröfsten Anschaulichkeit zu führen, wollen wir sofort die $p-1$ Lösungen in vier Gruppen theilen, deren jede gewissermafsen einen Quadranten ausfüllt. Die erste Gruppe wird nämlich gebildet von $\cos(n)$, $\cos(2n)$, ... $\cos\left[\left(\frac{p-1}{4}\right)n\right]$ mit den entsprechenden Sinussen; die zweite von $\cos\left[\left(\frac{p-1}{4}+1\right)n\right]$, $\cos\left[\left(\frac{p-1}{4}+2\right)n\right]$, ... $\cos\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)n\right]$ und den entsprechenden Sinussen, die dritte von $\cos\left[\left(\frac{p-1}{2}+1\right)n\right]$, ... $\cos\left[3\left(\frac{p-1}{2}\right)n\right]$ nebst den entsprechenden Sinussen, und die vierte von $\cos\left[3\left(\frac{p-1}{2}+1\right)n\right]$, ... $\cos[(p-1)n]$ nebst den entsprechenden Sinussen. Schliefsen wir aus den Lösungen der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$ die Lösung $(0)^2+(1)^2\equiv 1 \pmod{p}$ aus, so werden alle wesentlich verschiedenen Lösungen (unter welchen ich solche verstehe, die aus einander, nicht durch Combination der Zeichen + und − in den Wurzelgröfsen hervorgebracht werden) im ersten Quadranten enthalten sein, wenn wir die Werthe $\cos\left(\frac{p-1}{4}n\right)$ und $\sin\left(\frac{p-1}{4}n\right)$ auslassen. Wir erhalten also $\frac{p-1}{4}-1$ verschiedene Lösungen der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$, wenn wir für x die Werthe $\cos(n)$, $\cos(2n)$, ... $\cos\left[\left(\frac{p-1}{4}-1\right)n\right]$ und für y die entsprechenden Sinusse setzen. Unter den ersten Werthen können sich weder zwei gleiche, noch solche befinden, die sich blofs durch das Vorzeichen unterschieden; denn nach dem Vorhergehenden können in der Reihe $\cos(n)$, $\cos(2n)$, $\cos(3n)$, ... $\cos((p-1)n)$

nur höchstens, wenn man auf das Zeichen keine Rücksicht nimmt, vier Werthe zusammenfallen, und die übrigen drei lassen sich für jeden einzelnen Werth aus dem ersten Quadranten leicht in dem andern nachweisen. Es werden daher die übrigen Lösungen wesentlich verschieden sein, in sofern sie nicht durch Zeichenverwechslung hervorgebracht werden können. Dennoch fallen von jenen Lösungen im Allgemeinen noch zwei zusammen, nämlich diejenigen, welche durch Verwechslung der Ordnung hervorgebracht werden. Es ist nämlich $\cos(n) \equiv \sin\left[\left(\frac{p-1}{4}-1\right)n\right]$ und $\sin(n) \equiv \cos\left[\left(\frac{p-1}{4}-1\right)n\right]$, $\cos(2n) \equiv \sin\left[\left(\frac{p-1}{4}-2\right)n\right]$, $\sin(2n) \equiv \cos\left[\left(\frac{p-1}{4}-2\right)n\right]$ etc., so dafs also die Lösung $\cos(n)^2+\sin(n)^2 \equiv 1 \pmod{p}$ eigentlich mit der folgenden $\cos\left[\left(\frac{p-1}{4}-1\right)n\right]^2+\sin\left[\left(\frac{p-1}{4}-1\right)n\right]^2$ zusammenfällt, etc. Wir werden also zwei Fälle zu unterscheiden haben; nämlich 1) wenn $\frac{p-1}{4}-1$ durch 2 aufgeht; dann fallen je zwei Lösungen zusammen, und wir erhalten ihre Anzahl in der Formel $\frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{4}-1\right)$ und 2) wenn $\frac{p-1}{4}-1$ nicht durch 2 aufgeht; dann fallen aufser einer je zwei Lösungen zusammen, und wir erhalten demnach ihre Anzahl in der Formel $\frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{4}-1\right)+\frac{1}{2} = \frac{1}{8}(p-1)$. Nennen wir die Anzahl der Lösungen m, so erhalten wir für den ersten Fall $m = \frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{4}-1\right)$, folglich $p = 8m+5$, und für den zweiten Fall $m \equiv \frac{1}{8}(p-1)$, folglich $p = 8m+1$.

Wir können demnach folgende beiden Sätze aufstellen:

1) In jeder Primzahl von der Form $8m+5$ zeigt m die Anzahl der wesentlich verschiedenen Lösungen der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$ an.
2) In jeder Primzahl von der Form $8m+1$ zeigt m die Anzahl der wesentlich verschiedenen Lösungen der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$ an.

Wenn p von der Form $4n-1$ ist, so wird die Untersuchung ähnlich geführt. Ist $\cos(n)$ eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos[(p+1)n] \equiv 1 \pmod{p}$, so sind sämmtliche Werthe, die den Lösungen der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$ entsprechen, in $\cos(n)$, $\cos(2n)$, ... $\cos\left[\left(\frac{p+1}{4}-1\right)n\right]$ und den entsprechenden Sinussen enthalten. Im All-

gemeinen fallen nun aber, wie oben, je zwei Lösungen in eine zusammen. Wir unterscheiden also wieder folgende beiden Fälle: 1) $\left(\frac{p+1}{4}-1\right)$ geht durch 2 auf; dann beträgt die Anzahl der sämmtlichen Lösungen $\frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{4}-1\right)$; 2) $\left(\frac{p+1}{4}-1\right)$ geht nicht durch 2 auf, dann beträgt die Anzahl der sämmtlichen Lösungen $\frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{4}-1\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(p+1)$. Nennen wir nun die Anzahl der Lösungen wieder m, so erhalten wir sie für 1) $p=8m+3$ und für 2) $p=8m-1$. Wir können demnach folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

In jeder Primzahl von einer der vier Formen $8m+1$, $8m-1$, $8m+3$, $8m+5$ zeigt m die Anzahl der wesentlich verschiedenen Lösungen der Congruenz

$$x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$$

an, wenn wir die Lösung $(0)^2+(1)^2\equiv 1 \pmod{p}$ ausschliefsen.

Unsere früheren Betrachtungen geben uns auch Mittel an die Hand, auf die Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$ noch näher einzugehen. Durch die Classe B kann man nämlich die Anzahl der wesentlich verschiedenen Lösungen jener Congruenz unter der Bedingung finden, dafs x^2 zwar einen quadratischen Rest, y^2 aber einen quadratischen Nicht-Rest andeutet.

Dies mag in Folgendem kurz ausgeführt werden. 1) Ist p von der Form $8m+5$ und $\cos(n)$ eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos[(p+1)n]\equiv 1 \pmod{p}$, so wird es im Ganzen $(p+1)$ Lösungen obiger Congruenz geben, so dafs den Werthen x die Zahlen $\cos(n)$, $\cos(2n)$, ... $\cos(p+1)n$ und den y die zugehörigen Sinusse entsprechen. Diese Gröfsen zerfallen in zwei Gruppen, von $\cos(n)$ und $\sin(n)$ bis $\cos\left[\left(\frac{p+1}{2}\right)n\right]$ und $\sin\left[\left(\frac{p+1}{2}\right)n\right]$ und von $\cos\left[\left(\frac{p+3}{2}\right)n\right]$ und $\sin\left[\left(\frac{p+3}{2}\right)n\right]$ bis $\cos[(p+1)n]$ und $\sin[(p+1)n]$, welche beide dieselben Lösungen liefern. Wir erhalten also $\frac{p+1}{2}$ oder $4m+3$ Lösungen; lassen wir aus diesen die Lösung $(-1)^2+(0)^2\equiv 1 \pmod{p}$ weg, so bleiben $4m+2$ Lösungen. Von diesen fallen jedoch je zwei Lösungen in eine zusammen, weil $\cos(n)^2+\sin(n)^2\equiv 1 \pmod{p}$, dieselbe Lösung liefert wie $\cos\left[\left(\frac{p+1}{2}-1\right)n\right]^2+\sin\left[\left(\frac{p+1}{2}-1\right)n\right]^2\equiv 1 \pmod{p}$ etc. Wir erhalten also $2m+1$ wesentlich verschiedene Lösungen der Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$, wenn y^2 einen quadratischen Nicht-Rest andeutet.

Durch ganz ähnliche Schlüsse findet man,

2) wenn p von der Form $8m+1$ ist, die Zahl Lösungen obiger Congruenz $=2m$;
3) wenn p von der Form $8m+3$ ist, die Zahl der Lösungen $=2m$;
4) wenn p von der Form $8m-1$ ist, die Zahl der Lösungen $=2m-1$.

Betrachten wir nun die Congruenz $X+Y\equiv 1 \pmod{p}$, so haben wir bis jetzt die Anzahl der Fälle untersucht, in welchen X und Y beide quadratische Reste sind; dann die Anzahl der Fälle, in welchen eine Zahl quadratischer Rest, die andere Nicht-Rest ist. Wir könnten nun aus diesen Sätzen, in Verbindung mit einem dritten, der sich leicht darbietet, auch noch die Anzahl der Fälle finden, in welchen beide Gröfsen X und Y quadratische Nicht-Reste sind, ziehen jedoch die Andeutung einer directen Methode vor, und wollen uns hernach jenes dritten gleichsam als Probe bedienen.

Man wird nämlich leicht sehen, dafs wenn man die Reihe der Cosinusse und Sinusse, die zur Classe A gehören, durch 2 interpolirt, alle hierdurch neu eingeführten Gröfsen, also $\cos(\frac{1}{2}n)$, $\cos(\frac{3}{2}n)$ etc., $\sin(\frac{1}{2}n)$, $\sin(\frac{3}{2}n)$ etc., sich als Wurzeln aus Nicht-Resten darstellen lassen, oder als Producte aus einer solchen Wurzel in verschiedene reelle Zahlen.

Ferner ist es einleuchtend, dafs jede Lösung von $X+Y\equiv 1 \pmod{p}$, wenn X und Y Nicht-Reste sind, sich mufs durch $\cos\left[\left(\frac{2m+1}{2}\right)n\right]^2+\sin\left[\left(\frac{2m+1}{2}\right)n\right]^2\equiv 1 \pmod{p}$ darstellen lassen; denn durch die oben gestellte Bedingung werden $\cos[(2m+1)n]$ und $\sin[(2m+1)n]$ reell, folglich müssen diese Werthe in den Reihen $\cos(n)$, $\cos(2n)$ etc., $\sin(n)$, $\sin(2n)$ etc. vorkommen.

Es sei also 1) $p=8m+5$. Bezeichnet $\cos(n)$ eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos[(p-1)n]\equiv 1 \pmod{p}$, so sind die Werthe von $\sqrt{X}$, die zu wesentlich verschiedenen Lösungen gehören, in $\cos(\frac{1}{2}n)$, $\cos(\frac{3}{2}n)$, ... $\cos\left(\frac{4m+1}{2}n\right)$ enthalten; die Werthe für $\sqrt{Y}$ in den zugehörigen Sinussen. Dies giebt im Ganzen $2m+1$ Lösungen, von denen jedoch im Allgemeinen je zwei zusammenfallen, ausgenommen dafs die Lösung $\cos\left(\frac{4m+1}{2}n\right)^2+\sin\left(\frac{4m+1}{2}n\right)^2\equiv 1 \pmod{p}$ für sich allein stehen bleibt; wir erhalten also $m+1$ Lösungen jener Congruenz.

Durch ähnliche Schlüsse findet man folgende Resultate:

2) ist p von der Form $8m+1$, so ist die Anzahl der Lösungen gleich m;
3) ist p von der Form $8m+3$, so ist die Anzahl der Lösungen gleich $m+1$;
4) ist p von der Form $8m-1$, so ist die Anzahl der Lösungen gleich m.

Bezeichnen wir jetzt die Anzahl der Lösungen von der Congruenz $X+Y\equiv 1$ (mod. p), in denen X und Y quadratische Reste sind, mit A_1; die Anzahl der Lösungen, in denen X quadratischer Rest, Y Nicht-Rest ist, mit A_2; die Anzahl der Lösungen, in denen X und Y Nicht-Reste sind, mit A_3, so erhalten wir,

1) wenn $p=8m+5$ ist:
$$A_1=m,\quad A_2=2m+1,\quad A_3=m+1;$$
2) wenn $p=8m+1$ ist:
$$A_1=m,\quad A_2=2m,\quad A_3=m;$$
3) wenn $p=8m+3$ ist:
$$A_1=m,\quad A_2=2m,\quad A_3=m+1;$$
4) wenn $p=8m-1$ ist:
$$A_1=m,\quad A_2=2m-1,\quad A_3=m.$$

Man findet, dafs in allen Fällen $A_1+A_2+A_3=\frac{p-1}{2}$ ist, und durch diese Bemerkung, die sich auch leicht a priori darbietet, hätte man indirect die Werthe von A_3 bestimmen können. Es drückt nämlich $A_1+A_2+A_3$ die Anzahl sämmtlicher Auflösungen der Congruenz $X+Y\equiv 1$ (mod. p) aus. Wenn wir die Werthe von 0 und 1 für X ausschliefsen, so werden dem X noch die $p-2$ Werthe 2, 4, ... $p-1$ entsprechen. Von den $p-2$ Congruenzen, die hieraus folgen, werden aber im Allgemeinen noch zwei, als nur durch die Stellung von X und Y verschieden, zusammenfallen, aufser der Congruenz $\frac{p+1}{2}+\frac{p+1}{2}\equiv 1$ (mod. p), die allein stehen bleibt. Man erhält also überhaupt $\frac{p-2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{p-1}{2}$ wesentlich verschiedene Lösungen der Congruenz $X+Y\equiv 1$ (mod. p); wie es sich aus dem Vorigen ergiebt.

§. 12.

In den Entwicklungen des vorigen §. liegt zu gleicher Zeit das Gesetz, welches ausspricht, für welche Primzahlen 2 quadratischer Rest und für welche 2 quadratischer Nicht-Rest sei.

Wenn nämlich eine primitive Wurzel aus der Classe A, der Congruenz $\cos[(p\pm 1)n]\equiv 1 \pmod{p}$ einer Zahl angehört, die durch 8 theilbar ist, so ist 2 quadratischer Rest; sonst Nicht-Rest. Daher mufs also 2 für die Primzahlen von der Form $8m+1$ oder $8m-1$ quadratischer Rest und für die andern quadratischer Nicht-Rest sein. Denn bezeichnet $\cos(n)$ in beiden Fällen eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos(8mn)\equiv 1 \pmod{p}$, so wird man $\cos(mn)\equiv\sin(mn) \pmod{p}$, daher auch, da $\cos(mn)^2+\sin(mn)^2\equiv 1 \pmod{p}$ ist, $2\cos(mn)^2\equiv 1 \pmod{p}$ erhalten, und hieraus folgt bekanntlich, dafs 2 ein quadratischer Rest ist. Ist hingegen p von der Form $8m+5$ oder $8m+3$ und bezeichnet $\cos(n)$ in beiden Fällen eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos[(8m+4)n]\equiv 1 \pmod{p}$, so wird zwar $\cos\left(\frac{2m+1}{2}n\right)^2\equiv\sin\left(\frac{2m+1}{2}n\right)^2 \pmod{p}$: beide Zahlen werden aber quadratische Nicht-Reste sein; folglich wird auch 2, da $2\cos\left[\left(\frac{2m+1}{2}\right)n\right]^2\equiv 1 \pmod{p}$ ist, quadratischer Nicht-Rest sein.

Da dieser Satz einen Theil des bekannten Reciprocitäts-Gesetzes ausspricht, so wollen wir auf analoge Weise einige Formeln entwickeln, aus welchen specielle Fälle des Theorems abgeleitet werden können.

Setzen wir $\cos(3\Phi)\equiv 0 \pmod{p}$, so folgt $\cos(\Phi)^3-3\cos(\Phi)\sin(\Phi)^2\equiv 0 \pmod{p}$, oder, wenn $\cos(\Phi)$ nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, $3\equiv\frac{\cos(\varphi)^2}{\sin(\varphi)^2} \pmod{p}$.

Hieraus leitet man leicht ab, dafs 3 von allen Primzahlen von der Form $12m+1$ und $12m-1$ quadratischer Rest, von den Primzahlen von der Form $12m+5$ und $12m+7$ quadratischer Nicht-Rest sein werde. Denn bezeichnet $\cos(n)$ eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos[(p\pm 1)n]\equiv 1 \pmod{p}$, die zur Classe A gehört, so wird für die beiden ersten Fälle $\cos(\Phi)\equiv\cos(m,n)$, folglich $\sin(\Phi)\equiv\sin(m,n)$, also reell sein. Um die beiden andern Fälle eben so leicht zu entwickeln, setze man $\sin(3\Phi)\equiv 0 \pmod{p}$, so erhält man $3\sin(\Phi)\cos(\Phi)^2-\sin(\Phi)^3\equiv 0 \pmod{p}$, oder $3\equiv\frac{\sin(\varphi)^2}{\cos(\varphi)^2} \pmod{p}$. Bezeichnet also $\cos(n)$ eine primitive Wurzel der Congruenz $\cos[(p\pm 1)n]\equiv 1 \pmod{p}$, die zur Classe B gehört, so wird man für $\cos(\Phi)$, $\cos[(2m+1)n]$ setzen können. Dann wird aber $\sin(\Phi)^2$ quadratischer Nicht-Rest und folglich auch 3 quadratischer Nicht-Rest sein.

Um für 5 das Gesetz zu finden, könnte man sich der Formeln

$$\cos 5x = \cos x\,[\cos x^4 + 5(-2\cos x^2 \sin x^2 + \sin x^4)]$$
$$= \cos x\,[\cos x^4 + 5((\cos x^2 - \sin x^2)^2 - \cos x^4)]$$

oder

$$\sin 5x = \sin x\,[\sin x^4 + 5((\cos x^2 - \sin x^2)^2 - \sin x^4)]$$

bedienen. Die vollständigen Bedingungen ergeben sich, wenn man $\cos(5x)$ oder $\sin(5x)$ nach dem Modul p congruent 0 setzt.

Wenn man indessen alle diese Formeln, die ihrem Wesen nach mit denjenigen übereinstimmen, durch welche *Lagrange* mehrere specielle Fälle des Reciprocitäts-Gesetzes bewies, genauer prüft, so wird man finden, dafs sie sich allgemein in einem Satze aussprechen lassen, den wir sogleich entwickeln wollen.

Ist nämlich α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n-1=0$, so erhält man $(x-\alpha)(x-\alpha^2)\ldots.(x-\alpha^{n-1}) = x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots.+1$. Setzt man $x=1$, so geht die Gleichung in $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\ldots.(1-\alpha^{n-1}) = n$ über. Nimmt man nun n ungerade an, und bemerkt dafs $\alpha^{n-1}=\frac{1}{\alpha}$, $\alpha^{n-2}=\frac{1}{\alpha^2}$ etc. ist, so erhält man

$$\frac{\left[(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots.\left(1-\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)\right]^2}{\alpha.\alpha^2\ldots.\alpha^{\frac{n-1}{2}}}(-1)^{\frac{n-1}{2}} = n.$$

Da nun n ungerade ist, so wird anch α^2 eine primitive Wurzel obiger Gleichung sein. Setzt man also in die letzte Formel statt α, α^2 und zieht auf beiden Seiten die Wurzel aus, so erhält man

$$\frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^6)\ldots.(1-\alpha^{n-1})}{\alpha^{\frac{n^2-1}{8}}}(-1)^{\frac{n-1}{4}} = \sqrt{n}.$$

Wir können indessen diesem Ausdrucke auch noch eine andere Gestalt geben. Es ist nemlich

$$(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) = 2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right) = 2-2\cos\frac{2\pi}{n} = 4\sin^2\frac{\pi}{n}.$$

Man erhält folglich, indem man je zwei Factoren auf diese Weise zusammenzieht,

$$\left\{2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots.\sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}\right\}^2 = n,$$

und hieraus

$$2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots.\sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n} = \sqrt{n}.$$

Bedenkt man noch, dafs $2^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\cos\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}=1$ ist (welche Formel ebenfalls leicht aus $(x-\alpha)(x-\alpha^2)\ldots\ldots(x-\alpha^{n-1})=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\ldots+1$ folgt, wenn man $x=-1$ setzt), so leitet man aus diesen beiden Formeln leicht die dritte

$$\text{tang}\frac{\pi}{n}\,\text{tang}\frac{2\pi}{n}\,\text{tang}\frac{3\pi}{n}\ldots\ldots\text{tang}\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}=\sqrt{n}$$

ab.

Da nun

$$\frac{\cos(2nx)-1}{\cos x^2-1}$$

$$=K\left[\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\ldots\left(\cos x-\cos(n-1)\frac{\pi}{n}\right)\right]^2$$

ist, wo K eine bestimmte Zahl bedeutet, und in der Entwicklung nur Potenzen von $\cos x^2$ vorkommen, so folgt, dafs wenn man für $\cos x^2$, $1-z$ und den ganzen Ausdruck $=0$ setzt, die Wurzeln der transformirten Gleichung $\sin^2\frac{\pi}{n}$, $\sin^2\frac{2\pi}{n}$, $\ldots\ldots$ $\sin^2\left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ sein werden. In dieser Gleichung wird also nach dem Vorhergehenden das letzte Glied, durch den Coefficienten von $z^{\frac{n-1}{2}}$ dividirt, gleich $\frac{n}{2^{n-1}}(-1)^{n-1}$ werden. Ist nun $p\pm 1$ ein Vielfaches von n, also $p\pm 1=m.n$, und gehört $\cos(n')$ zu n, so folgt aus den frühern Entwicklungen die Congruenz:

$$\frac{\cos 2nx-1}{\cos^2 x-1}$$

$$\equiv K\left[(\cos x-\cos(n'))(\cos 2x-\cos(2n'))\ldots\ldots\left(\cos x-\cos\left(\frac{n-1}{2}n'\right)\right)\right]^2\ (\text{mod.}\ p),$$

welche so zu verstehen ist, dafs auf beiden Seiten die Coefficienten der entsprechenden Potenzen von $\cos x$ nach dem Modul p congruent werden. Setzt man statt $\cos^2 x$, $1-z$, oder entwickelt die Congruenz $\frac{\cos 2nx-1}{\cos x^2-1}\equiv 0$ (mod. p) nach Potenzen von $\sin^2 x$, so ist es klar, dafs die Wurzeln dieser Congruenz $\sin(n')^2$, $\sin(2n')^2$, $\ldots\ldots$ $\sin\left(\frac{n-1}{2}n'\right)^2$ sein werden. Hieraus folgt aber auch $\sin(n')^2\sin(2n')^2\ldots\ldots\sin\left(\frac{n-1}{2}n'\right)^2\equiv\frac{n}{2^{n-1}}$ (mod. p). Da man aber auch hier leicht $2^{n-1}\cos(n')\cos(2n')\ldots\ldots\cos\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)n'\right)\equiv 1$ (mod. p) findet, so folgt auch hier:

$$\text{tang}(n')\,\text{tang}(2n')\ldots\ldots\text{tang}\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)n'\right)\equiv\sqrt{n}\ (\text{mod.}\ p).$$

Ist p von der Form $4K+1$ und n ein Factor von K, so wird die linke Seite der Congruenz reell; folglich ist n dann ein quadratischer Rest.

Ist hingegen n ein Factor von $p+1$, so wird das Quadrat der linken Seite der Congruenz offenbar nur dann quadratischer Rest, wenn $\frac{n-1}{2}$ durch 2 aufgeht, sonst Nicht-Rest. Daher wird auch n, als Factor $p+1$, nur dann nach p quadratischer Rest sein, wenn es von der Form $4K+1$ ist, sonst Nicht-Rest.

Ist p von der Form $4K-1$ und n ein Factor von $p+1$, so folgt auf ähnliche Weise, dafs dann n jedenfalls quadratischer Rest sein wird. Ist hingegen n ein Factor von $4p-1$, so wird es nur dann Rest sein, wenn p von der Form $4K+1$ ist; sonst wird es Nicht-Rest sein.

Die hier angewandten Schlufsfolgen wurden etwas weitläufig und das Reciprocitäts-Gesetz ergab sich nicht vollständig aus ihnen. Ihre wissenschaftliche Bedeutung liegt zunächst nur in der Verbindung früherer Methoden mit späteren und fruchtbareren, wie wir in einer folgenden Abhandlung zeigen wollen. Eine tiefere Begründung und allgemeinere Durchführung derselben behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor.

6.

Sur la sommation des transcendentes à différentielles algébriques.

(Par Mr. *Jürgensen*, de Copenhague.)

Les théorèmes de l'illustre *Abel,* qu'on trouve dans le Tome 3me p. 314, Tome 6me p. 78 et Tome 4me p. 200 de ce journal, contiennent sans doute ce qu'on sait de plus général sur la sommation des transcendentes à différentielles algébriques. Je vais montrer dans cette note, que ces théorèmes sont compris dans une seule formule, qui en même temps donne l'expression de la somme cherchée dans le cas le plus général. Cette formule est celle que j'ai donnée dans mes remarques sur la décomposition d'une certaine classe de fonctions *), et qu'on peut écrire ainsi:

$$1.\quad \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \int \frac{f a_i}{(a_i - x)\varphi' a_i}\, \partial a_i = \int \frac{fx}{\varphi x}\, \partial y - H\left[\frac{1}{t-x}\int \frac{ft}{\varphi t}\, \partial y\right] - C,$$

avec la condition que les intégrales sous le signe S ne contiennent pas d'autres quantités dépendantes de y que a_i, condition qui sera toujours remplie dans ce qui va suivre.

Les transcendentes qui font l'objet de cette note sont comprises dans la forme

$$\int \pi(x, z_k)\, \partial x,$$

$\pi(x, z_k)$ étant une fonction rationnelle de x et z_k, en désignant par z_k une des racines $z_1, z_2, z_3, \ldots . z_m$ de l'équation

$$Z = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots . + p_{m-1} z + p_m = 0,$$

dont les coefficiens sont des fonctions entières de x.

Je remarque d'abord, qu'on peut reduire la fonction $\pi(x, z_k)$ à la forme plus simple

$$\pi(x, z_k) = \frac{\lambda(x, z_k)}{\nu(x)},$$

λ et ν étant des fonctions entières. En effet, supposons pour un moment $k = 1$ et

$$\pi(x, z_1) = \frac{P_1}{Q_1},$$

*) Cah. I. du tome prés.

où P_1 et Q_1 sont des fonctions entières de x et z_1, et soient P_2, Q_2, P_3, Q_3 etc. ce que deviennent P_1, Q_1 en y changeant z_1 en z_2, z_3 etc. Cela posé, on aura

$$\pi(x, z_1 = \frac{P_1 Q_2 Q_3 \ldots . Q_m}{Q_1 Q_2 Q_3 \ldots . Q_m}.$$

Or, $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots . Q_m$ est une fonction entière et symétrique des racines z_1, z_2, z_3, $\ldots . z_m$ et par conséquent une fonction entière des coefficiens p_1, p_2, $\ldots . p_m$, c'est-à-dire de x seul. Et si l'on donne à l'équation $Z = 0$ la forme

$$z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots . + p_{m-1} z + p_m$$
$$= (z - z_1)(z^{m-1} + s_1 z^{m-2} + s_2 z^{m-3} + \ldots . + s_{m-2} z + s_{m-1}),$$

on voit que $Q_2 Q_3 \ldots . Q_m$ qui est une fonction entière de s_1, s_2, $\ldots . s_{m-1}$, est en même temps une fonction entière de p_1, p_2, $\ldots . p_{m-1}$ et z_1, ou bien, ce qui est la même chose, de x et z_1. Maintenant, en remarquant que P_1 est une pareille fonction, on voit que $\pi(x, z_1)$, et par conséquent aussi $\pi(x, z_k)$ peut toujours se mettre sous la forme indiquée.

Considérons à présent les intégrales de la forme

$$\psi x = \int \frac{\lambda(x, z_k)}{\nu(x)} \partial x.$$

Soit

$$\theta x = q_1 z^{m-1} + q_2 z^{m-2} + \ldots . + q_{m-1} z + q_m,$$

q_1, q_2, $\ldots . q_m$ étant des fonctions de x et y, mais rationnelles et entières par rapport à x: substituons au lieu de z les racines z_1, z_2, z_3, $\ldots . z_m$ de l'équation $Z = 0$ et formons le produit

$$\theta z_1 . \theta z_2 . \theta z_3 \ldots . \theta z_m,$$

ce qui revient à éliminer z entre les équations $Z = 0$ et $\theta z = 0$. Désignant ce produit, rationnel et entier en x, par Φx, et les racines de l'équation $\Phi x = 0$ par a_1, a_2, $\ldots . a_n$, et faisant pour abréger $\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \theta'$, on pourra supposer dans la formule (1.)

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{\theta' z_1}{\theta z_1} \lambda(x, z_1) + \frac{\theta' z_2}{\theta z_2} \lambda(x, z_2) + \frac{\theta' z_3}{\theta z_3} \lambda(x, z_3) + \ldots . + \frac{\theta' z_m}{\theta z_m} \lambda(x, z_m),$$

fonction, qui étant rationnelle et symétrique par rapport aux racines z_1, z_2, z_3, $\ldots . z_m$, sera évidemment rationnelle en x. Si l'on la reduit au même dénominateur, et qu'après avoir différentié le dénominateur par rapport à y on fait $x = a_i$, on trouve

$$\frac{fa_i}{\varphi' a_i} = \frac{\theta' z_1 . \theta z_2 . \theta z_3 \ldots . \theta z_m \lambda(x, z_1) + \theta' z_2 . \theta z_1 . \theta z_3 \ldots . \theta z_m . \lambda(x, z_2) + \ldots .}{\theta' z_1 . \theta z_2 . \theta z_3 \ldots . \theta z_m + \theta' z_2 . \theta z_1 . \theta z_3 \ldots . \theta z_m + \ldots .},$$

où l'on doit faire dans les fonctions θ, θ' et λ, $x = a_i$, ce qui fait évanouir φx et par conséquent au moins un de ses facteurs, θz_k par exemple; donc

$$\frac{f a_i}{\varphi' a_i} = \lambda(a_i, z_k).$$

En substituant cette valeur et celle de $\frac{fx}{\varphi x}$ dans l'équation (1.) et en se rappelant que

$$\int \frac{fx}{\varphi x}\,\partial y = \lambda(x, z_1)\log\theta z_1 + \lambda(x, z_2)\log\theta z_2 + \ldots + \lambda(x, z_m)\log\theta z_m,$$

on a l'expression d'un nombre n de transcendentes de la forme

$$\psi a_i = \int \frac{\lambda(a_i, z_k)}{a_i - x}\,\partial a_i.$$

Lorsque plusieurs des racines $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont égales, on voit que la valeur de z_k et θz_k sera aussi la même pour toutes ces racines, de sorte que le résultat de la sommation ne change pas; seulement on aura par exemple $\mu.\psi a_i$ au lieu de ψa_i, μ étant le nombre des racines égales à a_i. On parvient au même résultat en formant pour ce cas, au moyen des règles de la décomposition des fractions, une formule analogue à l'équation (1.).

Du cas particulier que nous avons considéré, on passe au cas général, savoir à la sommation des transcendentes

$$\psi a_i = \int \frac{\lambda(a_i, z_k)}{\nu(a_i)}\,\partial a_i$$

en faisant usage d'un raisonnement tout-à-fait semblable à celui d'*Abel*, vol. 3. p. 319 — 20 de ce journal.

Cependant on y parvient plus facilement dans le cas particulier où il s'agit de sommer les transcendentes de la forme

$$\psi a_i = \int \frac{\lambda a_i}{(a_i - x) z_k}\,\partial a_i,$$

λ étant toujours une fonction entière, et z_k étant de la forme $c_k \Delta$, c_k désignant une constante et Δ une fonction de a_i. En effet, en considérant alors la fonction rationnelle en x,

$$\lambda x.\left[\frac{\theta' z_1}{z_1.\theta z_1} + \frac{\theta' z_2}{z_2.\theta z_2} + \frac{\theta' z_3}{z_3.\theta z_3} + \ldots + \frac{\theta' z_m}{z_m.\theta z_m}\right],$$

on voit que cette fonction ayant été reduite au même dénominateur devient divisible en haut et en bas par Δ^m lorsque

$$z_2 z_3 \ldots z_m + z_1 z_3 \ldots z_m + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire lorsque l'équation $Z=0$ manque de l'avant-dernier terme. Faisant donc cette fraction rationnelle $=\frac{fx}{\varphi x}$ on pourra supposer comme ci-dessus

$$\Phi x = \theta z_1 . \theta z_2 . \theta z_3 \ldots . \theta z_m .$$

Par exemple, lorsque $Z=z^m-p$, ces conditions sont remplies, et l'on a, en désignant par $1, \alpha, \alpha^2, \ldots . \alpha^{m-1}$ les racines de l'équation $z^m-1=0$, et en faisant $\Delta=\sqrt[m]{p}$,

$$z_k = \alpha^k \Delta,$$

d'où, en formant la fonction $\frac{fa_i}{\varphi' a_i}$ et substituant dans (1.), on tire la somme d'un nombre n de transcendentes de la forme

$$\psi a_i = \alpha^{-k} \int \frac{\lambda a_i}{(a_i - x)\Delta} \partial a_i .$$

Si l'on fait $m=2$, on retombe sur les transcendentes généralement nommées Abeliennes, et sur les transcendentes elliptiques lorsque p n'est que du quatrième degré.

20. Avril 1838.

7.

Démonstration de la formule générale d'intégration indéfinie proposée par Mr. Hill.

(Par Mr. *Ramus*, prof. à Copenhague.)

Dans le 4me cah. du 18me vol. de ce journal Mr. *Hill* a donné la formule

$$1. \quad \int \frac{du}{u\,U\,\psi(u)} = \log(\psi u) + \text{const.}$$

U désignant le terme indépendant de z qui se trouve dans le développement de la fonction $\frac{z\psi,\left(\frac{u}{z}\right)}{(u-z\psi u)^2}$, $\psi,$ étant la fonction inverse de ψ ou déterminée par

$$2. \quad \psi x = y, \qquad x = \psi, y.$$

Démonstration. Par la formule de *Stirling* on a

$$\frac{u\,z\psi,\left(\frac{u}{z}\right)}{(u-z\psi u)^2} = \left(\frac{z}{u}\psi,(0) + \frac{\psi,'(0)}{1} + \frac{u}{z}\cdot\frac{\psi,''(0)}{1.2} + \frac{u^2}{z^2}\cdot\frac{\psi,'''(0)}{1.2.3} + \ldots.\right)\left(1-\frac{z}{u}\psi u\right)^{-2}$$

et par celle de *Newton*

$$\left(1-\frac{z}{u}\psi u\right)^{-2} = 1 + 2\frac{z}{u}\psi u + 3\frac{z^2}{u^2}(\psi u)^2 + 4\frac{z^3}{u^3}(\psi u)^3 + \ldots.$$

par conséquent

$$u\,U = \psi,'(0) + \psi,''(0).\frac{\psi u}{1} + \psi,'''(0).\frac{(\psi u)^2}{1.2} + \ldots.$$

ou, par la sommation de la série,

$$3. \quad u\,U = \psi,'(\psi u).$$

Or les équations (2.) donnent

$$\psi'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dx}{dy} = \psi,'(y) = \psi,'(\psi x),$$

partant

$$\psi,'(\psi x) = \frac{1}{\psi'(x)},$$

ce qui transforme l'équation (3.) en celle-ci

$$u\,U = \frac{1}{\psi'(u)},$$

qui donne

$$\frac{du}{u\,U\,\psi(u)} = \frac{\psi'(u)\,du}{\psi(u)},$$

et par l'intégration

$$\int \frac{du}{u\,U\,\psi(u)} = \int \frac{\psi'(u)\,du}{\psi(u)} = \log(\psi u) + \text{const.},$$

ce qui est l'équation (1.) de Mr. *Hill.*

Copenhague le 28. Sept. 1838.

8.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten, No. 10. im 2ten, No. 15. im 3ten, No. 21. im 4ten Hefte des vorigen und No. 2. im 1sten Hefte dieses Bandes)

Elfter Abschnitt.

§. 116.

Von den Modular-Integralen der zweiten Art.

Die Modular-Integrale der zweiten Art sind solche Integrale, deren Werthe im Allgemeinen durch Modularlogarithmen und durch Modular-Integrale der ersten Art ausgedrückt werden. Es ist nach §. 65.

$$\frac{\mathrm{el}(a+u)+\mathrm{el}(a-u)}{2} = \mathrm{el}\,a - \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

Wird diese Gleichung mit ∂u multiplicirt und so integrirt, dafs das Integral für $u = 0$ verschwindet, so erhält man

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2} = u.\mathrm{el}\,a - \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u},$$

und es ist also rückwärts:

$$1.\quad \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 a} = u.\mathrm{el}\,a - \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}.$$

Schon im §. 39. kam vor, dafs

$$\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}\,a\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)} = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a} - \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$$

ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂u und integrirt, so entsteht die Gleichung

$$\int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}^2 u\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.u - \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u\,\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u};$$

und wird hierin für das auf der rechten Seite befindliche Integral sein Werth, der Gleichung (1.) gemäfs, substituirt, so erhält man die Gleichung

$$\int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{cn}^2 u \, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = (k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a - \operatorname{el} a) u + \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2},$$

welche aber noch eine kleine Reduction gestattet. Da nämlich $k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a - \operatorname{el} a = \operatorname{elc} a - E$ ist, so erhalten wir

$$2. \quad \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \,.\, \operatorname{cn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = -u(E - \operatorname{elc} a) + \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2}.$$

Da ferner $\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$ ist, so erhalten wir, wenn diese Gleichung mit ∂u multiplicirt und integrirt wird,

$$\int_0 \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{dn}^2 u \, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \,.\, u - \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u \, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

und es ist also

$$3. \quad \int_0 \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{dn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = (\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{el} a) \,.\, u + \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2}.$$

Da $\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{el} a = \mathfrak{El}' a - a$ ist, so kann dieser Ausdruck noch für den Coefficienten von u in der vorigen Gleichung substituirt werden.

Sehen wir von den constanten Factoren in den drei obigen Integralen ab, so sind dieselben

$$\int \frac{\operatorname{sn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}, \quad \int \frac{\operatorname{cn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad \int \frac{\operatorname{dn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

und nach den drei verschiedenen Modular-Functionen, welche in den Zählern vorkommen, nennen wir das in der Gleichung (1.) vorkommende Integral das *Sinus-Integral,* das in der Gleichung (2.) vorkommende Integral das *Cosinus-Integral* und das in der Gleichung (3.) vorkommende endlich das *Differente-Integral.* Die veränderliche Gröfse u nennen wir das *Argument des Integrals* und die Constante a *den Parameter.* Jedes der drei Integrale hängt also von drei Gröfsen ab: von dem Argumente u, von dem Parameter a und von dem Modul k. Wir wenden die folgende Bezeichnung an

$$\mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \,.\, \operatorname{sn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

$$\mathfrak{C}(u, a) = \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \,.\, \operatorname{cn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

$$\mathfrak{D}(u, a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \,.\, \operatorname{dn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$

und ändern diese Bezeichnung ab in $\mathfrak{S}'(u,a)$, $\mathfrak{E}'(u,a)$, $\mathfrak{D}'(u,a)$, wenn der Modul k mit k' vertauscht wird. Hiernach haben wir also die drei Fundamental-Formeln

$$\mathfrak{S}(u,a) = u.\operatorname{el} a - \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2},$$

$$\mathfrak{E}(u,a) = -u(E - \operatorname{elc} a) + \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2},$$

$$\mathfrak{D}(u,a) = u(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{el} a) + \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2}, \text{ oder auch}$$

$$\mathfrak{D}(u,a) = u(\mathfrak{El}' a - a) + \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2}.$$

Die vorstehenden drei Integrale hängen auf eine einfache Weise von einander ab. Es ist zunächst

$$\mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{E}(u,a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a.u \text{ und}$$

$$\mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{D}(u,a) = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a.u = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}.u,$$

$$\mathfrak{D}(u,a) - \mathfrak{E}(u,a) = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.u = \frac{k' \operatorname{cnc} a}{\operatorname{cn} a}.u,$$

da $\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a = \frac{k'^2 \operatorname{tn} a}{\operatorname{dn} a} = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} = \frac{k' \operatorname{cnc} a}{\operatorname{cn} a}$ ist.

§. 117.

Eintheilung der Modular-Integrale der zweiten Art in vier Classen.

Die Modular-Integrale der zweiten Art haben einige Aehnlichkeit mit den im Zusatze zu §. 61. aufgeführten achtzehn Integralen; die zu integrirenden, mit ∂u multiplicirten Functionen des §. 61. enthalten im Zähler entweder nur eine Modular-Function des Argumentes u, oder zwei verschiedene Modular-Functionen des veränderlichen Argumentes u; wogegen in den Zählern der Integrale $\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{E}(u,a)$ und $\mathfrak{D}(u,a)$ hinter dem Integrations-Zeichen das *Quadrat* einer Modular-Function des Argumentes u vorkommt.

Diese Aehnlichkeit läfst sich noch weiter verfolgen. Die Ausdrücke der Werthe der Modular-Integrale enthalten jeder den halben Unterschied der Modular-Logarithmen der Argumente $a+u$ und $a-u$, und so wie die Werthe der im §. 61. aufgeführten achtzehn Integrale sich theils als hyperbolische, theils als cyklische Arcus darstellen lassen, so läfst sich auch die Differenz $\frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2}$ bald als ein hyperbolischer,

bald als ein cyklischer Arcus ausdrücken. Setzt man überhaupt $\mathrm{lm}\, x = \log(\Phi x)$, so ist auch $\mathrm{lm}(a+u) = \log\Phi(a+u)$ und $\mathrm{lm}(a-u) = \log\Phi(a-u)$, also

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} = \log\sqrt{\frac{\varphi(a+u)}{\varphi(a-u)}}.$$

Sind nun a und u entweder beide reell, oder beide imaginär, so läfst sich der Bruch $\frac{\varphi(a+u)}{\varphi(a-u)}$ in beiden Fällen unter die Form $\frac{P+Q}{P-Q}$ bringen, worin P und Q reell ist, und es ist also die Differenz

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} = \log\sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{Q}{P}\right)$$

ein *hyperbolischer Arcus, welcher auch wohl als ein Aggregat mehrerer hyperbolischen Arcus* dargestellt werden kann.

Wenn aber eines der beiden Argumente a und u reell, das andere hingegen imaginär ist, so läfst sich die Differenz $\frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2}$ in beiden Fällen in der Form $\log\sqrt{\frac{P+Qi}{P-Qi}}$ darstellen, in welcher wieder P und Q reell sind und es ist also nun

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2i} = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{P+Qi}{P-Qi}} = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{Q}{P}\right)$$

ein *cyklischer* Arcus, welcher auch wohl als ein Aggregat *mehrerer cyklischen Arcus* dargestellt werden kann.

Man kann daher die Modular-Integrale der zweiten Art eintheilen in solche, welche von *hyperbolischer Natur* sind und in solche, welche von *cyklischer Natur* sind, oder besser sogleich in vier Classen von Integralen, wovon zwei zur ersten und zwei zur zweiten Gattung gehören.

Die drei Integrale $\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{C}(u,a)$, $\mathfrak{D}(u,a)$ machen, wenn a und u reell sind, eine Classe von Integralen mit hyperbolischer Natur aus; setzt man aber ai für a, so wird jedes der drei Integrale imaginär; es enthält dann den Factor i; läfst man diesen Factor weg, so sind die Integrale reell und von cyklischer Natur; wir bezeichnen sie aus diesem Grunde mit $S(u,a)$, $C(u,a)$, $D(u,a)$.

Setzen wir in den vorigen sechs Integralen ui für u und führen sogleich reelle cyklische Modular-Functionen des Argumentes u ein, so erhalten sie den Modul k'. Um dieses zu vermeiden, vertauschen wir in den sechs vorigen Integralen zuerst die beiden conjugirten Modul, ehe wir ui für i setzen. Dadurch erhalten die Sinus-Integrale den Factor $-i$,

die Cosinus- und Differente-Integrale aber den Factor i, und nach Weglassung dieser Factoren verwandeln sich die drei Integrale $\mathfrak{S}'(u,a)$, $\mathfrak{C}'(u,a)$ und $\mathfrak{D}'(u,a)$ in drei andere von cyklischer Natur, welche wir durch $'S(u,a)$, $'C(u,a)$ und $'D(u,a)$ bezeichnen. Die drei Integrale $S'(u,a)$, $C'(u,a)$ und $D'(u,a)$ aber verwandeln sich nun in drei Integrale von hyperbolischer Natur, welche wir durch $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,a)$ und $'\mathfrak{D}(u,a)$ bezeichnen. Hiernach haben wir also im Ganzen zwölf Modular-Integrale der zweiten Art, und hiervon rechnen wir

Zur ersten Classe: $S(u,a)$, $C(u,a)$, $D(u,a)$;
Zur zweiten Classe: $\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{C}(u,a)$, $\mathfrak{D}(u,a)$;
Zur dritten Classe: $'S(u,a)$, $'C(u,a)$, $'D(u,a)$;
Zur vierten Classe: $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,a)$, $'\mathfrak{D}(u,a)$.

Bald nachher werden wir einen hinreichenden Grund für diese besondere Anordnung der Reihefolge der vier Classen angeben.

Die folgenden einfachen Gleichungen drücken in imaginärer Form den gegenseitigen Zusammenhang unter den zwölf Integralen aufs vollständigste aus:

1. $\mathfrak{S}(u,ai)=iS(u,a)$, $\mathfrak{C}(u,ai)=iC(u,a)$, $\mathfrak{D}(u,ai)=iD(u,a)$,
2. $S(u,ai)=i\mathfrak{S}(u,a)$, $C(u,ai)=i\mathfrak{C}(u,a)$, $D(u,ai)=i\mathfrak{D}(u,a)$,
3. $\mathfrak{S}'(ui,a)=-i'S(u,a)$, $\mathfrak{C}'(ui,a)=i'C(u,a)$, $\mathfrak{D}'(ui,a)=i'D(u,a)$,
4. $'S'(ui,a)=-i\mathfrak{S}(u,a)$, $'C'(ui,a)=i\mathfrak{C}(u,a)$, $'D'(ui,a)=i\mathfrak{D}(u,a)$,
5. $S'(ui,a)=-i'\mathfrak{S}(u,a)$, $C'(ui,a)=i'\mathfrak{C}(u,a)$, $D'(ui,a)=i'\mathfrak{D}(u,a)$,
6. $'\mathfrak{S}'(ui,a)=-iS(u,a)$, $'\mathfrak{C}'(ui,a)=iC(u,a)$, $'\mathfrak{D}'(ui,a)=iD(u,a)$,
7. $'S(u,ai)=i'\mathfrak{S}(u,a)$, $'C(u,ai)=i'\mathfrak{C}(u,a)$, $'D(u,ai)=i'\mathfrak{D}(u,a)$,
8. $'\mathfrak{S}(u,ai)=i'S(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,ai)=i'C(u,a)$, $'\mathfrak{D}(u,ai)=i'D(u,a)$,

und aus ihnen erhält man noch durch Zusammensetzung die folgenden Formeln:

9. $S'(ui,ai)='S(u,a)$, $C'(ui,ai)=-'C(u,a)$, $D'(ui,ai)=-'D(u,a)$,
10. $'S'(ui,ai)=S(u,a)$, $'C'(ui,ai)=-C(u,a)$, $'D'(ui,ai)=-D(u,a)$,
11. $\mathfrak{S}'(ui,ai)='\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{C}'(ui,ai)=-'\mathfrak{C}(u,a)$, $\mathfrak{D}'(ui,ai)=-'\mathfrak{D}(u,a)$,
12. $'\mathfrak{S}'(ui,ai)=\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}'(ui,ai)=-\mathfrak{C}(u,a)$, $'\mathfrak{D}'(ui,ai)=-\mathfrak{D}(u,a)$,

in welchen sich das an den Buchstaben $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ auf der rechten Seite befindliche Comma auf eine Vertauschung des Moduls k mit k' bezieht,

hingegen das Comma zur Linken auf die Unterscheidung der ersten Classe von der dritten, oder auch der zweiten Classe von der vierten.

§. 118.

Fundamental-Formeln für die Integrale der ersten Classe.

Setzt man in den Ausdrücken für $\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{C}(u,a)$, $\mathfrak{D}(u,a)$ im §. 116. jetzt ai für a und läfst man den davon herrührenden Factor i auf beiden Seiten weg, so erhält man für die Modular-Integrale der ersten Classe (zweiter Art) zunächst die folgenden Ausdrücke:

$$1.\quad \begin{cases} S(u,a) = \int_0 \frac{k^2\,\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{1+k^2\,\mathfrak{Sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2 u}, \\ C(u,a) = \int_0 \frac{k^2\,\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,a\,.\,\mathrm{cn}^2 u\,.\,\partial u}{\mathfrak{Dn}\,a\,(1+k^2\,\mathfrak{Sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2 u)}, \\ D(u,a) = \int_0 \frac{\mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,a\,.\,\mathrm{dn}^2 u\;\partial u}{1+k^2\,\mathfrak{Sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2 u}, \end{cases}$$

welche sich, wenn man cyklische Functionen statt der hyperbolischen einführt, in

$$2.\quad \begin{cases} S(u,a) = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{tn}'\,a\,\mathrm{dn}'\,a\,.\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{\mathrm{cn}'^2\,a\,(1+k^2\,\mathrm{tn}'^2\,a\,\mathrm{sn}^2 u)} = \int_0 \frac{\mathrm{dnc}'\,a}{\mathrm{tnc}'\,a\,\mathrm{snc}'^2\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tn}'^2\,a\,\mathrm{sn}^2 u}, \\ C(u,a) = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{tn}'\,a\,.\,\mathrm{cn}^2 u\,.\,\partial u}{\mathrm{dn}'\,a\,(1+k^2\,\mathrm{tn}'^2\,a\,\mathrm{sn}^2 u)}, \\ D(u,a) = \int_0 \frac{\mathrm{tn}'\,a\,\mathrm{dn}'\,a\,.\,\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tn}'^2\,a\,\mathrm{sn}^2 u} \end{cases}$$

verwandeln. Die Werthe dieser Integrale werden durch die Formeln:

$$3.\quad \begin{cases} S(u,a) = \quad u\,.\,\mathfrak{El}\,a - \frac{\mathrm{lm}\,(u+ai) - \mathrm{lm}\,(u-ai)}{2i}, \\ C(u,a) = -u\,(a - \mathfrak{E}' + \mathrm{elc}'\,a) + \frac{\mathrm{lm}\,(u+ai) - \mathrm{lm}\,(u-ai)}{2i}, \\ D(u,a) = \quad u\,(\mathrm{el}'\,a - a) + \frac{\mathrm{lm}\,(u+ai) - \mathrm{lm}\,(u-ai)}{2i}, \end{cases}$$

ausgedrückt und die darin vorkommende Differenz $\frac{\mathrm{lm}\,(u+ai) - \mathrm{lm}\,(u-ai)}{2i}$ ist zwar reell, läfst sich aber im Allgemeinen nicht anders in einer reellen Form darstellen, als durch Entwicklung in unendliche Reihen.

Setzt man den Parameter $a = K'$, so hat man, da $\frac{\mathrm{lm}\,(u+iK') - \mathrm{lm}\,(u-iK')}{2i} = (K' - \mathfrak{E}')\,u + \frac{1}{2}\pi$ ist, die folgenden particulären

Bestimmungen:

$$4. \quad S(u,K') = \tfrac{1}{0}, \qquad C(u,K') = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad D(u,K') + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Setzt man aber das Argument $u = K$, so erhält man, da $\frac{\operatorname{lm}(K+ai) - \operatorname{lm}(K-ai)}{2i} = E.a$ ist, die Bestimmungen

$$5. \quad \begin{cases} S(K,a) = K.\mathfrak{El}\,a - E.a = (K-E)\,a + (\operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a - \operatorname{el}'a).K, \\ C(K,a) = K(E' - \operatorname{elc}'a) - (K-E)\,a, \\ D(K,a) = K.\operatorname{el}'a - (K-E)\,a. \end{cases}$$

Den Zusammenhang unter den Integralen der ersten Classe drücken endlich die drei Formeln aus:

$$6. \quad \begin{cases} S(u,a) + C(u,a) = \frac{k^2 \operatorname{tn}'a}{\operatorname{dn}'a}.u = \frac{\operatorname{dnc}'a}{\operatorname{tnc}'a}.u = \frac{k\operatorname{cnc}'a}{\operatorname{cn}'a}.u, \\ S(u,a) + D(u,a) = \operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a.u = \frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a}.u, \\ D(u,a) - C(u,a) = (k'^2 \operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a).u, \end{cases}$$

§. 119.

Fundamental-Formeln für die Integrale der dritten Classe.

Vertauscht man in den Formeln des §. 116. den Modul k mit k', und setzt ui für u, so erhält man, den Formeln (3.) des §. 117. gemäfs:

$$'S(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a\operatorname{cn}'a\operatorname{dn}'a\operatorname{tn}^2 u.\partial u}{1 + k'^2\operatorname{sn}'^2 a\operatorname{tn}^2 u},$$

$$'C(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a.\partial u}{\operatorname{cn}^2 u(1 + k'^2\operatorname{sn}'^2 a\operatorname{tn}^2 u)},$$

$$'D(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a\operatorname{dn}^2 u.\partial u}{\operatorname{cn}^2 u(1 + k'^2\operatorname{sn}'^2 a\operatorname{tn}^2 u)},$$

und da $\operatorname{cn}^2 u(1 + k'^2\operatorname{sn}'^2 a\operatorname{tn}^2 u) = 1 - \operatorname{dn}'^2 a.\operatorname{sn}^2 u$ ist, so lassen sich jene Integrale auch also darstellen:

$$1. \quad \begin{cases} 'S(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a\operatorname{cn}'a\operatorname{dn}'a.\operatorname{sn}^2 u.\partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2 a.\operatorname{sn}^2 u}, \\ 'C(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a.\partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2 a.\operatorname{sn}^2 u}, \\ 'D(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a.\operatorname{dn}^2 u.\partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2 a.\operatorname{sn}^2 u}. \end{cases}$$

Für die Werthe dieser drei Integrale erhält man die Formeln:

$$2.\quad \begin{cases} {}'S(u,a) = -u.\mathrm{el}'a + \dfrac{\mathrm{lm}'(a+ui)-\mathrm{lm}'(a-ui)}{2i}, \\ {}'C(u,a) = -u(E'-\mathrm{elc}'a) + \dfrac{\mathrm{lm}'(a+ui)-\mathrm{lm}'(a-ui)}{2i}, \\ {}'D(u,a) = u(\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a-\mathrm{el}'a) + \dfrac{\mathrm{lm}'(a+ui)-\mathrm{lm}'(a-ui)}{2i}. \end{cases}$$

Setzt man den Parameter $a=K'$, so hat man, da $\dfrac{\mathrm{lm}'(K'+ui)-\mathrm{lm}'(K'-ui)}{2i} = E'.u$ ist, die particulären Formeln

$$3.\quad {}'S(u,K')=0, \quad {}'C(u,K')=0, \quad {}'D(u,K)=\tfrac{1}{0}.$$

Nimmt man aber das Argument $u=K$, so erhält man, da $\dfrac{\mathrm{lm}'(a+iK)-\mathrm{lm}'(a-iK)}{2i} = (K-E)a+\frac{1}{2}\pi$ ist,

$$4.\quad \begin{cases} {}'S(K,a) = (K-E).a-K.\mathrm{el}'a+\frac{1}{2}\pi, \\ {}'C(K,a) = (K-E).a-K(E'-\mathrm{elc}'a)+\frac{1}{2}\pi, \\ {}'D(K,a) = (K-E).a+K(\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a-\mathrm{el}'a)+\frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Der Zusammenhang unter den Integralen der dritten Classe wird ausgedrückt durch die allgemeinen Formeln:

$$5.\quad \begin{cases} {}'C(u,a)-{}'S(u,a) = k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.u, \\ {}'D(u,a)-{}'S(u,a) = \mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a.u = \dfrac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}.u, \\ {}'D(u,a)-{}'C(u,a) = \dfrac{\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{tnc}'a}.u = \dfrac{k\,\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}.u. \end{cases}$$

§. 120.

Die einfachsten reellen Relationen unter den Integralen der ersten und dritten Classe.

Man findet leicht $1-\mathrm{dn}'^2a\,\mathrm{sn}^2(K-u) = \dfrac{k'^2(\mathrm{sn}'^2a+\mathrm{cn}'^2a\,\mathrm{sn}^2u)}{\mathrm{dn}^2u}$.

Daher ist

$${}'S(K-u,a) = \int \frac{-\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}\cdot\frac{\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1+\dfrac{\mathrm{sn}^2u}{\mathrm{tn}'^2a}} = \int \frac{-k^2\,\mathrm{tnc}'a}{\mathrm{dnc}'a}\cdot\frac{\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2a\,\mathrm{sn}^2u},$$

oder

$$\partial\,{}'S(K-u,a) = -\partial C(u,K'-a),$$

und also

$${}'S(K-u,a)+C(u,K'-a) = \text{const.}$$

Die Constante findet man, indem man entweder $u=0$, oder $u=K$ setzt. Daher ist

$$6.\quad \begin{cases} {}'S(K-u,a)+C(u,K'-a) = {}'S(K,a) = C(K,K'-a) \text{ und} \\ {}'S(u,K'-a)+C(K-u,a) = {}'S(K,K'-a) = C(K,a); \end{cases}$$

denn man braucht in der vorigen Gleichung nur $K-u$ für u und $K'-a$ für a zu seten. Ferner findet man, da

$1-\mathrm{dn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2(K-u) = \frac{k'^2\,\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{dnc}'^2 a\,\mathrm{dn}^2 u}(1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)$ ist,

$$'C(K-u,a) = \int \frac{-\mathrm{tnc}' a\,\mathrm{dnc}' a\,.\,\mathrm{dn}^2 a\,.\,\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$$

oder

$$\partial\,'C(K-u,a) = -\partial D(u,K'-a);$$

daher haben wir

$$7.\quad \begin{cases} 'C(K-u,a)+D(u,K'-a) = 'C(K,a) = D(K,K'-a) \text{ und} \\ 'C(u,K'-a)+D(K-u,a) = 'C(K,K'-a) = D(K,a). \end{cases}$$

Ferner findet man

$$\partial\,'D(K-u,a) = \frac{-\mathrm{dnc}' a}{\mathrm{cnc}' a\,\mathrm{snc}' a}\cdot\frac{\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u},\ \text{und da}$$

$$\partial\,S(u,K'-a) = \frac{k^2\,\mathrm{tnc}' a\,\mathrm{dnc}' a}{\mathrm{cnc}'^2 a}\cdot\frac{\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$$

ist, so haben wir

$$8.\quad \begin{cases} \partial\,S(u,K'-a)-\partial\,'D(K-u,a) = \dfrac{\partial u}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a}, \text{ also ist} \\ S(u,K'-a)-\ 'D(K-u,a) = \dfrac{u}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a} - 'D(K,a). \end{cases}$$

Setzt man in dieser Gleichung $K-u$ für u, und $K'-a$ für a, so hat man auch

$$S(K-u,a)-'D(u,K'-a) = \frac{K-u}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a} - 'D(K,K'-a).$$

Setzt man hierin $u=0$, so hat man noch

$$9.\quad S(K,a) = \frac{K}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a} - 'D(K,K'-a).$$

Wird von dieser Gleichung die vorige subtrahirt, so erhält man

$$10.\quad 'D(u,K'-a)-S(K-u,a) = \frac{u}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a} - S(K,a).$$

§. 121.

Fundamental-Formeln für die Modular-Integrale der zweiten und vierten Classe.

Die Fundamental-Formeln für die Modular-Integrale der zweiten Classe kamen schon gröfstentheils im §. 116. vor und es bleibt fast nur übrig, einige particulären Bestimmungen aus ihnen herzuleiten. Setzt man den Parameter $a=K$ und erinnert sich, dafs $\frac{\mathrm{lm}(K+u)-\mathrm{lm}(K-u)}{2} = E.u$ ist, so erhält man

$$1.\quad \mathfrak{S}(u,K)=0,\quad \mathfrak{C}(u,K)=0,\quad \mathfrak{D}(u,K)=\tfrac{1}{0}.$$

Setzt man aber das Argument $u = K$, so erhält man

$$2.\quad \begin{cases} \mathfrak{S}(K,a) = K.\operatorname{el} a - E.a, \\ \mathfrak{C}(K,a) = E.a - K(E - \operatorname{elc} a), \\ \mathfrak{D}(K,a) = K(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{el} a) + E.a. \end{cases}$$

Zu diesen Formeln fügen wir noch eine allgemeine hinzu. Vertauscht man in den Formeln, wodurch die Werthe der Integrale ausgedrückt werden, das Argument u mit dem Parameter, so verwandelt sich die Gleichung

$$\mathfrak{S}(u,a) = u.\operatorname{el} a - \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2} \text{ in}$$

$$\mathfrak{S}(a,u) = a.\operatorname{el} u - \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2},$$

indem $\operatorname{lm}(a-u) = \operatorname{lm}(u-a)$ ist. Durch die Subtraction erhält man also

$$3.\quad \mathfrak{S}(a,u) - \mathfrak{S}(u,a) = a.\operatorname{el} u - u.\operatorname{el} a.$$

Aehnliche Formeln lassen sich auch leicht für das Cosinus- und Differente-Integral, und überhaupt für die Integrale der drei übrigen Classen herleiten.

Die Integrale der vierten Classe werden ausgedrückt durch die Formeln

$$4.\quad \begin{cases} '\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u.\partial u}{\operatorname{cn}^2 a\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)} = \int_0 \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \cdot \frac{\operatorname{sn}^2 u.\partial u}{\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}, \\ '\mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a.\partial u}{\operatorname{dn} a\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)} = \int_0 \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \cdot \frac{\partial u}{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}}, \\ '\mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a.\operatorname{dn}^2 u.\partial u}{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}}, \end{cases}$$

welche man erhält, wenn man in den Formeln (1.) des §. 119. ai für a setzt und den Factor i auf beiden Seiten wegläfst.

Setzt man in den Formeln (2.) des §. 119. ebenfalls ai für a, und beachtet, dafs überhaupt $\operatorname{lm}'(ix) = -\operatorname{\mathfrak{L}m}' x$ ist, so erhält man

$$5.\quad \begin{cases} '\mathfrak{S}(u,a) = -u.\operatorname{\mathfrak{El}}' a + \frac{\operatorname{\mathfrak{L}m}'(a+u) - \operatorname{\mathfrak{L}m}'(a-u)}{2}, \\ '\mathfrak{C}(u,a) = -u(a - E + \operatorname{elc} a) + \frac{\operatorname{\mathfrak{L}m}'(a+u) - \operatorname{\mathfrak{L}m}'(a-u)}{2}, \\ '\mathfrak{D}(u,a) = -u(a - \operatorname{el} a) + \frac{\operatorname{\mathfrak{L}m}'(a+u) - \operatorname{\mathfrak{L}m}'(a-u)}{2}, \end{cases}$$

Der gemeinschaftliche Nenner oder Divisor in den Ausdrücken (4.) wird schon $= 0$, wenn $\operatorname{snc} a = \operatorname{sn} u$, also $a + u = K$ wird; und weil dann

die Beschleunigung des Wachsens der drei Integrale unendlich grofs wird, so werden die drei Integrale $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,a)$ und $'\mathfrak{D}(u,a)$ früher unendlich, ehe a oder u die Gröfse von K erreicht: dann nämlich schon, wenn $u = K - a$ wird.

Setzt man in den Formeln (6.) des §. 118. noch ui für u, indem man zugleich die beiden conjugirten Modul k und k' mit einander vertauscht, so werden sie

$$6.\quad \begin{cases} '\mathfrak{C}(u,a) - '\mathfrak{S}(u,a) = \dfrac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.u, \\ '\mathfrak{D}(u,a) - '\mathfrak{S}(u,a) = \dfrac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}.u, \\ '\mathfrak{D}(u,a) - '\mathfrak{C}(u,a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a.u. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (4.) $K-a$ für a, so lassen sie sich also darstellen:

$$7.\quad \begin{cases} '\mathfrak{S}(u, K-a) = \int_0 \dfrac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} \cdot \dfrac{\operatorname{sn}^2 u.\partial u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}, \\ '\mathfrak{C}(u, K-a) = \int_0 \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a.\partial u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}, \\ '\mathfrak{D}(u, K-a) = \int_0 \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a.\operatorname{dn}^2 u.\partial u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}. \end{cases}$$

§. 122.

Kennzeichen bei Bestimmung der Classe, zu welcher ein Modular-Integral der zweiten Art gehört.

Ein Modular-Integral hat immer eine von den vier Formen: $\int \frac{A \operatorname{sn}^2 u.\partial u}{1+n \operatorname{sn}^2 u}$, $\int \frac{A \operatorname{cn}^2 u.\partial u}{1+n \operatorname{sn}^2 u}$, $\int \frac{A \operatorname{dn}^2 u.\partial u}{1+n \operatorname{sn}^2 u}$, $\int \frac{A \partial u}{1+n \operatorname{sn}^2 u}$, wenn man unter A und n constante Coefficienten vorstellt. Die Classe, zu welcher ein solches Integral gehört, mufs lediglich nach dem Nenner $1+n \operatorname{sn}^2 u$, oder nach dem Coefficienten n bestimmt werden. Sieht man auf die verschiedenen Werthe von n in den zwölf Integralen der zweiten Art, so überzeugt man sich, dafs die Zahl n

entweder zwischen den Grenzen $\frac{1}{0}$ und 0 enthalten und also positiv ist,
oder zwischen den Grenzen 0 und $-k^2$, also negativ,
oder zwischen den Grenzen $-k^2$ und -1, also negativ,
oder zwischen den Grenzen -1 und $-\frac{1}{0}$, also negativ ist,

wenn man die Zahl n allmälig abnehmen läfst. Diese vier verschiedenen Werthe von n beziehen sich der Reihe nach gerade auf die vier Classen

der Modular-Integrale der zweiten Art, in der Anordnung, in welcher dieselben in §. 117. aufgeführt worden sind. Zu den Integralen

der ersten Classe rechnen wir $S(u,a)$, $C(u,a)$ und $D(u,a)$, welche von *cyklischer Art* sind, weil in ihnen $n = k^2 \mathfrak{Sn}^2 a = k^2 \mathrm{tn}'^2 a$, und also zwischen den Grenzen $\frac{1}{0}$ und 0 enthalten ist.

Zu der zweiten Classe rechnen wir $\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{C}(u,a)$ und $\mathfrak{D}(u,a)$, welche von *hyperbolischer Art* sind, weil in ihnen $n = -k^2 \mathrm{sn}^2 a$ und also zwischen den Grenzen 0 und $-k^2$ enthalten ist.

Zu der dritten Classe rechnen wir $'S(u,a)$, $'C(u,a)$ und $'D(u,a)$, welche von *cyklischer Art* sind, weil in ihnen $n = -\mathrm{dn}'^2 a$, und also zwischen den Grenzen $-k^2$ und -1 enthalten ist.

Zu der vierten Classe endlich rechnen wir die Integrale $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,a)$ und $'\mathfrak{D}(u,a)$, welche von *hyperbolischer Art* sind, weil in ihnen $n = -\mathfrak{Dn}'^2 a = \frac{-1}{\mathrm{snc}^2 a} = -(1+k'^2 \mathrm{tn}^2 a)$ und also zwischen den Grenzen -1 und $-\frac{1}{0}$ enthalten ist.

Hieraus ersieht man also, dafs die in §. 117. angegebene Reihefolge der Classen der Modular-Integrale der zweiten Art keine willkürliche ist.

§. 123.

Die Modular-Integrale der ersten und zweiten Classe mit dem Modul $\frac{1}{k}$ zurückgeführt auf solche Integrale mit dem Modul k.

Setzen wir in dem Modular-Integrale $\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u}$ der zweiten Classe ka für a, ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, also auch $k.\partial u$ für u, so verwandelt sich nach §. 30. der Zähler $k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 u \,.\, \partial u$ in $\frac{1}{k^2} . k \,\mathrm{sn}\, a . \mathrm{dn}\, a . \mathrm{cn}\, a . k^2 \,\mathrm{sn}^2 u \,.\, k \partial u = k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a . \mathrm{sn}^2 u . \partial u$, und da der Nenner $1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u$ ebenfalls ungeändert bleibt, so ist

$$1. \quad \mathfrak{S}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{S}(u,a).$$

Wenn man in den Formeln $\mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{cn}^2 u \,.\, \partial u}{\mathrm{dn}\, a (1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u)}$ und $\mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{\mathrm{tn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,.\, \mathrm{dn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u}$ dieselben Abänderungen macht, so verwandelt sich der Zähler $\frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{cn}^2 u \,.\, \partial u}{\mathrm{dn}\, a}$ in $\frac{1}{k^2} . \frac{k \,\mathrm{sn}\, a \,.\, \mathrm{dn}\, a \,.\, \mathrm{dn}^2 u \,.\, k \,\partial u}{\mathrm{cn}\, a} =$ $\mathrm{tn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{dn}^2 u \,.\, \partial u$ und der Zähler $\mathrm{tn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,.\, \mathrm{dn}^2 u \,.\, \partial u$ in $k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{snc}\, a \,.\, \mathrm{cn}^2 u \,.\, \partial u$;

daher erhält man

$$2.\quad \mathfrak{C}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{D}(u, a),$$

$$3.\quad \mathfrak{D}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{C}(u, a).$$

Setzt man in den vorstehenden Gleichungen noch ai für a und wendet die Formeln (1.) des §. 117. an, so verwandeln sie sich sofort in

$$4.\quad S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = S(u, a),$$

$$5.\quad C\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = D(u, a),$$

$$6.\quad D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = C(u, a).$$

Zusatz. Die vorigen Formeln können auch wie folgt bewiesen werden. Da nach §. 81.

$$\mathrm{lm}\left(ku+ka, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{lm}(u+a) - \frac{k'^2}{2}.(u+a)^2 \text{ und}$$

$$\mathrm{lm}\left(ku-ka, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{lm}(u-a) - \frac{k'^2}{2}.(u-a)^2 \text{ ist, so ist auch}$$

$$\frac{\mathrm{lm}\left(ku+ka, \frac{1}{k}\right) - \mathrm{lm}\left(ku-ka, \frac{1}{k}\right)}{2} = \frac{\mathrm{lm}(u+a) - \mathrm{lm}(u-a)}{2} - k'^2.au.$$

Ferner ist $\mathrm{el}\left(ka, \frac{1}{k}\right) = \frac{\mathrm{el}\,a - k'^2.a}{k}$; also verwandelt sich $u.\mathrm{el}\,a$ in $u.\mathrm{el}\,a - k'^2.au$ und folglich $u.\mathrm{el}\,a - \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2}$ wieder in $u.\mathrm{el}\,a - \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2}$, d. h. es verwandelt sich $\mathfrak{S}(u, a)$ wieder in $\mathfrak{S}(u, a)$, wenn ka für a, ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k gesetzt wird.

§. 124.

Die Modular-Integrale der ersten und zweiten Classe, mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$, zurückgeführt auf solche Integrale mit dem Modul k.

Setzen wir in dem Integrale $\mathfrak{S}(u, a)$ an die Stelle von u, $k'(K-u)$, und $k'a$ für a, wie auch $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich $\mathfrak{S}(u, a)$ in $\mathfrak{S}\left(k'(K-u), k'a, \frac{ik}{k'}\right)$. Dabei verwandelt sich ∂u in $-k'\partial u$ und überhaupt der Zähler $k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2u.\partial u$ in

$$\frac{k^2}{k'^2}.\mathrm{cnc}\,a.\mathrm{snc}\,a.\frac{1}{\mathrm{dn}\,a}.\mathrm{cn}^2u.k'\partial u = \frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}^2\,u.\partial u}{\mathrm{dn}^2\,a}.$$

Der Nenner $1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u$ verwandelt sich in

$$1+\frac{k^2}{k'^2}.\mathrm{cnc}^2 a.\mathrm{cn}^2 u = \frac{\mathrm{dn}^2 a+k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 a} = \frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 a};$$

folglich ist

$$\mathfrak{S}\left(k'(K-u), k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \text{const.} + \mathfrak{E}(u, a).$$

Setzt man, um die Constante zu bestimmen, $u = K$, so erhält man const. $= -\mathfrak{E}(K, a)$, und also

$$1.\quad \mathfrak{S}\left[k'(K-u), k'a, \frac{ik}{k'}\right] = -\mathfrak{E}(K, a)+\mathfrak{E}(u, a),$$

in welcher Formel nun auch noch für $\mathfrak{E}(K, a)$ der in §. 121. hergeleitete Werth substituirt werden kann. Eben so findet man umgekehrt

$$2.\quad \mathfrak{E}\left[k'(K-u), k'a, \frac{ik}{k'}\right] = -\mathfrak{S}(K, a)+\mathfrak{S}(u, a).$$

Der Zähler $\mathrm{tn}\,a.\mathrm{dn}\,a.\mathrm{dn}^2 u.\partial u$ von $\mathfrak{D}(u, a)$ verwandelt sich in

$$k'\,\mathrm{tn}\,a.\frac{1}{\mathrm{dn}\,a}.\frac{\mathrm{dn}^2 u}{k'^2}.(-k'\,\partial u) = \frac{-\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a.\mathrm{dn}^2 u.\partial u}{\mathrm{dn}^2 a},$$

und da sich der Nenner $1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u$ in $\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 a}$ verwandelt, so erhalten wir

$$3.\quad \mathfrak{D}\left[k'(K-u), k'a, \frac{ik}{k'}\right] = \mathfrak{D}(K, a)-\mathfrak{D}(u, a),$$

indem für $u = K$ der Ausdruck verschwinden soll.

Setzen wir in den entwickelten drei Formeln ai für a, so verwandeln sie sich in

$$4.\quad S\left[k'(K-u), k'a, \frac{ik}{k'}\right] = -C(K, a)+C(u, a),$$

$$5.\quad C\left[k'(K-u), k'a, \frac{ik}{k'}\right] = -S(K, a)+S(u, a).$$

$$6.\quad D\left[k'(K-u), k'a, \frac{ik}{k'}\right] = D(K, a)-D(u, a).$$

Die Formeln (1.), (2.), (3.) bieten den bemerkenswerthen Umstand dar, dafs sie noch auf eine zweite und einfachere Weise dargestellt werden können. Setzt man in der Formel (1.) $K-u$ für u, so erhält man

$$\partial\,\mathfrak{S}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \partial\,\mathfrak{E}(K-u, a) = -\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cnc}^2 u.\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{snc}^2 u},$$

und da $\mathrm{cnc}^2 u = \frac{k'^2\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u}$, $\mathrm{snc}^2 u = \frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u}$ ist, so erhält man zunächst

$$\partial\,\mathfrak{S}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\frac{k^2 k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{\mathrm{dn}^2 u-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 u}.$$

Da aber

$$\mathrm{dn}^2 u-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 u = 1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a-k^2\,\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u = \mathrm{dn}^2 a(1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)$$

ist, so reducirt sich die Formel auf

$$\mathfrak{S}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\int_0 \frac{k^2 \operatorname{snc} a \operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{sn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{snc}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

oder

$$7. \quad \mathfrak{S}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\mathfrak{S}(u, K-a).$$

Eben so findet man

$$8. \quad \mathfrak{C}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\mathfrak{C}(u, K-a)$$

und

$$\partial\mathfrak{D}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \cdot \frac{\partial u}{1 - k^2 \operatorname{snc}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$
$$= \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} . \partial u + \frac{k^2 \operatorname{snc} a \operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{sn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{snc}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

oder

$$\mathfrak{D}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} u + \mathfrak{S}(u, K-a),$$

und da $\mathfrak{S}(u, K-a) = \operatorname{tnc} a \operatorname{dnc} a . u - \mathfrak{D}(u, K-a)$ ist, so erhält man

$$\mathfrak{D}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} - \mathfrak{D}(u, K-a).$$

Vergleicht man diese Resultate mit den früheren, so erhält man die Relationen

$$10. \quad \begin{cases} \mathfrak{C}(K-u, a) + \mathfrak{S}(u, K-a) = \mathfrak{C}(K, a), \\ \mathfrak{S}(K-u, a) + \mathfrak{C}(u, K-a) = \mathfrak{S}(K, a), \\ \mathfrak{D}(K-u, a) - \mathfrak{D}(u, K-a) = \mathfrak{D}(K, a) - \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a}, \end{cases}$$

woraus, wenn $u = K$ gesetzt wird, folgt:

$$11. \quad \begin{cases} \mathfrak{S}(K, K-a) = \mathfrak{C}(K, a), \\ \mathfrak{C}(K, K-a) = \mathfrak{S}(K, a), \\ \mathfrak{D}(K, K-a) = \frac{K}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} - \mathfrak{D}(K, a). \end{cases}$$

Die Formeln (10.) können nun auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{C}(K-u, a) + \mathfrak{S}(u, K-a) = \mathfrak{S}(K, K-a),$$
$$\mathfrak{S}(K-u, a) + \mathfrak{C}(u, K-a) = \mathfrak{C}(K, K-a),$$
$$\mathfrak{D}(K-u, a) - \mathfrak{D}(u, K-a) = \frac{K-u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} - \mathfrak{D}(K, K-a),$$

und wird hierin $K-u$ für u, ferner $K-a$ für a gesetzt, so entsteht

$$\mathfrak{C}(u, K-a) + \mathfrak{S}(K-u, a) = \mathfrak{S}(K, a),$$
$$\mathfrak{S}(u, K-a) + \mathfrak{C}(K-u, a) = \mathfrak{C}(K, a),$$
$$\mathfrak{D}(u, K-a) - \mathfrak{D}(K-u, a) = \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} - \mathfrak{D}(K, a).$$

Diese Formeln stimmen wieder mit den Formeln (10.) überein. Für die Integrale der vierten Classe erhält man leicht die Formeln

$$12.\quad \begin{cases} {}'\mathfrak{S}(K-u,a) = {}'\mathfrak{S}(u,K-a) + \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + \text{const.}, \\ {}'\mathfrak{C}(K-u,a) = {}'\mathfrak{D}(u,K-a) + \text{const.}, \\ {}'\mathfrak{D}(K-u,a) = {}'\mathfrak{C}(u,K-a) + \text{const.} \end{cases}$$

§. 125.

Die Modular-Integrale der zweiten und dritten Classe mit den Moduln $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$, zurückgeführt auf Integrale mit dem Modul k.

Es ist nach §. 123. $\mathfrak{S}(ui,a) = \mathfrak{S}\left(k'ui, k'a, \frac{1}{k'}\right)$. Da aber $\mathfrak{S}'(ui,a) = -i.{}'S(u,a)$ und aus demselben Grunde auch

$$\mathfrak{S}\left(k'ui, k'a, \frac{1}{k'}\right) = -i.{}'S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right)$$

ist, so erhalten wir die Gleichung

$$1.\quad {}'S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'S(u,a).$$

Ganz eben so erhält man noch die Gleichungen

$$2.\quad {}'C\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'D(u,a),$$

$$3.\quad {}'D\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'C(u,a).$$

Setzt man in den drei vorigen Gleichungen ai für a, und beachtet die Formeln (7.) des §. 117., so erhält man noch

$$4.\quad {}'\mathfrak{S}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'\mathfrak{S}(u,a),$$

$$5.\quad \mathfrak{C}'\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'\mathfrak{C}(u,a),$$

$$6.\quad {}'\mathfrak{D}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'\mathfrak{D}(u,a).$$

Setzt man in den Gleichungen (1.), (2.), (3.) des §. 124. jetzt $K-ui$ für u, so verwandeln sie sich zunächst in

$$\mathfrak{S}\left(k'ui, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\mathfrak{C}(K,a) + \mathfrak{C}(K-ui,a),$$

$$\mathfrak{C}\left(k'ui, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\mathfrak{S}(K,a) + \mathfrak{S}(K-ui,a),$$

$$\mathfrak{D}\left(k'ui, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \mathfrak{D}(K,a) - \mathfrak{D}(K-ui,a).$$

Beachtet man nun, dafs $-i(u+iK) = K-ui$ ist, und vertauscht den

Modul k mit dem conjugirten k', also auch K mit K', so giebt die Anwendung der Formeln (3.) des §. 117. auf der Stelle

$$'S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'C(u + iK', a) - i.\,\mathfrak{C}'(K', a),$$

$$'C\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'S(u + iK', a) + i.\,\mathfrak{S}'(K', a),$$

$$'D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'D(u + iK', a) - i.\,\mathfrak{D}'(K', a),$$

und diese Formeln können auch also dargestellt werden:

7. $$'S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'C(u + iK', a) - 'C(iK', a),$$

8. $$'C\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'S(u + iK', a) - 'S(iK', a),$$

9. $$'D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'D(u + iK', a) - 'D(iK', a).$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln noch ai für a, so werden sie

10. $$'\mathfrak{S}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = '\mathfrak{C}(u + iK', a) - '\mathfrak{C}(iK', a),$$

11. $$'\mathfrak{C}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = '\mathfrak{S}(u + iK', a) - '\mathfrak{S}(iK', a),$$

12. $$'\mathfrak{D}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = '\mathfrak{D}(u + iK', a) - '\mathfrak{D}(iK', a).$$

Wendet man die Lehrsätze des §. 30. auf die Formeln (4.) des §. 121. an, so erhält man die folgenden Formeln:

13. $$'\mathfrak{S}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = -\mathfrak{S}(u, K - a),$$

14. $$'\mathfrak{C}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{D}(u, K - a)\,\frac{a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a},$$

15. $$'\mathfrak{D}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{C}(u, K - a).$$

Vertauscht man in den Formeln (7 — 9.) des §. 124. k mit k', so hat man

$$\mathfrak{S}\left(ku, ka, \frac{ik'}{k}\right) = -\mathfrak{S}'(u, K' - a);\quad \mathfrak{C}\left(ku, ka, \frac{ik'}{k}\right) = -\mathfrak{C}'(u, K' - a) \text{ und}$$

$$\mathfrak{D}\left(ku, ka, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{u}{\mathrm{sn}'\,a\,\mathrm{snc}'\,a} - \mathfrak{D}'(u, K' - a),$$

und setzt man hierin ui für u, so verwandeln sie sich sofort in

16. $$'S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = -'S(u, K' - a),$$

17. $$'C\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = -'C(u, K' - a),$$

18. $$'D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \frac{u}{\mathrm{sn}'\,a\,\mathrm{snc}'\,a} - 'D(u, K' - a).$$

Zusatz. Auf ähnliche Art erhält man aus den Formeln (13—15.) noch

$$19.\quad S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -{}'S(u, K'-a),$$

$$20.\quad C\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'D(u, K'-a) - \frac{u}{\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{snc}\, a},$$

$$21.\quad D\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'C(u, K'-a).$$

und vergleicht man diese Resultate mit den in §. 124. gefundenen, so hat man noch

$$22.\quad \begin{cases} {}'C(u, K'-a) + D(K-u, a) = D(K, a), \\ {}'S(u, K'-a) + C(K-u, a) = C(K, a), \\ {}'D(u, K'-a) - S(K-u, a) = \frac{u}{\mathrm{sn}' a\, \mathrm{snc}' a} - S(K, a), \end{cases}$$

und also dieselben Formeln, wie im §. 120.

§. 126.

Die auf das Argument $K-u$ bezogenen Integrale aller vier Classen zurückgeführt auf Integrale des Argumentes u.

Es ist nach §. 73. $\mathrm{lm}(a+K-u) = \mathrm{lm}(K-(u-a)) = \frac{EK}{2} + \mathrm{lm}(u-a) + \log\left(\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\sqrt{k'}}\right) - E(u-a)$, und eben so ist $\mathrm{lm}(a+u-K) = \mathrm{lm}(K-(a+u)) = \frac{EK}{2} + \mathrm{lm}(u+a) + \log\left(\frac{\mathrm{dn}(u+a)}{\sqrt{k'}}\right) - E(u+a)$. Wird also die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt, so erhält man

$$\frac{\mathrm{lm}(a+K-u) - \mathrm{lm}(a+u-K)}{2} = \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}} + E.a - \frac{\mathrm{lm}(u+a) - \mathrm{lm}(u-a)}{2}.$$

Setzt man aber in der Formel $\mathfrak{S}(u, a) = u.\mathrm{el}\, a - \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2}$ für u an die Stelle $K-u$, so erhält man

$\mathfrak{S}(K-u, a) = (K-u)\,\mathrm{el}\, a - \frac{\mathrm{lm}(a+K-u) - \mathrm{lm}(a+u-K)}{2}$; daher ist

$$\mathfrak{S}(K-u, a) = (K-u)\,\mathrm{el}\, a + \frac{\mathrm{lm}(u+a) - \mathrm{lm}(u-a)}{2} - \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}} - E a,$$

also

$$\mathfrak{S}(K-u, a) + \mathfrak{S}(u, a) = K.\mathrm{el}\, a - E.a - \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}}.$$

Da ferner

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k^2\,\mathrm{sn}\, a\,\mathrm{snc}\, a\,\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{snc}\, u)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\, 2u}{\mathrm{sn}\, 2a}\right) - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\, 2u}{\mathrm{cnc}\, 2a}\right)$$

ist, nach §. 37., so kann der eine oder auch der andere Werth noch in der vorigen Formel substituirt werden.

Da $\mathfrak{S}(K,a) = K.\mathrm{el}\,a - E.a$ ist, so kann die vorige Formel einfacher also dargestellt werden:

$$\mathfrak{S}(K-u,a) + \mathfrak{S}(u,a) = \mathfrak{S}(K,a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}}.$$

Da

$$\mathfrak{C}(u,a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.u - \mathfrak{S}(u,a),$$
$$\mathfrak{C}(K-u,a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.(K-u) - \mathfrak{S}(K-u,a) \text{ und}$$
$$\mathfrak{C}(K,a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.K - \mathfrak{S}(K,a)$$

ist, so ist

$$\mathfrak{C}(u,a) + \mathfrak{C}(K-u,a) - \mathfrak{C}(K,a) = -\mathfrak{S}(K-u,a) - \mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{S}(K,a),$$

folglich

$$2.\quad \mathfrak{C}(K-u,a) + \mathfrak{C}(u,a) = \mathfrak{C}(K,a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}} \text{ und}$$

$$3.\quad \mathfrak{D}(K-u,a) + \mathfrak{D}(u,a) = \mathfrak{D}(K,a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}}.$$

Setzt man in den vorstehenden drei Formeln ai für a, und läfst den Factor i auf beiden Seiten weg, so erhält man noch

$$4.\quad S(K-u,a) + S(u,a) = S(K,a) - \Phi,$$
$$5.\quad C(K-u,a) + C(u,a) = C(K,a) + \Phi,$$
$$6.\quad D(K-u,a) + D(u,a) = D(K,a) + \Phi,$$

wenn der Kürze wegen gesetzt wird

$$\Phi = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{tnc}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right) = \tfrac{1}{2}\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k\,\mathrm{cnc}\,2u}{k'\,\mathrm{cnc}'2a}\right) - \tfrac{1}{2}\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,2u}{\mathrm{tn}'2a}\right).$$

Nach §. 77. ist

$$\mathrm{lm}'(a - ui + iK)$$
$$= \frac{EK-K^2}{2} + \mathrm{lm}'(a-ui) + \log(\mathrm{sn}'(a-ui).\sqrt{k'}) + i((K-E)(a-ui) + \tfrac{1}{2}\pi)$$

und

$$\mathrm{lm}'(a + ui - iK)$$
$$= \frac{EK-K^2}{2} + \mathrm{lm}'(a+ui) + \log(\mathrm{sn}'(a+ui).\sqrt{k'}) - i((K-E)(a+ui) + \tfrac{1}{2}\pi),$$

woraus folgt

$$\frac{\mathrm{lm}'(a-ui+iK) - \mathrm{lm}'(a+ui-iK)}{2i}$$
$$= -\frac{\mathrm{lm}'(a+ui) - \mathrm{lm}'(a-ui)}{2i} + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}'(a-ui)}{\mathrm{sn}'(a+ui)}} + (K-E)\,a + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Da nun aber

$$'S(u,a) = -\ u\ .\ \mathrm{el}'a + \frac{\mathrm{lm}'(a+ui) - \mathrm{lm}'(a-ui)}{2i} \quad \text{und}$$

$$'S(K-u,a) = -(K-u)\,\mathrm{el}'a + \frac{\mathrm{lm}'(a-ui+iK) - \mathrm{lm}'(a+ui-iK)}{2i}$$

ist, so erhält man durch die Addition dieser beiden Gleichungen

$$'S(K-u,a) + 'S(u,a) = -K.\,\mathrm{el}'a + (K-E)a + \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}'(a+ui)}{\mathrm{sn}'(a-ui)}}$$

oder

$$7.\quad 'S(K-u,a) + 'S(u,a) = 'S(K,a) - \psi,$$

wenn man setzt:

$$\psi = \ \text{arc tang}\left(\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right) \quad \text{oder}$$

$$\psi = \tfrac{1}{2}\,\text{arc tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,2u}{\mathrm{tn}'2a}\right) + \tfrac{1}{2}\,\text{arc tang}\left(\frac{k\,\mathrm{cnc}\,2u}{k'\,\mathrm{cnc}'2a}\right).$$

Da $'C(u,a) = 'S(u,a) + k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.u$ ist, so leitet man hieraus

$$'C(K-u,a) + 'C(u,a) - 'C(K,a) = 'S(K-u,a) + 'S(u,a) - 'S(K,a)$$

her und es ist also

$$8.\quad 'C(K-u,a) + 'C(u,a) = 'C(K,a) - \psi, \text{ wie auch}$$

$$9.\quad 'D(K-u,a) + 'D(u,a) = 'D(K,a) - \psi,$$

wenn in diesen beiden Formeln ψ denselben Werth hat, welchen es in der Gleichung (7.) hat. Setzt man in diesen Formeln ai für a, so erhält man noch

$$'\mathfrak{S}(K-u,a) + '\mathfrak{S}(u,a) = '\mathfrak{S}(K,a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

$$'\mathfrak{C}(K-u,a) + '\mathfrak{C}(u,a) = '\mathfrak{C}(K,a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

$$'\mathfrak{D}(K-u,a) + '\mathfrak{D}(u,a) = '\mathfrak{D}(K,a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

in welchen Formeln aber $'\mathfrak{S}(K,a)$, $'\mathfrak{C}(K,a)$ und $'\mathfrak{D}(K,a)$ imaginär sind.

Der imaginäre Theil dieser Ausdrücke ist $-\frac{\pi i}{2} = \log\frac{1}{\sqrt{-1}}$; substituirt man aber die Werthe

$$'\mathfrak{S}(K,a) = (K-E)a - K.\,\mathfrak{El}'a + \log\frac{1}{\sqrt{-1}},$$

$$'\mathfrak{C}(K,a) = (K-E)a - K(a + \mathrm{elc}\,a - E) + \log\frac{1}{\sqrt{-1}}$$

$$= K(E - \mathrm{elc}\,a) - E.a + \log\frac{1}{i},$$

$$'\mathfrak{D}(K,a) = (K-E)a - K(a - \mathrm{el}\,a) + \log\frac{1}{\sqrt{-1}}$$

$$= K.\,\mathrm{elc}\,a - E.a + \log\frac{1}{i},$$

so erhält man die Formeln

10. $'\mathfrak{S}(K-u,a)+'\mathfrak{S}(u,a)=(K-E)a-K.\mathfrak{El}'a+\log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(u+a)}{\mathrm{tn}(u-a)}}$,

11. $'\mathfrak{E}(K-u,a)+'\mathfrak{E}(u,a)=K(E-\mathrm{elc}\,a)-E.a+\log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(u+a)}{\mathrm{tn}(u-a)}}$,

12. $'\mathfrak{D}(K-u,a)+'\mathfrak{D}(u,a)=K.\,\mathrm{el}\,a-E.a+\log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(u+a)}{\mathrm{tn}(u-a)}}$,

welche gleichwohl reell sind, wenn nur $u>a$ und $u+a<K$ ist.

§. 127.

Die auf das Argument $u+iK'$ bezogenen Modular-Integrale der zweiten Art.

Vertauscht man in der Formel

$$'\mathfrak{S}(K-u,a)+'\mathfrak{S}(u,a)='\mathfrak{S}(K,a)+\log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}}$$

die beiden conjugirten Modul und setzt ferner ai für a und ui für u, so verwandelt sie sich zunächst in

$$'\mathfrak{S}'(K'-ui,ai)+'\mathfrak{S}'(ui,ai)=i.'S'(K',a)+\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+u)}{\mathrm{sn}(a-u)}}.$$

Da aber $-i(u+iK')=K'-ui$, also $'\mathfrak{S}'(K'-ui,ai)=-\mathfrak{S}(u+iK',a)$ und $'\mathfrak{S}'(ui,ai)=\mathfrak{S}(u,a)$ ist, so erhält man

$$\mathfrak{S}(u+iK',a)=\mathfrak{S}(u,a)-\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+u)}{\mathrm{sn}(a-u)}}-i.'S'(K',a) \text{ oder}$$

1. $\mathfrak{S}(u+iK',a)=\mathfrak{S}(u,a)-\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+u)}{\mathrm{sn}(a-u)}}+\mathfrak{S}(iK,a)$.

Eben so findet man noch die beiden Formeln

2. $\mathfrak{E}(u+iK',a)=\mathfrak{E}(u,a)+\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+u)}{\mathrm{sn}(a-u)}}+\mathfrak{E}(iK',a)$,

3. $\mathfrak{D}(u+iK',a)=\mathfrak{D}(u,a)+\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+u)}{\mathrm{sn}(a-u)}}+\mathfrak{D}(iK',a)$.

Durch dasselbe Verfahren, ohne aber zugleich ai für a zu setzen, erhält man

$$S(u+iK',a)=S(u,a)+\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}'(a+ui)}{\mathrm{tn}'(a-ui)}}-i'\mathfrak{S}'(K',a),$$

und diese Gleichung läfst sich also darstellen:

4. $S(u+iK',a)=S(u,a)+\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right)+S(iK',a)$.

Ganz eben so erhält man noch

5. $C(u+iK',a)=C(u,a)-\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right)+C(iK',a)$,

6. $D(u+iK',a)=D(u,a)-\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right)+D(iK',a)$.

Setzt man in den Formeln (1.), (2.), (3.) des §. 126. ai für a, ui für u und k' für k, so verwandelt sich $\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}$ in $\frac{\mathrm{snc}(u+a)}{\mathrm{snc}(u-a)}$, und den Formeln (11.) des §. 117. gemäfs erhalten wir nun

7. $$'\mathfrak{S}(u+iK', a) = '\mathfrak{S}(u, a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-a)}{\mathrm{snc}(u+a)}} + '\mathfrak{S}(iK', a),$$

8. $$'\mathfrak{C}(u+iK', a) = '\mathfrak{C}(u, a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-a)}{\mathrm{snc}(u+a)}} + '\mathfrak{C}(iK', a),$$

9. $$'\mathfrak{D}(u+iK', a) = '\mathfrak{D}(u, a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-a)}{\mathrm{snc}(u+a)}} + '\mathfrak{D}(iK', a).$$

Da

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+a)}{\mathrm{sn}(u-a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u}\right),$$

also

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-a)}{\mathrm{snc}(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)$$

ist, so ist auch

$$\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-ai)}{\mathrm{snc}(u+ai)}} = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{cn}'a\,\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right).$$

Setzt man also in den vorigen Gleichungen ai für a, so erhält man die folgenden:

10. $$'S(u+iK', a) = 'S(u, a) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{cn}'a\,\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right) + 'S(iK', a),$$

11. $$'C(u+iK', a) = 'C(u, a) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{cn}'a\,\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right) + 'C(iK', a),$$

12. $$'D(u+iK', a) = 'D(u, a) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{cn}'a\,\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right) + 'D(iK', a).$$

Für das Cosinus- und Differente-Integral erhält man nun die Ausdrücke

$$'\mathfrak{C}(u, a) = \left(\frac{k'\cos\alpha'}{\cos\alpha} - '\mathfrak{A}\right).u + 'U, \qquad '\mathfrak{D}(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - '\mathfrak{A}\right).u + 'U.$$

§. 128.

Die auf den Parameter $K-a$ bezogenen Integrale der zweiten Classe, zurückgeführt auf andere mit dem Parameter a.

Nach §. 121. ist $\mathfrak{S}(u, a) = \mathfrak{S}(a, u) + u.\mathrm{el}\,a - a.\mathrm{el}\,u$ und also auch $\mathfrak{S}(u, K-a) = \mathfrak{S}(K-a, u) + u.\mathrm{elc}\,a - (K-a).\mathrm{el}\,u$. Werden diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man

$$\mathfrak{S}(a,u) + \mathfrak{S}(a, K-a) = \mathfrak{S}(a,u) + \mathfrak{S}(K-a,u) + u(\mathrm{el}\,a + \mathrm{elc}\,a) - K.\mathrm{el}\,u.$$

Da nun nach §. 126. $\mathfrak{S}(a, u) + \mathfrak{S}(K-a, u) = \mathfrak{S}(K, u) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}}$ $= K.\mathrm{el}\,u - E.u - \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}}$ ist, so entsteht

$$\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a) = u(\mathrm{el}\,a+\mathrm{elc}\,a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,(a-u)}{\mathrm{dn}\,(a+u)}} - E.u.$$

Da ferner nach §. 66. $\mathrm{el}\,a+\mathrm{elc}\,a = E+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a$ ist, so reducirt sich die Formel noch auf

$$\mathbf{1.}\quad \begin{cases} \mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a) \\ = (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u - \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,(a-u)}{\mathrm{dn}\,(a+u)}}, \text{ oder} \\ \mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a) \\ = (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u - \mathfrak{Arc\,Tang}(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u), \\ \mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a) \\ = \frac{k^2.\,\mathrm{sn}\,2a}{1+\mathrm{dn}\,2a}.u - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,2u}{\mathrm{sn}\,2a}\right) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,2u}{\mathrm{cnc}\,2a}\right). \end{cases}$$

Da $\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{C}(u,a) = (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u$ und auch $\mathfrak{S}(u,K-a)+\mathfrak{C}(u,K-a) = (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u$ ist, so erhält man durch Addition

$$\mathfrak{C}(u,a)+\mathfrak{C}(u,K-a)+\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a) = 2(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a)\,u,$$

und wird hiervon die Gleichung (1.) subtrahirt, so entsteht

$$\mathbf{2.}\quad \mathfrak{C}(u,K-a)+\mathfrak{C}(u,a) = (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u + \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,(a-u)}{\mathrm{dn}\,(a+u)}}.$$

Nach §. 116. ist

$$\mathfrak{D}(u,a)+\mathfrak{D}(u,K-a)+\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a) = (\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a+\mathrm{tnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a)\,u,$$

also

$$\mathfrak{D}(u,K-a)+\mathfrak{D}(u,a) = (\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a+\mathrm{tnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a)\,u + \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,(a-u)}{\mathrm{dn}\,(a+u)}},$$

und diese Gleichung reducirt sich auf

$$\mathbf{3.}\quad \mathfrak{D}(u,K-a)+\mathfrak{D}(u,a) = \frac{u}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a} + \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,(a-u)}{\mathrm{dn}\,(a+u)}}.$$

Stellen wir die in diesen drei Gleichungen vorkommenden Integrale also dar:

$$\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{A.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-n.\,\mathrm{sn}^2u} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}(u,K-a) = \int_0 \frac{A'.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-n'.\,\mathrm{sn}^2u},$$

$$\mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{B.\,\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1-n.\,\mathrm{sn}^2u} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}(u,K-a) = \int_0 \frac{B'.\,\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1-n'.\,\mathrm{sn}^2u},$$

$$\mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{C.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1-n.\,\mathrm{sn}^2u} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}(u,K-a) = \int_0 \frac{C'.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1-n'.\,\mathrm{sn}^2u},$$

so ist, dem §. 116. gemäfs, $n = k^2\,\mathrm{sn}^2a$ und $n' = k^2\,\mathrm{snc}^2a = k^2.\frac{1-\mathrm{sn}^2a}{1-k^2.\,\mathrm{sn}^2a}$, also

$$\mathbf{4.}\quad n' = \frac{k^2-n}{1-n} \quad \text{oder} \quad (1-n)(1-n') = k'^2.$$

Ferner ist $A = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ und $A' = k^2\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a = k^2k'^2.\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}^3a}$, also $\frac{A'}{A} = \frac{k'^2}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2a)^2} = \frac{k'^2}{(1-n)^2} = \frac{(1-n)(1-n')}{(1-n)^2}$, oder auch

5. $\frac{A'}{1-n'} = \frac{A}{1-n} = \sqrt{(nn')}; \quad A = \sqrt{(n(k^2-n)(1-n))}.$

Ferner ist $B = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a$ und $B' = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a$, also

6. $B' = B = \sqrt{(nn')} = \sqrt{\left(\frac{n(k^2-n)}{1-n}\right)}.$

Endlich ist $C = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a$ und $C' = \operatorname{tnc} a \operatorname{dnc} a = \frac{1}{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}$, oder auch

7. $C.C' = 1, \quad C = \sqrt{\frac{n}{n'}} = \sqrt{\left(\frac{n(1-n)}{k^2-n}\right)}.$

§. 129.

Die auf den Parameter $K'-a$ bezogenen Integrale der ersten Classe zurückgeführt auf andere mit dem Parameter a.

Addirt man die Gleichungen $S(u,a) = u.\mathfrak{El}\, a - \frac{\operatorname{lm}(u+ai) - \operatorname{lm}(u-ai)}{2i}$.

$S(u, K'-a) = u.\mathfrak{El}(K'-a) - \frac{\operatorname{lm}(u+iK'-ai) - \operatorname{lm}(u+ai-iK')}{2}$, so erhält man eine Relation zwischen den Integralen $S(u,a)$ und $S(u,K'-a)$. Schon in §. 140. kam die Formel

$$\frac{\operatorname{lm}(u-ai+iK') - \operatorname{lm}(u+ai-iK')}{2i} + \frac{\operatorname{lm}(u+ai) - \operatorname{lm}(u-ai)}{2i}$$
$$= (K'-E')u + \tfrac{1}{2}\pi + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(u-ai)}{\operatorname{sn}(u+ai)}}$$

vor: also ist

$$S(u, K'-a) + S(u, a)$$
$$= u(\mathfrak{El}\, a + \mathfrak{El}(K'-a)) - (K'-E')u - \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(u-ai)}{\operatorname{sn}(u+ai)}}.$$

Da nach §. 67. $\operatorname{el}(ai - iK') = \operatorname{el}(ai) + \frac{\operatorname{dn}(ai)}{\operatorname{tn}(ai)} - i(K'-E')$ oder auch $-\mathfrak{El}(K'-a) = \mathfrak{El}\, a - \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{cn}' a \operatorname{sn}' a} - (K'-E')$, also $\mathfrak{El}\, a + \mathfrak{El}(K'-a) = \frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} + K' - E'$ ist, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$S(u, K'-a) + S(u, a) = \frac{u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a . \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{tn} u}\right),$$

oder auch auf

1. $S(u, K'-a) + S(u, a) = \frac{u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \operatorname{dn} u}\right).$

Da nach §. 118.

$$S(u,a) + S(u, K'-a) + C(u,a) + C(u, K'-a) = \left(\frac{k^2 \operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a} + \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}\right) u$$

ist, so erhält man, wenn hiervon die vorige Gleichung subtrahirt wird,

$$C(u, K'-a) + C(u,a) = \left(\frac{k^2 \operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a} + \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a} - \frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \operatorname{dn} u}\right),$$

und diese Gleichung zieht sich zusammen auf

2. $C(u,K'-a)+C(u,a)=-(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)u+\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u}\right)$

oder

$$C(u,K'-a)+D(u,a)=\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u}\right).$$

Da $D(u,a)+D(u,K'-a)=C(u,a)+C(u,K'-a)+2(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).u$ ist, so erhält man

3. $D(u,K'-a)+D(u,a)=(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)u+\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u}\right)$

oder

$$D(u,K'-a)+C(u,a)=\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u}\right).$$

Stellen wir die in diesen Gleichungen vorkommenden Integrale also dar:

$$S(u,a)=\int_0\frac{A.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1+n\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad S(u,K'-a)=\int_0\frac{A'.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1+n'\,\mathrm{sn}^2u},$$

$$C(u,a)=\int_0\frac{B.\,\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1+n\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad C(u,K'-a)=\int_0\frac{B'.\,\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1+n'\,\mathrm{sn}^2u},$$

$$D(u,a)=\int_0\frac{C.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1+n\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad D(u,K'-a)=\int_0\frac{C'.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1+n'\,\mathrm{sn}^2u},$$

so ist, dem §. 118. gemäfs, $n=k^2\,\mathrm{tnc}'^2a$ und $n'=k^2\,\mathrm{tnc}'^2a$; also ist $nn'=k^4\,\mathrm{tn}'^2a\,\mathrm{tnc}'^2a$, oder auch

$$4.\quad n.n'=k^2.$$

Ferner ist $A=\frac{k^2\,\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a}{\mathrm{cn}'^2a}$ und $A'=\frac{k^2\,\mathrm{tnc}'a\,\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{cnc}'^2a}=\frac{\mathrm{cn}'a.\,\mathrm{dn}'a}{\mathrm{sn}'^3a}$, und da $A=\frac{k^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{dn}'a}{\mathrm{cn}'^3a}$ ist, so ist $\frac{A}{A'}=k^2\,\mathrm{tn}\,a'^4=\frac{n^2}{k^2}=\frac{n^2}{nn'}=\frac{n}{n'}$ oder

$$5.\quad \frac{A'}{n'}=\frac{A}{n}=\sqrt{((1+n)(1+n'))}.$$

Da $B=\frac{k^2.\,\mathrm{tn}'a}{\mathrm{dn}'a}$ und $B'=\frac{k^2.\,\mathrm{tnc}'a}{\mathrm{dnc}'a}=\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}$ ist, so ist

$$6.\quad B.B'=k^2=nn'\quad\text{und}\quad B=\sqrt{\frac{n(k^2+n)}{1+n}}=n\sqrt{\frac{1+n'}{1+n}}.$$

Da endlich $C=\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a$, also $C'=\frac{1}{\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a}$ ist, so ist

$$7.\quad C.C'=1\quad\text{und}\quad C=\sqrt{\frac{n(1+n)}{k^2+n}}=\sqrt{\frac{1+n}{1+n'}}.$$

§. 130.

Die auf den Parameter $K'-a$ bezogenen Integrale der dritten Classe zurückgeführt auf solche Integrale mit dem Parameter a.

Da $\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}'(a-ui)}{\mathrm{dn}'(a+ui)}} = \mathrm{arc\,tang}\left(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right)$ ist, so verwandeln sich die Formeln (1.), (2.), (3.) des §. 128., wenn man darin die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht und ui für u setzt, in

$$1.\quad {}'S(u,K'-a)+{}'S(u,a) = -(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)u+\mathrm{arc\,tang}\left(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

$$2.\quad {}'C(u,K'-a)+{}'C(u,a) = (k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)u+\mathrm{arc\,tang}\left(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

$$3.\quad {}'D(u,K'-a)+{}'D(u,a) = \frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}+\mathrm{arc\,tang}\left(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right).$$

Stellen wir die sechs in diesen Formeln vorkommenden Integrale also dar:

$${}'S(u,a)=\int_0\frac{A.\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-n.\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad {}'S(u,K'-a)=\int_0\frac{A'.\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-n'.\mathrm{sn}^2u},$$

$${}'C(u,a)=\int_0\frac{B.\partial u}{1-n.\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad {}'C(u,K'-a)=\int_0\frac{B'.\partial u}{1-n'.\mathrm{sn}^2u},$$

$${}'D(u,a)=\int_0\frac{C.\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1-n.\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad {}'D(u,K'-a)=\int_0\frac{C'.\mathrm{dn}^2.\partial u}{1-n'.\mathrm{sn}^2u},$$

so ist nach §. 119. die Zahl $n=\mathrm{dn}'^2a$ und $n'=\mathrm{dnc}'^2a=\frac{k^2}{\mathrm{dn}'^2a}$: also ist

$$4.\quad n.n'=k^2.$$

Ferner ist

$A=k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a\,\mathrm{dn}'a$ und $A'=k'^2\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{dnc}'a=\frac{k^2k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a}{\mathrm{dn}'^3a}$;

also ist

$$\frac{A'}{A}=\frac{k^2}{\mathrm{dn}'^4a}=\frac{nn'}{n^2}=\frac{n'}{n},$$

oder

$$5.\quad \frac{A'}{n'}=\frac{A}{n}=\sqrt{((1-n)(1-n'))}.$$

Es ist $B=k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a$ und $B'=k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a$, also ist

$$6.\quad B'=B=\sqrt{\frac{(1-n)(n-k^2)}{n}}=\sqrt{((1-n)(1-n'))}.$$

Da $C=\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a$, also $C'=\frac{1}{\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a}$ ist, so ist

$$7.\quad C.C'=1\quad\text{und}\quad C=\sqrt{\frac{n(1-n)}{n-k^2}}=\sqrt{\frac{1-n}{1-n'}}.$$

§. 131.

Die auf den Parameter $K-a$ bezogenen Integrale der vierten Classe zurückgeführt auf andere mit dem Parameter a.

Da $-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u-ai)}{\mathrm{sn}(u+ai)}} = \frac{1}{i}\left(\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+ai)}{\mathrm{sn}(u-ai)} - \frac{\pi i}{2}}\right) =$
$\frac{1}{i}\left(\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+ai)}{\mathrm{sn}(u-ai)} + \log\sqrt{\frac{1}{-1}}\right) = \frac{1}{i}\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{sn}(ai+u)}{\mathrm{sn}(ai-u)}\right.}$ ist, so können die Gleichungen (1.), (2.), (3.) des §. 129. auch also dargestellt werden:

$$S(u, K'-a) + S(u, a) = \frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(ai+u)}{\mathrm{sn}(ai-u)}},$$

$$C(a, K'-a) + C(u, a) = -(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).u - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(ai+u)}{\mathrm{sn}(ai-u)}},$$

$$D(u, K'-a) + D(u, a) = (k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).u - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(ai+u)}{\mathrm{sn}(ai-u)}}.$$

Vertauscht man hierin den Modul k mit k' und setzt ui für u, so erhält man

1. $$'\mathfrak{S}(u, K-a) + '\mathfrak{S}(u, a) = -\frac{u}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a} + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

2. $$'\mathfrak{C}(u, K-a) + '\mathfrak{C}(u, a) = -(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

3. $$'\mathfrak{D}(u, K-a) + '\mathfrak{D}(u, a) = (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}}.$$

Stellen wir die sechs in diesen Formeln vorkommenden Integrale wie folgt vor:

$$'\mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{A.\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad '\mathfrak{S}(u, K-a) = \int_0 \frac{A'.\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{1-n'\,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$'\mathfrak{C}(u, a) = \int_0 \frac{B.\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad '\mathfrak{C}(u, K-a) = \int_0 \frac{B'.\partial u}{1-n'\,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$'\mathfrak{D}(u, a) = \int_0 \frac{C.\mathrm{dn}^2 u.\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad '\mathfrak{D}(u, K-a) = \int_0 \frac{C'.\mathrm{dn}^2 u.\partial u}{1-n'\,\mathrm{sn}^2 u},$$

so ist $n = \frac{1}{\mathrm{snc}^2 a}$ und $n' = \frac{1}{\mathrm{sn}^2 a} = \frac{\mathrm{dnc}^2 a}{\mathrm{cnc}^2 a} = \frac{1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a}{1-\mathrm{snc}^2 a}$, also

$$4. \quad n' = \frac{n-k^2}{n-1},$$

und hieraus folgt

$$(n'-1)(n-1) = k'^2.$$

Ferner ist

$$A = \frac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2 a} = \frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^3 a} = \frac{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{snc}^3 a} = \sqrt{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{k^2}{n}\right).n^3\right)};$$

also ist

$$A = \sqrt{(n(n-1)(n-k^2))} = (n-1)\sqrt{(nn')},$$

oder

$$5. \quad \frac{A}{n-1} = \frac{A}{n'-1} = \sqrt{(nn')}.$$

Da $B = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} = \sqrt{\left(\frac{(n-k^2)(n-1)}{n}\right)}$ ist, so ist

$$B = (n-1)\sqrt{\frac{n'}{n}} \quad \text{und} \quad B' = (n'-1)\sqrt{\frac{n}{n'}}$$

oder

$$6. \quad B.B' = (n-1)(n'-1) = k'^2.$$

Endlich $C = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a$, also $C' = \operatorname{tnc} a \operatorname{dnc} a$, folglich $C' = \sqrt{\frac{n-k^2}{n(n-1)}}$ oder

$$7. \quad C' = \sqrt{\frac{n'}{n}} \quad \text{und} \quad C = \sqrt{\frac{n}{n'}},$$

also

$$C.C' = 1.$$

§. 132.

Die auf den Parameter $a + iK'$ bezogenen Integrale der zweiten und vierten Classe und die auf den Parameter $a + iK$ bezogenen Integrale der ersten und dritten Classe zurückgeführt auf Integrale mit einem reellen Parameter.

Setzt man $a + iK'$ für a, so verwandelt sich $k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a$ in $k^2 . \frac{1}{k \operatorname{sn} a} . \frac{-i \operatorname{dn} a}{k \operatorname{sn} a} . \frac{-i}{\operatorname{tn} a} = -\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{tn} a} = -\frac{k'^2 \operatorname{tnc} a \operatorname{dnc} a}{\operatorname{cnc}^2 a}$ und $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u$ verwandelt sich in $1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}$; daher verwandelt sich das Integral $\mathfrak{S}(u, a)$ in $-\int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{sn}^2 u . \partial u}{\operatorname{cnc}^2 a \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}\right)}$, und da $'\mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u . \partial u}{\operatorname{cn}^2 a \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)}$ ist, so ist

$$1. \quad \mathfrak{S}(u, a + iK') = -'\mathfrak{S}(u, K - a).$$

Setzt man ferner in der Gleichung $\mathfrak{E}(u, a) + \mathfrak{S}(u, a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a . u$ statt a, $a + iK'$, so verwandelt sie sich in

$$\mathfrak{E}(u, a + iK') + \mathfrak{S}(u, a + iK') = \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a}$$

und es ist

$$\mathfrak{E}(u, a + iK') = \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + '\mathfrak{S}(u, K - a).$$

Da ferner nach §. 121. $'\mathfrak{S}(u, K - a) = '\mathfrak{E}(u, K - a) - \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . u$ ist, so erhält man

$$2. \quad \mathfrak{E}(u, a + iK') = \mathfrak{E}'(u, K - a) + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} a . u.$$

Setzt man in der Gleichung $\mathfrak{D}(u, a) + \mathfrak{S}(u, a) = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a . u$ ebenfalls $a + iK'$ statt a, so verwandelt sich $\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a$ in $\frac{1}{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}$; daher ist

$$\mathfrak{D}(u, a + iK') = '\mathfrak{S}(u, K - a) + \frac{u}{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a} = '\mathfrak{S}(u, K - a) + \frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{sn} a} . u,$$

und da $\mathfrak{D}'(u, K-a) = {}'\mathfrak{S}(u, K-a) + \frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{sn} a}.u$ ist, so erhalten wir

$$3.\quad \mathfrak{D}(u, a+iK') = {}'\mathfrak{D}(u, K-a).$$

Setzt man in den vorstehenden drei Formeln $K-a-iK' = K-(a+iK')$ statt a, so verwandelt sich $a+iK'$ in $K-a$ und $K-a$ in $(a+iK')$, ferner $\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a$ in

$$\operatorname{tnc}(a+iK').\operatorname{dnc}(a+iK') = \frac{1}{\operatorname{tn}(a+iK').\operatorname{dn}(a+iK')} = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a;$$

daher erhalten wir noch

$$4.\quad {}'\mathfrak{S}(u, a+iK') = -\mathfrak{S}(u, K-a),$$
$$5.\quad {}'\mathfrak{C}(u, a+iK') = \mathfrak{C}(u, K-a) - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a.u,$$
$$6.\quad {}'\mathfrak{D}(u, a+iK') = \mathfrak{D}(u, K-a).$$

Vertauscht man in den vorigen 6 Formeln die beiden conjugirten Modul mit einander und setzt man zugleich ui statt u, so verwandeln sie sich in

$$7.\quad S(u, a+iK) = -{}'S(u, K'-a),$$
$$8.\quad C(u, a+iK) = {}'C(u, K'-a) - \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a.u,$$
$$9.\quad D(u, a+iK) = {}'D(u, K'-a),$$
$$10.\quad {}'S(u, a+iK) = -S(u, K'-a),$$
$$11.\quad {}'C(u, a+iK) = C(u, K'-a) + \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a.u,$$
$$12.\quad {}'D(u, a+iK) = D(u, K'-a).$$

§. 133.

Relationen zwischen den Integralen der ersten und dritten Classe, in reellen Formen.

Setzt man in der Formel (1.) des §. 128. ai statt a, so erhält man zunächst

$$\mathfrak{S}(u, ai) + \mathfrak{S}(u, K-ai) = \frac{ik^2 \operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}.u - \log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}}.$$

Da aber $K-ai = -i(a+iK)$, also $\mathfrak{S}(u, K-ai) = -iS(u, a+iK) = i\,{}'S(u, K'-a)$ ist, so verwandelt sich die Formel in

$$1.\quad \begin{cases} S(u,a) + {}'S(u, K'-a) = \frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.u - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}} \text{ oder} \\ S(u,a) + {}'S(u, K'-a) = \frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.u - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right) \text{ oder} \\ S(u, K'-a) + {}'S(u,a) = \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}.u - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right). \end{cases}$$

Die Formel (2.) des §. 128. verwandelt sich zunächst in

$$C(u, a) - C(u, a+iK) = \frac{k^2 \operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}.u + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}}$$

und da

$$C(u, a+i.K) = {}'C(u, K'-a) - \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a.u$$

ist, so giebt die Addition dieser beiden Formeln:

$$2.\quad \begin{cases} C(u,a) = {}'C(u,K'-a) - (k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).u + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-ai)}{\mathrm{dn}(u+ai)}} \text{ oder} \\ C(u,a) = {}'C(u,K'-a) - (k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).u + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{tnc}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right) \text{ und} \\ C(u,K'-a) = {}'C(u,a) - (k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).u + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right). \end{cases}$$

Die Formel (3.) des §. 128. verwandelt sich in

$$3.\quad \begin{cases} D(u,a) = {}'D(u,K'-a) - \frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.u + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-ai)}{\mathrm{dn}(u+ai)}} \text{ oder} \\ D(u,a) = {}'D(u,K'-a) - \frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.u + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{tnc}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right) \text{ und} \\ D(u,K'-a) = {}'D(u,a) - \frac{\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{tnc}'a}.u + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right). \end{cases}$$

Die vorigen Gleichungen können etwas einfacher also dargestellt werden:

$$4.\quad \begin{cases} {}'S(u,K'-a) = C(u,a) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{tnc}'a},\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right), \\ C(u,K'-a) = {}'S(u,a) + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right), \end{cases}$$

$$5.\quad \begin{cases} D(u,a) = C(u,K'-a) + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{tnc}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right), \\ D(u,K'-a) = {}'C(u,a) + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln des §. 128. k' statt k und ui statt u, so verwandelt sich $\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}}$ in

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}'(a-ui)}{\mathrm{dn}'(a+ui)}} = -\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-ai)}{\mathrm{dn}(u+ai)}} + \log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(u-ai)}{\mathrm{cn}(u+ai)}},$$

da $\mathrm{dn}'(a-ui) = \mathrm{dn}'(-i(u+ai)) = \frac{\mathrm{dn}(u+ai)}{\mathrm{cn}(u+ai)}$ und $\mathrm{dn}'(a+ui) = \mathrm{dn}'(i(u-ai) = \frac{\mathrm{dn}(u-ai)}{\mathrm{cn}(u-ai)}$ ist. Hiernach ist also

$$\begin{aligned} &{}'S(u,a) + {}'S(u,K'-a) \\ &= -(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)\,u - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-ai)}{\mathrm{dn}(u+a)}} + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(u-ai)}{\mathrm{cn}(u+ai)}}, \\ &{}'C(u,a) + {}'C(u,K'-a) \\ &= (k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)\,u - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-ai)}{\mathrm{dn}(u+ai)}} + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(u-ai)}{\mathrm{cn}(u+ai)}}, \\ &{}'D(u,a) + {}'D(u,K'-a) \\ &= \frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-ai)}{\mathrm{dn}(u+ai)}} + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(u-ai)}{\mathrm{cn}(u+ai)}}. \end{aligned}$$

Verbindet man hiermit die vorigen Gleichungen (1.), (2.), (3.), so erhält man

$$'S(u,a) - S(u,a) = -\left(k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a + \frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}\right) u + \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{\operatorname{cn}(u - ai)}{\operatorname{cn}(u + ai)}},$$

$$'C(u,a) + C(u,a) = \frac{1}{i} \log \frac{\operatorname{cn}(u - ai)}{\operatorname{cn}(u + ai)},$$

$$'D(u,a) + D(u,a) = u\left(\frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}\right) + \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{\operatorname{cn}(u - ai)}{\operatorname{cn}(u + ai)}};$$

und diese Gleichungen lassen sich also umformen:

$$'S(u,a) - S(u,a) = -\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$'C(u,a) + C(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$'D(u,a) + D(u,a) = \frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right).$$

Die erste und dritte von diesen Gleichungen lassen sich noch etwas einfacher darstellen und wir merken besonders die Gleichungen an:

$$6. \quad 'S(u,a) + D(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$7. \quad 'D(u,a) - S(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$8. \quad 'C(u,a) + C(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right).$$

Die Gleichung (7.) erhält man aus der Gleichung (6.), wenn man die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht und ai für a, ui für u setzt.

Wir begleiten die vorigen Formeln noch mit den folgenden Zusätzen.

I. Setzen wir in der Gleichung

$$C(u, K' - a) = 'S(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a} \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right)$$

das Integral $C(u, K' - a) = \int_0 \frac{A \cdot \operatorname{cn}^2 u \cdot \partial u}{1 + m \operatorname{sn}^2 u}$ und $'S(u,a) = \int_0 \frac{B \cdot \operatorname{sn}^2 u \cdot \partial u}{1 - n \operatorname{sn}^2 u}$,

so ist $B = k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{cn}' a \operatorname{dn}' a$, $n = \operatorname{dn}'^2 a$, $A = \frac{k^2 \operatorname{tnc}' a}{\operatorname{dnc}' a} = \frac{\operatorname{du}' a}{\operatorname{tn}' a}$ und $m = k^2 \operatorname{tnc}'^2 a = \frac{1}{\operatorname{tn}'^2 a} = \frac{\operatorname{dn}'^2 a - k^2}{1 - \operatorname{dn}'^2 a}$, also

$$m = \frac{n - k^2}{1 - n}, \quad (1 + m)(1 - n) = k'^2;$$

ferner $A = \sqrt{\frac{n(n - k^2)}{1 - n}} = \sqrt{(mn)}$ und $B = \sqrt{(n(1-n)(n-k^2))} = (1-n)\sqrt{(mn)}$, also

$$\frac{B}{A} = 1 - n.$$

II. Setzen wir in der Gleichung

$$D(u, K'-a) = {}'C(u, a) + \text{arc tang}\left(\frac{\text{dn}'a}{\text{tn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right)$$

das Integral $D(u, K'-a) = \int_0 \frac{A.\,\text{dn}^2 u.\,\partial u}{1+m\,\text{sn}^2 u}$ und ${}'C(u, a) = \int_0 \frac{B.\,\partial u}{1-n\,\text{sn}^2 u}$, so ist, wie vorhin,

$$m = \frac{n-k^2}{1-n} \quad \text{oder} \quad (1+m)(1-n) = k'^2.$$

Ferner ist $A = \frac{1}{\text{tn}'a\,\text{dn}'a}$ und $B = k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a$: also ist

$A = \sqrt{\frac{n-k^2}{n(1-n)}} = \sqrt{\frac{m}{u}}$ und $B = \sqrt{\frac{(1-n)(n-k^2)}{n}} = (1-n)\sqrt{\frac{m}{n}}$; folglich ist

$$\frac{B}{A} = 1-n.$$

III. Setzt man die in der Gleichung

$$D(u, a) + {}'S(u, a) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}.\frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u}\right)$$

vorkommenden Integrale

$$D(u, a) = \int_0 \frac{A.\,\text{dn}^2 u.\,\partial u}{1+m.\,\text{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad {}'S(u, a) = \int_0 \frac{B.\,\text{sn}^2 u.\,\partial u}{1-n.\,\text{sn}^2 u},$$

so ist

$m = k^2.\text{tn}'^2 a$ und $n = \text{dn}'^2 a$; $A = \text{tn}'a\,\text{dn}'a$ und $B = k'^2\,\text{sn}'a\,\text{cn}'a\,\text{dn}'a$;

also ist $m = k^2.\frac{1-n}{n-k^2}$, folglich $\frac{(1+m)(1-n)}{mn} = \frac{k'^2}{k^2}$ und $n = \frac{k^2(1+m)}{m+k^2}$.

Ferner ist

$$A = \sqrt{\frac{n(1-n)}{n-k^2}} = \frac{\sqrt{(mn)}}{k} \quad \text{und} \quad B = \sqrt{(n(1-n)(n-k^2))} = (1-n)k\sqrt{\frac{n}{m}},$$

also

$$AB = n(1-n) \quad \text{und} \quad \frac{B}{A} = n-k^2.$$

IV. Setzt man in der Gleichung

$${}'D(u, a) - S(u, a) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}.\frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u}\right)$$

das Integral

$$S(u, a) = \int_0 \frac{A.\,\text{sn}^2 u.\,\partial u}{1+m\,\text{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad {}'D(u, a) = \int_0 \frac{B.\,\text{dn}^2 u.\,\partial u}{1-n\,\text{sn}^2 u},$$

so ist, wie vorhin,

$$m = k^2\,\text{tn}'^2 a, \quad A = \frac{k^2\,\text{tn}'a\,\text{dn}'a}{\text{cn}'^2 a}, \quad n = \text{dn}'^2 a \quad \text{und} \quad B = \text{tn}'a\,\text{dn}'a,$$

also

$$m = \frac{k^2(1-n)}{n-k^2}, \quad n = \frac{k^2(1+m)}{m+k^2}, \quad \frac{(1+m)(1-n)}{mn} = \frac{k'^2}{k^2}.$$

Ferner ist

$$A = \sqrt{(m(m+k^2)(1+m))} \quad \text{und} \quad B = \sqrt{\frac{m\ (1+m)}{k^2+m}};$$

also ist

$$\frac{A}{B} = m + k^2.$$

V. Setzt man die in der Gleichung

$$'C(u, a) + C(u, a) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{sn}' a}{\text{snc}' a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right)$$

vorkommenden Integrale

$$C(a, u) = \int_0 \frac{A \cdot \text{cn}^2 u \cdot \partial u}{1 + m\,\text{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad 'C(u, a) = \int_0 \frac{B \cdot \partial u}{1 - n\,\text{sn}^2 u},$$

so ist wieder

$$m = \frac{k^2(1-u)}{n - k^2}, \quad n = \frac{k^2(1+m)}{m + k^2}, \quad \frac{(1+m)(1-n)}{mn} = \frac{k'^2}{k^2}.$$

Ferner ist $A = \frac{k^2\,\text{tn}' a}{\text{dn}' a}$ und $B = k'^2\,\text{sn}' a\,\text{snc}' a$: also ist

$$A = k^2\sqrt{\frac{1-n}{n(n-k^2)}} \quad \text{und} \quad B = \sqrt{\frac{(1-n)(n-k^2)}{n}},$$

folglich

$$\frac{B}{A} = \frac{n-k^2}{k^2} = \frac{1-n}{m}.$$

§. 134.

Relationen zwischen den Integralen der zweiten und vierten Classe, in reeller Form.

Setzt man in den Gleichungen (4. — 8.) des §. 133. ui statt u, indem man zugleich den Modul mit dem conjugirten vertauscht, so erhält man

$$'\mathfrak{C}(u, K-a) + \mathfrak{S}(u, a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{dn}\, a}{\text{tn}\, a} \cdot \frac{\text{tn}\, u}{\text{dn}\, u}\right) = \log\sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}},$$

$$'\mathfrak{D}(u, K-a) - \mathfrak{C}(u, a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{dn}\, a}{\text{tn}\, a} \cdot \frac{\text{tn}\, u}{\text{dn}\, u}\right) = \log\sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}},$$

$$'\mathfrak{D}(u, a) - \mathfrak{S}(u, a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{sn}\, a}{\text{snc}\, a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right) = \log\sqrt{\frac{\text{cn}(a-u)}{\text{cn}(a+u)}},$$

$$'\mathfrak{S}(u, a) + \mathfrak{D}(u, a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{sn}\, a}{\text{snc}\, a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right) = \log\sqrt{\frac{\text{cn}(a-u)}{\text{cn}(a+u)}},$$

$$\mathfrak{C}'(u, a) + \mathfrak{C}(u, a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{sn}\, a}{\text{snc}\, a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right) = \log\sqrt{\frac{\text{cn}(a-u)}{\text{cn}(a+u)}}.$$

Es lassen sich diese Gleichungen zum Theil auch dadurch finden, dafs man in den Formeln des §. 39. u statt b setzt, darauf mit ∂u sie multiplicirt und integrirt.

Wir begleiten auch diese Formeln noch mit folgenden Zusätzen, durch welche ihre Anwendung erleichtert wird:

I. Setzen wir die in der Gleichung

$$'\mathfrak{C}(u, K-a) + \mathfrak{S}(u, a) = \log\sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}}$$

vorkommenden Integrale

$$\mathfrak{S}(u,a)=\int_0 \frac{A\,.\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{1-m\,\mathrm{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad {}'\mathfrak{S}(u,K-a)=\int_0 \frac{B\,.\,\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u},$$

so ist

$$m=k^2\,\mathrm{sn}^2 a,\quad A=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a,\quad n=\frac{1}{\mathrm{sn}^2 a},\quad B=\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a},$$

also

$$mn=k^2.$$

Ferner ist

$$A=\sqrt{(m(k^2-m)(1-m))} \quad \text{und} \quad B=\sqrt{\frac{(1-m)(k^2-m)}{m}},$$

also ist

$$\frac{A}{B}=m.$$

II. Setzen wir die in der Gleichung

$${}'\mathfrak{D}(u,K-a)-\mathfrak{S}(u,a)=\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+u)}{\mathrm{sn}(a-u)}}$$

vorkommenden Integrale

$$\mathfrak{S}(u,a)=\int_0 \frac{A\,.\,\mathrm{cn}^2 u\,.\,\partial u}{1-m\,\mathrm{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad {}'\mathfrak{D}(u,K-a)=\int_0 \frac{B\,.\,\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u},$$

so ist, wie vorher,

$$mn=k^2.$$

Ferner ist

$$A=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a \quad \text{und} \quad B=\frac{1}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a};$$

also ist

$$A=\sqrt{\frac{m(k^2-m)}{1-m}} \quad \text{und} \quad B=\sqrt{\frac{k^2-m}{m(1-m)}},$$

folglich

$$\frac{A}{B}=m.$$

III. Stellen wir die in der Gleichung

$${}'\mathfrak{D}(u,a)-\mathfrak{S}(u,a)=\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(a-u)}{\mathrm{cn}(a+u)}}$$

enthaltenen Integrale durch

$$\mathfrak{S}(u,a)=\int_0 \frac{A\,.\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{1-m\,\mathrm{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad {}'\mathfrak{D}(u,a)=\int_0 \frac{B\,.\,\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u}$$

vor, so ist

$$m=k^2\,\mathrm{sn}^2 a \quad \text{und} \quad n=\frac{1}{\mathrm{snc}^2 a}=\frac{k^2(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a)}{k^2-k^2\,\mathrm{sn}^2 a},$$

also

$$n=\frac{k^2(1-m)}{k^2-m},\quad m=\frac{k^2(n-1)}{n-k^2},\quad \text{oder}\quad \frac{(1-m)(n-1)}{mn}=\frac{k'^2}{k^2}.$$

Da $A=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ und $B=\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ ist, so findet sich

$$A=\sqrt{(m(k^2-m)(1-m))} \quad \text{und} \quad B=\sqrt{\frac{m(1-m)}{k^2-m}},\quad \text{also}\quad \frac{A}{B}=k^2-m.$$

IV. Setzen wir mit Beziehung auf die Gleichung

$$'\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{D}(u,a)=\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(a-u)}{\mathrm{cn}(a+u)}}$$

die Integrale

$$\mathfrak{D}(u,a)=\int_0\frac{A.\,\mathrm{dn}^2u.\,\partial u}{1-m\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad'\mathfrak{S}(u,a)=\int_0\frac{B.\,\mathrm{sn}^2u.\,\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2u},$$

so ist, wie vorher,

$$n=\frac{k^2(1-m)}{k^2-m},\quad m=\frac{k^2(n-1)}{n-k^2},\quad\frac{(1-m)(n-1)}{mn}=\frac{k'^2}{k^2}.$$

Da ferner $A=\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ und $B=\frac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2\,a}$ ist, so ist

$$B=\frac{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{snc}^3\,a}=\sqrt{\left(\left(\frac{1}{\mathrm{snc}^2\,a}-1\right)\left(\frac{1}{\mathrm{snc}^2\,a}-k^2\right).\frac{1}{\mathrm{snc}^2\,a}\right)},$$

also

$$B=\sqrt{((n-1)(n-k^2).n)}\quad\text{und}\quad A=\sqrt{\frac{n(n-1)}{n-k^2}},\quad\text{also}\quad\frac{B}{A}=n-k^2.$$

V. Werden endlich die in der Gleichung

$$\mathfrak{E}'(u,a)+\mathfrak{E}(u,a)=\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(a-u)}{\mathrm{cn}(a+u)}}$$

enthaltenen Integrale durch

$$\mathfrak{E}(u,a)=\int_0\frac{A.\,\mathrm{cn}^2u.\,\partial u}{1-m\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad'\mathfrak{E}(u,a)=\int_0\frac{B.\,\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2u}$$

ausgedrückt, so ist wieder

$$n=\frac{k^2(1-m)}{k^2-m},\quad m=\frac{k^2(n-1)}{n-k^2},\quad\frac{(1-m)(n-1)}{mn}=\frac{k'^2}{k^2}.$$

Ferner ist $A=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a$ und $B=\frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}$, also

$$A=k^2.\sqrt{\frac{n-1}{n(n-k^2)}}\quad\text{und}\quad B=\sqrt{\frac{(n-1)(n-k^2)}{n}},\quad\text{folglich}\quad\frac{B}{A}=\frac{n-k^2}{k^2}.$$

§. 135.

Ausdruck von $\mathfrak{S}(u+v,a)$ durch $\mathfrak{S}(u,a)$ und $\mathfrak{S}(v,a)$. Aehnliche Ausdrücke für die anderen Integrale der zweiten Classe.

Da $\mathfrak{S}(u+v,a)=(u+v).\,\mathrm{el}\,a-\frac{\mathrm{lm}(u+v+a)-\mathrm{lm}(u+v-a)}{2}$, ferner

$$\mathfrak{S}(u,a)=u.\,\mathrm{el}\,a-\frac{\mathrm{lm}(u+a)-\mathrm{lm}(u-a)}{2}\quad\text{und}$$

$$\mathfrak{S}(v,a)=v.\,\mathrm{el}\,a-\frac{\mathrm{lm}(v+a)-\mathrm{lm}(v-a)}{2}$$

ist, so erhält man zunächst, wenn von der ersten Gleichung die Summe der beiden anderen subtrahirt wird,

$$\mathfrak{S}(u+v,a)=\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(v,a)+\tfrac{1}{2}[\mathrm{lm}(u+a)-\mathrm{lm}(u-a)+\mathrm{lm}(v+a)-\mathrm{lm}(v-a)-\mathrm{lm}(u+v+a)+\mathrm{lm}(u+v-a)].$$

Derjenige Theil dieses Ausdrucks, welcher Modular-Logarithmen enthält, läfst sich auf mehrere Arten also umformen, dafs er durch cyklische Modular-Functionen berechnet werden kann und kam auch in der Formel (11.) des §. 73. vor.

Wird die erwähnte Formel benutzt und wird gesetzt:

$$1.\quad \mathfrak{S}(u+v,a) = \mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{S}(v,a) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2),$$

so haben wir zur Bestimmung der hyperbolischen Amplitude μ_2 in dieser die Sinus-Integrale der zweiten Classe betreffenden Formel den Ausdruck

$$2.\quad \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v-a)}}.$$

Derselbe im §. 44. und §. 45. mit $\log U$ bezeichnete Ausdruck ist in anderen Formen darstellbar und es ist

$$3.\quad \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)}} - \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)}{\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}},$$

$$4.\quad \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}}$$

$$-\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u-v}{2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u-v}{2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}},$$

$$5.\quad \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+a)}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2(u+v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2(u+v+a)}},$$

$$6.\quad \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)}},$$

$$7.\quad \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+v+a)}{\mathrm{sn}(u+v-a)}} - \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}},$$

$$8.\quad \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}(v-a)\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}\,u-\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}\,v}},$$

$$9.\quad \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2(v+a)}} + \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{sn}^2(u+a)}}.$$

Aufserdem haben wir noch

$$10.\quad \mu_2 = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{cn}^2\,a+\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}(u+v)},$$

$$11.\quad \mu_2 = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}^2\,a+k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)}.$$

Da

$$\mathfrak{C}(u+v,a)+\mathfrak{S}(u+v,a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.(u+v),$$
$$\mathfrak{C}(u,a)+\mathfrak{S}(u,a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.u \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{C}(v,a)+\mathfrak{S}(v,a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.v$$

ist, so erhält man, wenn man von der ersten Gleichung die Summe der beiden andern subtrahirt, und für $\mathfrak{S}(u+v,a)-\mathfrak{S}(u,a)-\mathfrak{S}(v,a)$ den Werth $\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2)$ setzt,

12. $$\mathfrak{C}(u+v,a) = \mathfrak{C}(u,a)+\mathfrak{C}(v,a)-\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2).$$

Ganz eben so findet man noch

13. $$\mathfrak{D}(u+v,a) = \mathfrak{D}(u,a)+\mathfrak{D}(v,a)-\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2).$$

Man kann diese Gleichung aber auch aus (7.) dadurch herleiten, dafs man ka statt a, ku statt u, kv statt v und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt, wobei μ_2 ungeändert bleibt.

Zu denselben Resultaten führt auch unmittelbar die Anwendung der Gleichung (11.) §. 73.

Zusatz. Setzt man $u+v=K$, also $\mathrm{cn}(u+v)=0$, so wird $\mu_2 = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{dn}^2\,a} = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u$ und die Formeln (1., 6., 8.) stimmen dann mit den Formeln (1., 2., 3.) im §. 126. überein.

§. 136.

Entwicklung der auf ein zweigliedriges Argument $u+v$ bezogenen Integrale der ersten, dritten und vierten Classe.

Setzen wir in den vorigen Formeln ai für a, so wird μ_2 imaginär. Setzen wir also $i.\mu_1$ an dessen Stelle, so haben wir für die Integrale der ersten Classe die Formeln

$$S(u+v,a) = S(u,a)+S(v,a)+\mathrm{arc\,tang}(\mu_1),$$
$$C(u+v,a) = C(u,a)+C(v,a)-\mathrm{arc\,tang}(\mu_1),$$
$$D(u+v,a) = D(u,a)+D(v,a)-\mathrm{arc\,tang}(\mu_1),$$

$$\mu_1 = \frac{k^2\,\mathrm{tn}'\,a\,\mathrm{dn}'\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,(u+v)}{1-\mathrm{sn}'^2\,a\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,(u+v)} = \frac{k^2\,\mathrm{tn}'\,a\,\mathrm{dn}'\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,(u+v)}{\mathrm{dn}'^2\,a-k^2\,\mathrm{sn}'^2\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,(u+v)}.$$

Wenn man aber den Modul k mit k' vertauscht, ferner ui statt u und vi statt v setzt, so wird μ_2 negativ und imaginär. Bezeichnen wir also den geänderten Werth von μ_2 mit $-i.\mu_3$, so erhalten wir die Formeln

$$'S(u+v,a) = 'S(u,a) + 'S(v,a) + \text{arc tang}(\mu_3),$$
$$'C(u+v,a) = 'C(u,a) + 'C(v,a) + \text{arc tang}(\mu_3),$$
$$'D(u+v,a) = 'D(u,a) + 'D(v,a) + \text{arc tang}(\mu_3),$$
$$\mu_3 = \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}'^2a\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{cn}(u+v)+k'^2\,\mathrm{sn}'^2a}.$$

Man erhält auch

$$\mu_3 = \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{cn}'^2a\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{cn}(u+v)+\mathrm{sn}'^2a\,\mathrm{dn}u\,\mathrm{dn}v\,\mathrm{dn}(u+v)},$$

und da $\mathrm{cn}u\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{cn}(u+v) = \frac{\mathrm{dn}u\,\mathrm{dn}v\,\mathrm{dn}(u+v)-k'^2}{k^2}$ ist, so verwandelt sich der Ausdruck in

$$\mu_3 = \frac{k^2k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}'^2a\,\mathrm{dn}u\,\mathrm{dn}v\,\mathrm{dn}(u+v)-k'^2\,\mathrm{cn}'^2a} \text{ oder}$$
$$\mu_3 = \frac{k^2k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}u\,\mathrm{dn}v\,\mathrm{dn}(u+v)-k'^2\,\mathrm{snc}'^2a}.$$

Setzt man in den vorigen Formeln ai statt a und $i\mu_4$ statt μ_3, so erhält man endlich für die Integrale der vierten Classe die Ausdrücke

$$'\mathfrak{S}(u+v,a) = '\mathfrak{S}(u,a) + '\mathfrak{S}(v,a) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4),$$
$$'\mathfrak{C}(u+v,a) = '\mathfrak{C}(u,a) + '\mathfrak{C}(v,a) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4),$$
$$'\mathfrak{D}(u+v,a) = '\mathfrak{D}(u,a) + '\mathfrak{D}(v,a) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4) \text{ und}$$
$$\mu_4 = \frac{k'^2\,\mathrm{tn}a\,\mathrm{dn}a\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}^2a\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{cn}(u+v)-k'^2\,\mathrm{sn}^2a},$$
$$\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4) = \log\sqrt{\frac{1+k'^2\,\mathrm{tn}a\,\mathrm{tn}u\,\mathrm{tn}v\,\mathrm{tn}(u+v+a)}{1-k'^2\,\mathrm{tn}a\,\mathrm{tn}u\,\mathrm{tn}v\,\mathrm{tn}(u+v-a)}}.$$

§. 137.

Entwicklung der Integrale aller Classen, wenn ihr Parameter ein Binom ist.

Nach §. 121. ist

$$\mathfrak{S}(a,u+v) = \mathfrak{S}(u+v,a) + a.\mathrm{el}(u+v) - (u+v).\mathrm{el}a.$$

Eben so ist auch

$$\mathfrak{S}(a,u) = \mathfrak{S}(u,a) + a.\mathrm{el}u - u.\mathrm{el}a \text{ und}$$
$$\mathfrak{S}(a,v) = \mathfrak{S}(v,a) + a.\mathrm{el}v - v.\mathrm{el}a.$$

Subtrahirt man von der ersten Gleichung die Summe der beiden anderen, so erhält man

$$\mathfrak{S}(a,u+v) = \mathfrak{S}(a,u) + \mathfrak{S}(a,v) + a(\mathrm{el}(u+v) - \mathrm{el}u - \mathrm{el}v) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2),$$

wenn man für $\mathfrak{S}(u+v,a) - \mathfrak{S}(u,a) - \mathfrak{S}(v,a)$ den Werth $\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2)$ dem §. 136. gemäfs an die Stelle setzt. Da aufserdem nach §. 65.

$$\mathrm{el}(u+v) - \mathrm{el}u - \mathrm{el}v = -k^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}(u+v)$$

ist, so reducirt sich die Formel auf

1. $\mathfrak{S}(a,u+v) = \mathfrak{S}(a,u) + \mathfrak{S}(a,v) - a(k^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}(u+v)) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2).$

Da $\mathfrak{C}(a,u)+\mathfrak{S}(a,u)=a.k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u$, $\mathfrak{C}(a,v)+\mathfrak{S}(a,v)=a.k^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{snc}\,v$ und $\mathfrak{C}(a,u+v)+\mathfrak{S}(a,u+v)=a.k^2\,\mathrm{sn}\,(u+v)\,\mathrm{snc}\,(u+v)$ ist, so erhält man, wenn die Summe der beiden ersten Gleichungen von der dritten subtrahirt wird,

$$\mathfrak{C}(a,u+v)=\mathfrak{C}(a,u)+\mathfrak{C}(a,v)-(\mathfrak{S}(a,u+v)-\mathfrak{S}(a,u)-\mathfrak{S}(a,v))$$
$$+a.k^2(\mathrm{sn}\,(u+v)\,\mathrm{snc}\,(u+v)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{snc}\,v);$$

und wird die vorige Gleichung benutzt, so erhält man

$$\mathfrak{C}(a,u+v)=\mathfrak{C}(a,u)+\mathfrak{C}(a,v)$$
$$+a.k^2(\mathrm{sn}\,(u+v)\,\mathrm{snc}\,(u+v)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{snc}\,v+\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,(u+v))$$
$$-\text{Arc Tang}\,(\mu_2).$$

Der die cyklischen Modular-Functionen enthaltende Theil dieser Formel gestattet noch eine nambafte Zusammenziehung. Nach §. 38. ist

$$\mathrm{tn}\,(u+v)\,\mathrm{dn}\,(u+v)-\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u-\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v$$
$$=k'^2\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{tn}\,(u+v)-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,(u+v).$$

Setzt man in dieser Gleichung ku statt u, kv statt v und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandelt sie sich in

$$\mathrm{sn}\,(u+v)\,\mathrm{snc}\,(u+v)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{snc}\,v$$
$$=-\frac{1}{k'}\,\mathrm{cnc}\,u\,\mathrm{cnc}\,v\,\mathrm{cnc}\,(u+v)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,(u+v),$$

und wird dieser Werth in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man

$$2.\quad \mathfrak{C}(a,u+v)=\mathfrak{C}(a,u)+\mathfrak{C}(a,v)-a.\left(\frac{k^2}{k'}\,\mathrm{cnc}\,u\,\mathrm{cnc}\,v\,\mathrm{cnc}\,(u+v)\right)$$
$$-\text{Arc Tang}\,(\mu_2).$$

Da ferner $\mathfrak{D}(a,u)+\mathfrak{S}(a,u)=\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.a$, $\mathfrak{D}(a,v)+\mathfrak{S}(a,v)=\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v.a$ und $\mathfrak{D}(a,u+v)+\mathfrak{S}(a,u+v)=\mathrm{tn}\,(u+v)\,\mathrm{dn}\,(u+v)a$ ist, so erhält man

$$\mathfrak{D}(a,u+v)=\mathfrak{D}(a,u)+\mathfrak{D}(a,v)-(\mathfrak{S}(a,u+v)-\mathfrak{S}(a,u)-\mathfrak{S}(a,v))$$
$$+(\mathrm{tn}\,(u+v)\,\mathrm{dn}\,(u+v)-\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u-\mathrm{tn}\,v\,.\,\mathrm{dn}\,v).a,$$

oder auch

$$3.\quad \mathfrak{D}(a,u+v)$$
$$=\mathfrak{D}(a,u)+\mathfrak{D}(a,v)+a(k'^2.\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{tn}\,(u+v))-\text{Arc Tang}\,(\mu_2).$$

Dasselbe Resultat findet man, wenn man in der Gleichung (2.) ka statt a, ku statt u, kv statt v und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt.

Setzt man in den vorigen Formeln ui statt u und vi statt v, wodurch sich μ_2 in $-i\mu_3'$ verwandelt, so erhält man

$$4.\quad \mathfrak{S}(a,u+v)$$
$$=\mathfrak{S}(a,u)+\mathfrak{S}(a,v)+a\,(k^2\,\mathrm{tn}'\,u\,\mathrm{tn}'\,v\,\mathrm{tn}'\,(u+v))-\mathrm{arc\ tang}\,(\mu_3'),$$

$$5. \quad C(a, u+v)$$
$$= C(a,u) + C(a,v) + a\left(\frac{k'^2}{k}\operatorname{cnc}' u \operatorname{cnc}' v \operatorname{cnc}'(u+v)\right) + \operatorname{arc\,tang}(\mu_3'),$$
$$6. \quad D(a, u+v)$$
$$= D(a,u) + D(a,v) - a\,(k'^2 \operatorname{sn}' u \operatorname{sn}' v \operatorname{sn}'(u+v)) + \operatorname{arc\,tang}(\mu_3'),$$

und in diesen Formeln ist

$$\mu'_3 = \frac{k^2 \operatorname{sn}' u \operatorname{sn}' v \operatorname{sn}'(u+v) \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}' u \operatorname{cn}' v \operatorname{cn}'(u+v) \operatorname{dn}^2 a + k^2 \operatorname{sn}^2 a} = \frac{k^2 k'^2 \operatorname{sn}' u \operatorname{sn}' v \operatorname{sn}'(u+v) \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a}{\operatorname{dn}' u \operatorname{dn}' v \operatorname{dn}'(u+v) - k^2 \operatorname{snc}^2 a},$$

welche Gröfse sich also von μ_3 dadurch unterscheidet, dafs die beiden Modul k und k' mit einander vertauscht sind.

Setzt man in den drei ersten Formeln ai statt a, indem man zugleich k mit k' vertauscht, wodurch sich μ_2 in $i\mu_1'$ verwandelt, so hat man

$$7. \quad {}'S(a, u+v)$$
$$= {}'S(a,u) + {}'S(a,v) - \operatorname{arc\,tang}(\mu_1') + a\,(k'^2 \operatorname{sn}' u \operatorname{sn}' v \operatorname{sn}'(u+v)),$$
$$8. \quad {}'C(a, u+v)$$
$$= {}'C(a,u) + {}'C(a,v) - \operatorname{arc\,tang}(\mu_1') - a\left(\frac{k'^2}{k}\operatorname{cnc}' u \operatorname{cnc}' v \operatorname{cnc}'(u+v)\right),$$
$$9. \quad {}'D(a, u+v)$$
$$= {}'D(a,u) + {}'D(a,v) - \operatorname{arc\,tang}(\mu_1') + a\,(k^2 \operatorname{tn}' u \operatorname{tn}' v \operatorname{tn}'(u+v)),$$
$$\mu_1' = \frac{k'^2 \operatorname{sn}' u \operatorname{sn}' v \operatorname{sn}'(u+v) \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{dn}^2 a - k'^2 \operatorname{cn}' u \operatorname{cn}' v \operatorname{cn}'(u+v) \operatorname{sn}^2 a} = \frac{k'^2 \operatorname{sn}' u \operatorname{sn}' v \operatorname{sn}'(u+v) \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{1 - \operatorname{dn}' u \operatorname{dn}' v \operatorname{dn}'(u+v) \operatorname{sn}^2 a}.$$

Setzt man in diesen Formeln endlich ui statt u und vi statt v, wodurch sich μ_1' in $-\mu_4$ verwandelt, so hat man

$$10. \quad {}'\mathfrak{S}(a, u+v)$$
$$= {}'\mathfrak{S}(a,u) + {}'\mathfrak{S}(a,v) - a\,(k'^2 \operatorname{tn} u \operatorname{tn} v \operatorname{tn}(u+v)) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4),$$
$$11. \quad {}'\mathfrak{C}(a, u+v)$$
$$= {}'\mathfrak{C}(a,u) + {}'\mathfrak{C}(a,v) + a\left(\frac{k^2}{k'}\operatorname{cnc} u \operatorname{cnc} v \operatorname{cnc}(u+v)\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4),$$
$$12. \quad {}'\mathfrak{D}(a, u+v)$$
$$= {}'\mathfrak{D}(a,u) + {}'\mathfrak{D}(a,v) - a\,(k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v)) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4),$$

und in diesen Formeln hat μ_4 dieselbe Bedeutung, wie in §. 136.

§. 138.

Entwicklung der Integrale der zweiten Classe, wenn sowohl ihr Argument, als auch ihr Parameter ein Binom ist.

Es ist

$$\mathfrak{S}(u, a) + \mathfrak{S}(v, b)$$
$$= u.\operatorname{el} a + v.\operatorname{el} b - \tfrac{1}{2}[\operatorname{lm}(u+a) + \operatorname{lm}(v+b) - \operatorname{lm}(u-a) - \operatorname{lm}(v-b)].$$

Setzt man hierin $u+v$ statt u, $u-v$ statt v, $a+b$ statt a und $a-b$ statt b, so erhält man

$$\Theta(u+v, a+b)+\Theta(u-v, a-b) = (u+v).\mathrm{el}(a+b)+(u-v).\mathrm{el}(a-b)$$
$$-\tfrac{1}{2}[\mathrm{lm}(u+v+a+b)+\mathrm{lm}(u-v+a-b)-\mathrm{lm}(u+v-a-b)-\mathrm{lm}(u-v-a+b)].$$

Da nun aber

$$\frac{\mathrm{lm}\,A+\mathrm{lm}\,B}{2} = \mathrm{lm}\frac{A+B}{2}+\mathrm{lm}\frac{A-B}{2}+\log\sqrt{\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{A+B}{2}\,\mathrm{sn}^2\frac{A-B}{2}\right)}$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{lm}(u+v+a+b)+\mathrm{lm}(u-v+a-b)}{2}$$
$$= \mathrm{lm}(u+a)+\mathrm{lm}(v+b)+\log\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(u+b))},$$
$$\frac{\mathrm{lm}(u+v-a-b)+\mathrm{lm}(u-v-a+b)}{2}$$
$$= \mathrm{lm}(u-a)+\mathrm{lm}(v-b)+\log\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b))},$$

und werden diese Werthe substituirt, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$\Theta(u+v, a+b)+\Theta(u-v, a-b)$$
$$= (u+v)\,\mathrm{el}(a+b)+(u-v)\,\mathrm{el}(a-b)+\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+b)}}$$
$$-(\mathrm{lm}(u+a)-\mathrm{lm}(u-a)+\mathrm{lm}(v+b)-\mathrm{lm}(v-b)).$$

Da ferner

$$-(\mathrm{lm}(u+a)-\mathrm{lm}(u-a)) = -2u.\,\mathrm{el}\,a+2\Theta(u,a) \text{ und}$$
$$-(\mathrm{lm}(v+b)-\mathrm{lm}(v-b)) = -2v.\,\mathrm{el}\,b+2\Theta(v,b)$$

ist, so erhalten wir durch die Substitution dieser Werthe

$$\Theta(u+v, a+b)+\Theta(u-v, a-b)$$
$$= (u+v)\,\mathrm{el}(a+b)+(u-v)\,\mathrm{el}(a-b)-2u\,\mathrm{el}\,a-2v\,\mathrm{el}\,b$$
$$+2\Theta(u,a)+2\Theta(v,b)+\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+b)}}.$$

Da $2u=(u+v)+(u-v)$ und $2v=(u+v)-(u-v)$ ist, so läfst sich der Theil dieser Formel, welcher die Modular-Integrale der ersten Art enthält, auch also darstellen:

$$(u+v)[\mathrm{el}(a+b)-\mathrm{el}\,a-\mathrm{el}\,b]+(u-v)[\mathrm{el}(a-b)-\mathrm{el}\,a+\mathrm{el}\,b].$$

Da aber $\mathrm{el}(a+b)-\mathrm{el}\,a-\mathrm{el}\,b = -k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b)$ und also

$$\mathrm{el}(a-b)-\mathrm{el}\,a+\mathrm{el}\,b = +k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a-b)$$

ist, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

1. $$\Theta(u+v, a+b)+\Theta(u-v, a-b)$$
$$= 2\Theta(u,a)+2\Theta(v,b)+\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+b)}}.$$
$$-k^2\,\mathrm{sn}\,a.\,\mathrm{sn}\,b.[(u+v)\,\mathrm{sn}(a+b)-(u-v)\,\mathrm{sn}(a-b)].$$

Vertauscht man in dieser allgemeinen Formel a mit b, oder auch u mit v, so erhält man

$$\mathfrak{S}(u+v, a+b) - \mathfrak{S}(u-v, a-b)$$
$$= 2\mathfrak{S}(v, a) + 2\mathfrak{S}(u, b) + \log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(v-a)\,\mathrm{sn}^2(u-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(v+a)\,\mathrm{sn}^2(u+b)}}$$
$$- k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,.\,[(u+v)\,\mathrm{sn}(a+b) + (u-v)\,\mathrm{sn}(a-b)],$$

und wird diese Gleichung zu der vorigen addirt, so entsteht

$$2. \quad \mathfrak{S}(u+v, a+b)$$
$$= \mathfrak{S}(u, a) + \mathfrak{S}(v, a) + \mathfrak{S}(u, b) + \mathfrak{S}(v, b) - (u+v).(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b))$$
$$+ \log\sqrt[4]{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+b)} \cdot \frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(v-a)\,\mathrm{sn}^2(u-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(v+a)\,\mathrm{sn}^2(u+b)}\right)}.$$

Setzt man in dieser Formel $b = 0$, so reducirt sie sich auf

$$3. \quad \mathfrak{S}(u+v, a)$$
$$= \mathfrak{S}(u, a) + \mathfrak{S}(v, a) + \log\sqrt[4]{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u+a)} \cdot \frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(v+a)}\right)},$$

und es ist mithin auch die im §. 136. vorkommende Gröfse μ_2 ausgedrückt durch

$$\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \log\sqrt[4]{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u+a)} \cdot \frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(v+a)}\right)},$$

was mit der Formel (10.) im §. 44. übereinstimmt.

Setzen wir $b = 0$ in der Formel (1.), so wird sie

$$4. \quad \mathfrak{S}(u+v, a) + \mathfrak{S}(u-v, a) = 2\mathfrak{S}(u, a) + \log\sqrt{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u+a)}\right)}.$$

Setzt man aber in der Formel (1.) $v = 0$, so erhält man

$$5. \quad \mathfrak{S}(u, a+b) + \mathfrak{S}(u, a-b) = 2\mathfrak{S}(u, a) - u.k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,(\mathrm{sn}(a+b) - \mathrm{sn}(a-b))$$
$$+ \log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{sn}^2(u+a)}}.$$

Will man diese Formeln auf cyklische Integrale übertragen, so mufs man den logarithmischen Ausdrücken zuvor folgende Form geben:

$$\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{2k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,.\,A\,.\,B}{P^2 - k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,.\,(A^2+B^2)}\right),$$
$$\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{sn}^2(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{2k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,.\,A\,.\,B}{P^2 - k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,.\,(A^2+B^2)}\right),$$

worin $A = \mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u$, $B = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,a$ und $P = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u$ ist, so dafs $\mathrm{sn}(u-a) = \frac{A-B}{P}$ und $\mathrm{sn}(u+a) = \frac{A+B}{P}$ ist.

Wir formen den in der Gleichung (2.) enthaltenen logarithmischen Ausdruck noch um. Setzen wir

$\alpha+\beta=u-a$, also $\alpha=\frac{u+v-a-b}{2}$, so ist $\alpha-\alpha'=0$,

$\alpha-\beta=v-b$, - - $\beta=\frac{u-v-a+b}{2}$, - - $\alpha+\alpha'=u+v-a-b$,

$\alpha'+\beta'=u-b$, - - $\alpha'=\frac{u+v-a-b}{2}$, - - $\beta-\beta'=-(a-b)$,

$\alpha'-\beta'=v-a$, - - $\beta'=\frac{u-v+a-b}{2}$, - - $\beta+\beta'=u-v$.

Da nun nach §. 42. ist

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\alpha')}\cdot\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\alpha'-\beta')}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\beta-\beta')}\right)}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')\,\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')}\right)},$$

so erhalten wir durch Substitution der vorigen Werthe die Gleichung

$$\sqrt[4]{\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b))\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-b)\,\mathrm{sn}^2(v-a))}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-v)\,\mathrm{sn}^2(a-b)}}$$
$$\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-b)\,\mathrm{sn}(u-b)\,\mathrm{sn}(v-a))}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $-a$ statt a und $-b$ statt b, so erhält man eine neue Gleichung, und wird die vorige durch dieselbe dividirt, so entsteht

$$6.\quad \mathfrak{S}(u+v,\ a+b)$$
$$=\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,b)+\mathfrak{S}(v,a)+\mathfrak{S}(v,b)-(u+v)(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b))$$
$$+\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(u-b)\,\mathrm{sn}(v-a)\,\mathrm{sn}(v-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(u+b)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}(v+b)}}.$$

Werden die vorigen Werthe im zweiten Ausdrucke des §. 42. substituirt, so findet man

$$7.\quad \mathfrak{S}(u+v,a+b)$$
$$=\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,b)+\mathfrak{S}(v,a)+\mathfrak{S}(v,b)-(u+v)(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b))$$
$$+\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-b)-\mathrm{sn}(u-b)\,\mathrm{sn}(v-a)}{\mathrm{sn}(u+b)\,\mathrm{sn}(v+a)-\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+b)}}.$$

Wir übergehen die Aufstellung der Ausdrücke für das Cosinus- und Differente-Integral, welche sich leicht aus den vorigen herleiten lassen.

Zwölfter Abschnitt.

§. 139.

Erste Art der Berechnung von $\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$, wenn am u und am a nebst dem Modul k gegeben sind.

Bei der Berechnung des Integrales $\mathfrak{S}(u,a)=u.\mathrm{el}\,a-\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$ kommt es hauptsächlich auf die Berechnung der Differenz $\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$ aus am u, am a und dem Modul k an. Man kann nun zwar aus den drei gegebenen Gröfsen $\mathrm{am}(a+u)$ und $\pm\mathrm{am}(a-u)$ berechnen, und hieraus findet sich dann $\mathrm{lm}(a+u)$ und $\mathrm{lm}(a-u)$, nach den im §. 87. und §. 89. angegebenen Vorschriften; aber dieses Verfahren ist nicht mehr anzuwenden, wenn eine der beiden Gröfsen a und u imaginär ist, das zu berechnende Integral also entweder zur ersten oder dritten Classe gehört oder von cyklischer Natur ist. Es mufs also ein Verfahren der Berechnung entwickelt werden, welches auch dann anzuwenden ist, wenn entweder das Argument des Integrals oder sein Parameter imaginär ist. Leiten wir aus dem Argumente u und dem Modul k die immer kleiner werdenden Argumente u_1, u_2, u_3, u_4 etc. mit den noch viel rascher abnehmenden Moduln k_1, k_2, k_3, k_4 etc. nach §. 58. her, so ist, wenn die am angeführten Orte gebrauchte Bezeichnung auch hier angewandt wird,

$$u=\frac{u_1}{m_1}=\frac{u_2}{m_2}=\frac{u_3}{m_3}=\frac{u_4}{m_4}=\text{etc.}$$

Leiten wir nach demselben Verfahren aus dem Parameter a die immer kleiner werdenden Parameter a_1, a_2, a_3, a_4 etc. her, so ist auch

$$a=\frac{a_1}{m_1}=\frac{a_2}{m_2}=\frac{a_3}{m_3}=\frac{a_4}{m_4}=\text{etc.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$a+u=\frac{a_1+u_1}{m_1}=\frac{a_2+u_2}{m_2}=\frac{a_3+u_3}{m_2}=\frac{a_4+u_4}{m_4}=\text{etc.},$$

$$a-u=\frac{a_1-u_1}{m_1}=\frac{a_2-u_2}{m_2}=\frac{a_3-u_3}{m_3}=\frac{a_4-u_4}{m_4}=\text{etc.}$$

Wegen dieser Gleichungen ist aber nach §. 87.

$$\mathrm{lm}(a+u)=\frac{E}{K}.\frac{(u+a)^2}{2}+\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(a+u)}+2\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(a_1+u_1)}$$
$$+4\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(a_2+u_2)}+\text{etc. und}$$

$$\mathrm{lm}(u-a) = \frac{E}{K}.\frac{(u-a)^2}{2} + \log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(u-a)} + 2\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(u_1-a_1)} + 4\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(u_2-a_2)} + \text{etc.},$$

wenn sich die in diesen Reihen vorkommenden cyklischen Differenten auf die sich rasch verkleinernden successiven Modul k_1, k_2, k_3, k_4 etc., wie im §. 87., beziehen.

Wird die untere Reihe von der oberen subtrahirt, so erhält man

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}.au + \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(u-a)}{1+\mathrm{dn}(u+a)}} + 2\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(u_1-a_1)}{1+\mathrm{dn}(u_1+a_1)}} + 4\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(u_2-a_2)}{1+\mathrm{dn}(u_2+a_2)}} + \text{etc.}$$

Bezeichnen wir die Summe der logarithmischen Glieder dieser rasch convergirenden Reihe durch $\mathfrak{U}$, so haben wir

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}.au + \mathfrak{U}.$$

Wir entwickeln nun die einzelnen Glieder der Reihe $\mathfrak{U}$. Nach §. 33. ist

$$\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(u-a)}{1+\mathrm{dn}(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u}\right) \text{ oder auch}$$

$$= \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{tn}\,a}\right),$$

indem man a mit u vertauschen darf, ohne dafs der Ausdruck auf der linken Seite dadurch geändert wird. Hiernach ist also zunächst, wenn $a<u$ angesehen wird,

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1}\right) + 4\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{tn}\,u_2}\right) + \text{etc.}$$

$$-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u_1\,\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{dn}\,a_1\,\mathrm{tn}\,u_1}\right) - 4\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u_2\,\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{dn}\,a_2\,\mathrm{tn}\,u_2}\right) - \text{etc.},$$

und wenn $a>u$ ist, so wird man in dieser Reihe durchgängig a mit u vertauschen.

Die negativen Glieder dieser Reihe gestatten noch eine einfachere Darstellung. Da nämlich nach Formel (20. §. 53.)

$\mathrm{tn}\,u = (1+k_1).\frac{\mathrm{tn}\,u_1}{\mathrm{dn}\,u_1}$ und also auch $\mathrm{tn}\,a = (1+k_1).\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{dn}\,a_1}$ ist, so ist

$$\frac{\mathrm{dn}\,u_1\,\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{dn}\,a_1\,\mathrm{tn}\,u_1} = \frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}, \quad \text{eben so} \quad \frac{\mathrm{dn}\,u_2.\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{dn}\,a_2.\mathrm{tn}\,u_2} = \frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1} \text{ u. s. w.}$$

Wird hiervon Gebrauch gemacht, so ist

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1}\right) + 4\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{tn}\,u_2}\right) + 8\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_3}{\mathrm{tn}\,u_3}\right) + \text{etc.}$$

$$-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}\right) - 4\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1}\right) - 8\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{tn}\,u_2}\right) - \text{etc.};$$

woraus zu ersehen, dafs dieselben hyperbolischen Arcus, welche im negativen Theile der Reihe vorkommen, mit Ausnahme des allerersten, auch in dem positiven Theile der Reihe enthalten sind; wodurch die Rechnung ungemein erleichtert wird. Setzen wir zu noch gröfserer Abkürzung

$$\mathfrak{Tang}\,\mu=\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u},\quad \mathfrak{Tang}\,\mu_1=\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u},\quad \mathfrak{Tang}\,\mu_2=\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1},\quad \mathfrak{Tang}\,\mu_3=\frac{\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{tn}\,u_2}\ \text{etc.},$$

so haben wir die folgende einfache Darstellung:

1. $$\mathfrak{U}=(\mu_1-\mu)+2(\mu_2-\mu_1)+4(\mu_3-\mu_2)+8(\mu_4-\mu_3)+16(\mu_5-\mu_4)+\text{etc.},$$

und es handelt sich nur noch um die Feststellung eines Mechanismus der Berechnung der Gröfsen μ, μ_1, μ_2, μ_3 etc. oder auch ihrer hyperbolischen Tangenten.

Wir leiten zunächst aus $\mathrm{am}\,u=\Phi$, $\mathrm{am}\,a=\alpha$ und dem Modul k, indem wir $\Delta=\sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)}$ und $\Delta'=\sqrt{(1-k^2\sin^2\alpha)}$ setzen, die Gröfsen

2. $$\begin{cases}\Delta_1=\sqrt{\left(\frac{n+\Delta}{m+\Delta}.mm_1\right)}, & \Delta_2=\sqrt{\left(\frac{n_1+\Delta_1}{m_1+\Delta_1}.m_1m_2\right)},\\ & \Delta_3=\sqrt{\left(\frac{n_2+\Delta_2}{m_2+\Delta_2}.m_2m_3\right)},\ \ldots.\\ \Delta'_1=\sqrt{\left(\frac{n+\Delta'}{m+\Delta'}.mm_1\right)}, & \Delta'_2=\sqrt{\left(\frac{n_1+\Delta'_1}{m_1+\Delta'_1}.m_1m_2\right)},\\ & \Delta'_3=\sqrt{\left(\frac{n_2+\Delta'_2}{m_2+\Delta'_2}.m_2m_3\right)},\ \ldots.\end{cases}$$

her. Da $\mathrm{tn}\,u_1=\frac{\Delta_1}{m}.\mathrm{tn}\,u$ und eben so auch $\mathrm{tn}\,a_1=\frac{\Delta'_1}{m}.\mathrm{tn}\,a$ ist, so ist $\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1}=\frac{\Delta'_1}{\Delta_1}.\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}$, also

3. $$\begin{cases}\mathfrak{Tang}\,\mu_2=\frac{\Delta'_1}{\Delta_1}.\mathfrak{Tang}\,\mu_1, & \text{eben so ist}\\ \mathfrak{Tang}\,\mu_3=\frac{\Delta'_2}{\Delta_2}.\mathfrak{Tang}\,\mu_2,\\ \mathfrak{Tang}\,\mu_4=\frac{\Delta'_3}{\Delta_3}.\mathfrak{Tang}\,\mu_3,\\ \mathfrak{Tang}\,\mu_5=\frac{\Delta'_4}{\Delta_4}.\mathfrak{Tang}\,\mu_4\\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

Die erste dieser Gröfsen ist $\mathfrak{Tang}\,\mu_1=\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}=\frac{\mathrm{tang}\,\alpha}{\mathrm{tang}\,\varphi}$, und hieraus findet sich $\mathfrak{Tang}\,\mu=\frac{\Delta}{\Delta'}.\mathfrak{Tang}\,\mu_1$.

Die Berechnung der Gröfsen μ, μ_1, μ_2, μ_3 etc. geht also sehr einfach von Statten, wenn man, falls a und u beide reell oder beide imagi-

när sind, eine Tabelle der Logarithmen der hyperbolischen Functionen zu Hülfe nimmt. Da überhaupt $\mathfrak{Tang}\,\mu_{r+1} = \frac{\Delta'_r}{\Delta_r}.\mathfrak{Tang}\,\mu_r$ ist und bei einiger Gröfse von r (etwa $r=4$, bei einer Rechnung mit zehn Decimalziffern,) schon Δ_r hinlänglich genau $=\eta$, also auch $\Delta'_r=\eta$ wird, so ist dann $\mathfrak{Tang}\,\mu_{r+1}=\mathfrak{Tang}\,\mu_r$, oder $\mu_{r+1}=\mu_r$. Die Gröfsen μ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. nähern sich also sehr rasch dem Verhältnisse der Gleichheit, und eine Folge davon ist, dafs die Reihe (1.) sehr rasch convergirt. Bei einer Rechnung mit zehn Decimalziffern ist schon das Glied $16(\mu_5-\mu_4)=0$.

Da $\mathfrak{Tang}\,\mu_{r+1}=\frac{\mathrm{tn}\,a_r}{\mathrm{tn}\,u_r}=\frac{\mathrm{tang}\,(a_r)}{\mathrm{tang}\,(u_r)}$ ist, wenn r grofs genug genommen wird und $a_r=\eta a$, wie auch $u_r=\eta u$ wird, so nähert sich $\mathfrak{Tang}\,\mu_r$ bei der Vergröfserung des Index r sehr rasch der Grenze $\frac{\mathrm{tang}\,(\eta a)}{\mathrm{tang}\,(\eta u)}$.

Wenn $\mathrm{am}\,a > \mathrm{am}\,u$ ist und die Gröfsen a und u beide reell oder beide imaginär sind, so hat man in den vorigen Formeln nur a mit u, φ mit α, also Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc. mit Δ', Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 etc. zu vertauschen.

Das Verhältnifs $\frac{E}{K}$ wird nach der Formel $\frac{E}{K}=1-t$ im §. 84. berechnet und die Gröfsen a und u hat man nun nach den im §. 58. und seinem Zusatze entwickelten Formeln zu berechnen, weil dieselben Hülfsgröfsen dabei angewandt werden, welche zur Berechnung der Glieder der Reihe $\mathfrak{U}$ dienen.

Anmerkung. Setzt man den Gleichungen (3.) noch die zur Berechnung von μ_1 dienende an die Spitze, so sind sie

$$\mathfrak{Tang}\,\mu_1=\frac{\Delta'}{\Delta}.\mathfrak{Tang}\,\mu,\quad \mathfrak{Tang}\,\mu_2=\frac{\Delta'_1}{\Delta_1}.\mathfrak{Tang}\,\mu_1,\quad \mathfrak{Tang}\,\mu_3=\frac{\Delta'_2}{\Delta_2}.\mathfrak{Tang}\,\mu_2$$

u. s. w. und hiernach werden nun alle Gröfsen $\mathfrak{Tang}\,\mu_1$, $\mathfrak{Tang}\,\mu_2$, $\mathfrak{Tang}\,\mu_3$ etc. aus der ersten $\mathfrak{Tang}\,\mu=\frac{\mathrm{tang}\,\alpha\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}{\mathrm{tang}\,\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\alpha)}}$ nach einem sich ganz gleichbleibenden Gesetze berechnet.

Da $\mathfrak{Tang}\,\mu=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u}.\frac{\mathrm{cnc}\,a}{\mathrm{cn}\,a}$ ist, so wird man die Gröfsen φ' und α' nach den Formeln $\mathrm{tang}\,\varphi'=\frac{1}{k'\,\mathrm{tang}\,\varphi}$ und $\mathrm{tang}\,\alpha'=\frac{1}{k'\,\mathrm{tang}\,\alpha}$ berechnen und dann ist, wenn a und u beide reell sind,

$$\mathfrak{Tang}\,\mu=\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}.\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}.$$

Zugleich ist dann

$$\Delta=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'}\quad\text{und}\quad\Delta'=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}.$$

§. 140.

Erste Art der Berechnung der Integrale $\mathfrak{S}(u, a)$, $\mathfrak{C}(u, a)$ und $\mathfrak{D}(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Da das Integral $\mathfrak{S}(u, a) = u \,.\, \mathrm{el}\, a - \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2}$ ist, so besteht seine Berechnung aus drei getrennten Acten. Setzen wir

$$\mathrm{el}\, a = \frac{E}{K} \,.\, a + \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K} \,.\, au + \mathfrak{U},$$

so ist $u \,.\, \mathrm{el}\, a = \frac{E}{K} \,.\, au + \mathfrak{A} \,.\, u$ und es hebt sich also, wenn dieser Werth substituirt wird, noch ein Glied auf, da

$$1. \qquad \mathfrak{S}(u, a) = \mathfrak{A} \,.\, u - \mathfrak{U}.$$

Wenden wir nun dieselbe Bezeichnung an, wie im §. 139. und setzen $\mathrm{am}\, u = \Phi$, $\mathrm{am}\, a = \alpha$, $\mathrm{tang}\, \Phi' = \frac{1}{k' \,\mathrm{tang}\, \varphi}$ und $\mathrm{tang}\, \alpha' = \frac{1}{k' \,\mathrm{tang}\, \alpha}$, also

$$\Delta = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi'}, \quad \Delta' = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha'}, \quad \mathfrak{Tang}\, \mu = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha},$$

so ist, dem §. 86. gemäfs,

$$2. \quad \mathfrak{A} = \Delta'_1 \sqrt{\frac{(m - \Delta')(\Delta' - n)}{m\, m_1}} + 2 \,.\, \Delta'_2 \sqrt{\frac{(m_1 - \Delta'_1)(\Delta'_1 - n_1)}{m_1\, m_2}}$$
$$+ 4 \,.\, \Delta'_3 \sqrt{\frac{(m_2 - \Delta'_2)(\Delta'_2 - n_2)}{m_2\, m_3}} + 8 \,.\, \Delta'_4 \sqrt{\frac{(m_3 - \Delta'_3)(\Delta'_3 - n_3)}{m_3\, m_4}} + \text{etc.}$$

Der Factor u giebt eine von den Formeln

$$3. \quad \begin{cases} \sin(\eta u) = \sin \Phi \,.\, \left(\frac{2\, m_1}{m + \Delta} \cdot \frac{2\, m_2}{m_1 + \Delta_1} \cdot \frac{2\, m_3}{m_2 + \Delta_2} \cdot \frac{2\, m_4}{m_3 + \Delta_3} \cdot \ldots\right), \\ \cos(\eta u) = \cos \Phi \,.\, \left(\frac{2\, \Delta_1}{n + \Delta} \cdot \frac{2\, \Delta_2}{n_1 + \Delta_1} \cdot \frac{2\, \Delta_3}{n_2 + \Delta_2} \cdot \frac{2\, \Delta_4}{n_3 + \Delta_3} \cdot \ldots\right), \\ \mathrm{tang}(\eta u) = \mathrm{tang} \Phi \,.\, \left(\frac{\Delta_1}{m} \cdot \frac{\Delta_2}{m_1} \cdot \frac{\Delta_3}{m_2} \cdot \frac{\Delta_4}{m_3} \cdot \ldots\right), \end{cases}$$

Die Berechnung des Parameters a aus $\mathrm{am}\, a = \alpha$ ist der Formel (1.) gemäfs nicht mehr nöthig. Will man ihn jedoch berechnen, so geschieht es auch nach den Formeln (3.) und man hat zu dem Ende nur a für u, α für Φ und Δ', Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 etc. für Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 etc. in jenen Formeln zu setzen.

Das Glied $\mathfrak{U}$ giebt, wie im §. 139., die Reihe

$$4. \quad \mathfrak{U} = (\mu_1 - \mu) + 2\,(\mu_2 - \mu_1) + 4\,(\mu_3 - \mu_2) + 8\,(\mu_4 - \mu_3) + \text{etc.}$$

Die Modular-Zahlen oder Modular-Brüche sind dieselben, wie im §. 56.; auch η hat hier dieselbe Bedeutung, wie am angeführten Orte. Die Gröfsen Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc., ferner Δ', Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 etc. und μ_1, μ_2,

μ_3, μ_4 etc. werden nach den im §. 139. und in der beigefügten Anmerkung angegebenen Formeln berechnet.

Wenn $\alpha > \Phi$ ist, so wird man alle von α abhängigen Gröfsen mit den von Φ abhängigen, jedoch nur in der Reihe (4.), oder eigentlich in den Formeln (3.) des §. 139. vertauschen, da $\mathfrak{U}$ eben so von α als von Φ abhängt.

Da nach §. 116. $\mathfrak{E}(u, a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} u \,.\, u - \mathfrak{S}(u, a)$ und $\mathfrak{D}(u, a) = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \,.\, u - \mathfrak{S}(u, a)$ ist, so erhalten wir

$$5. \quad \mathfrak{E}(u, a) = (k^2 \sin\alpha \sin\alpha' - \mathfrak{A}) u + \mathfrak{U},$$

$$6. \quad \mathfrak{D}(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \mathfrak{A}\right) . u + \mathfrak{U}.$$

Setzt man $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, so wird $\mathfrak{U} = 0$, $u = K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\eta}$, also ist

$$\mathfrak{S}(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi \,.\, \frac{\mathfrak{A}}{\eta},$$

$$C(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi (k^2 \sin\alpha \sin\alpha' - \mathfrak{A}) \,.\, \frac{1}{\eta},$$

$$\mathfrak{D}(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \mathfrak{A}\right) \,.\, \frac{1}{\eta}.$$

§. 141.

Erste Art der Berechnung der Integrale $S(u, a)$, $C(u, a)$, $D(u, a)$ unter der Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Um die Ausdrücke für die Integrale der ersten Classe zu erhalten, brauchen wir in den Formeln des §. 140., welche a enthalten, nur ai für a zu setzen, wobei die Gröfsen Δ', Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 etc. reell bleiben. Setzen wir nun wieder $\operatorname{am} u = \Phi$ und $\operatorname{am}' a = \alpha$, so wird, wie vorhin, wenn $\operatorname{tang} \Phi' = \frac{1}{k' \operatorname{tang} \varphi}$ und $\operatorname{tang} \alpha' = \frac{1}{k \operatorname{tang} \alpha}$ gesetzt wird,

$$\Delta = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'}, \quad \text{aber} \quad \Delta' = \frac{1}{\sin\alpha'}.$$

Die Formeln (2.) im §. 139. und auch die Modular-Zahlen bleiben dieselben. Die Gröfsen μ aber werden sämmtlich imaginär. Setzt man aber $i\mu$ für μ, $i\mu_1$ für μ_1, $i\mu_2$ für μ_2 u. s. w., so wird μ durch die Formel

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{k' \cos\varphi}{\cos\varphi'} \,.\, \sin\alpha \sin\alpha'$$

bestimmt.

Ferner ist nun

$$\text{tang}\,\mu_1 = \frac{\Delta'}{\Delta}.\,\text{tang}\,\mu,$$

$$\text{tang}\,\mu_2 = \frac{\Delta'_1}{\Delta_1}.\,\text{tang}\,\mu_1,$$

$$\text{tang}\,\mu_3 = \frac{\Delta'_2}{\Delta_2}.\,\text{tang}\,\mu_2,$$

$$\text{tang}\,\mu_4 = \frac{\Delta'_3}{\Delta_3}.\,\text{tang}\,\mu_3$$

u. s. w.

Die Formel (1.) des §. 140. wird, wenn man Ai für $\mathfrak{A}$ und Ui für $\mathfrak{U}$ setzt,

$$S(u, a) = A.u - U, \text{ also}$$

$$C(u, a) = \left(\frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha} - A\right)u + U,$$

$$D(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - A\right)u + U,$$

und für die in diesen drei Formeln vorkommenden Gröfsen A und U hat man die Reihen

$$A = \Delta'_1\sqrt{\frac{(\Delta'-m)(\Delta'-n)}{m\,m_1}} + 2\Delta'_2\sqrt{\frac{(\Delta'_1-m_1)(\Delta'_1-n_1)}{m_1\,m_2}}$$

$$+ 4\Delta'_3\sqrt{\frac{(\Delta'_2-m_2)(\Delta'_2-n_2)}{m_2\,m_3}} + 8\Delta'_4\sqrt{\frac{(\Delta'_3-m_3)(\Delta'_3-n_3)}{m_3\,m_4}} + \text{etc. und}$$

$$U = (\mu_1-\mu) + 2(\mu_2-\mu_1) + 4(\mu_3-\mu_2) + 8(\mu_4-\mu_3) + \text{etc.}$$

Setzt man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, also $u = K$, so wird $U = 0$ und es ist also

$$S(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi.\frac{A}{\eta},$$

$$C(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha} - A\right).\frac{1}{\eta},$$

$$D(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - A\right).\frac{1}{\eta}.$$

Die Berechnung des Factors u aus $\varphi = \text{am}\,u$ ist dieselbe wie im §. 140.

§. 142.

Erste Art der Berechnung der Integrale $'\mathfrak{S}(u, a)$, $'\mathfrak{C}(u, a)$, $'\mathfrak{D}(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Vertauscht man in der Formel (1.) des §. 140. den Modul k mit dem Modul k', wodurch sich diese Gleichung verwandeln mag in $\mathfrak{S}'(u, a) = \mathfrak{A}'.u - \mathfrak{U}'$, so hat man hierin noch ai statt a und ui statt u zu setzen.

Die Modular-Zahlen sind nun aus

$$1. \quad m=1 \quad \text{und} \quad n=k$$

zu berechnen nach den Formeln

$$m_1=\frac{m+n}{2}, \qquad m_2=\frac{m_1+n_1}{2}, \qquad m_3=\frac{m_2+n_2}{2} \quad \text{etc.}$$

$$n_1=\sqrt{(mn)}, \qquad n_2=\sqrt{(m_1 n_1)}, \qquad n_3=\sqrt{(m_2 n_2)} \quad \text{etc.}$$

Setzt man ai statt a und ui statt u, wodurch sich $'\mathfrak{S}'(u,a)$ in $'\mathfrak{S}(u,a)$ und $\mathfrak{A}'$ in $i'\mathfrak{A}$, ferner $\mathfrak{U}'$ in $-'\mathfrak{U}$ ändert, so haben wir zunächst

$$2. \quad '\mathfrak{S}(u,a)=-'\mathfrak{A}.u+'\mathfrak{U}.$$

Ferner verwandelt sich

$$\Delta \text{ in } \Delta=\sqrt{(1+k'^2\,\mathrm{tn}^2 u)} \quad \text{und} \quad \Delta' \text{ in } \Delta'=\sqrt{(1+k'^2\,\mathrm{tn}^2 a)}.$$

Setzt man also $\mathrm{am}\,u=\varphi$ und $\mathrm{am}\,a=\alpha$, ferner $\mathrm{tang}\,\varphi'=\frac{1}{k'\,\mathrm{tang}\,\varphi}$ und $\mathrm{tang}\,\alpha'=\frac{1}{k'\,\mathrm{tang}\,\alpha}$, so ist

$$\Delta=\frac{1}{\sin\varphi'} \quad \text{und} \quad \Delta'=\frac{1}{\sin\alpha'}.$$

Die frühere Gröfse μ wird berechnet nach der Formel

$$\mathfrak{Tang}\,\mu=\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{sn}\,u}.\frac{\Delta}{\Delta'} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tang}\,\mu=\frac{\sin a\,\sin\alpha'}{\sin\varphi\,\sin\varphi'}.$$

Berechnet man hieraus die Gröfsen Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 etc., ferner Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 etc. und auch noch μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. nach den im §. 139. angegebenen Formeln, so erhält man

$$'\mathfrak{A}=\Delta'_1.\sqrt{\frac{(\Delta'-m)(\Delta'-n)}{m\,m_1}}+2.\Delta'_2.\sqrt{\frac{(\Delta'_1-m_1)(\Delta'_1-n_1)}{m_1\,m_2}}$$
$$+4.\Delta'_3.\sqrt{\frac{(\Delta'_2-m_2)(\Delta'_2-n_2)}{m_2\,m_3}}+8.\Delta'_4.\sqrt{\frac{(\Delta'_3-m_3)(\Delta'_3-n_3)}{m_3\,m_4}}+\text{etc. und}$$

$$'\mathfrak{U}=(\mu-\mu_1)+2(\mu_1-\mu_2)+4(\mu_2-\mu_3)+8(\mu_3-\mu_4)+\text{etc.}$$

Wenn $\varphi<\alpha$ ist, so wird man in den Formeln für $\mathfrak{Tang}\,\mu$, $\mathfrak{Tang}\,\mu_1$, $\mathfrak{Tang}\,\mu_2$ etc. α mit φ, Δ' mit Δ, Δ'_1 mit Δ_1, Δ'_2 mit Δ_2 etc. vertauschen, oder $\mu+\frac{1}{2}\pi i$ statt μ, $\mu_1+\frac{1}{2}\pi i$ statt μ_1, $\mu_2+\frac{1}{2}\pi i$ statt μ_2 u. s. w. setzen, da dieses mit jenem auf Eines herauskommt. Der Factor u wird aus $\mathrm{am}\,u=\varphi$ nach den im Zusatze zu §. 58. angegebenen Formeln am bequemsten berechnet, wenn man auch in ihnen k mit k' vertauscht.

Für das Cosinus- und Differente-Integral erhält man die Ausdrücke

$$'\mathfrak{C}(u,a)=\left(\frac{k'\cos\alpha'}{\cos\alpha}-'\mathfrak{A}\right).u+'\mathfrak{U}, \qquad '\mathfrak{D}(u,a)=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}-'\mathfrak{A}\right).u+'\mathfrak{U}.$$

Zusatz. Der Grad der Convergenz aller im §. 139 — §. 142. entwickelten Reihen hängt gar nicht von der Gröfse der Amplituden φ und α, sondern lediglich von der Gröfse des Moduls ab. Die im §. 140. entwickelten Reihen convergiren desto rascher, je kleiner der Modul k ist, und die so eben entwickelten Formeln convergiren desto rascher, je gröfser der Modul k ist. Ist daher in jenen Formeln der Modul k wenig von Eins, oder in diesen wenig von Null verschieden, so wird man die Integrale der zweiten Classe auf die der vierten, oder diese auf jene zurückführen.

Setzt man in der Gleichung $\mathrm{el}\,a = \frac{E}{K}a + \mathfrak{A}$, ai statt a, indem man zugleich den Modul k mit k' vertauscht, so erhält man

$$\mathfrak{El}'a = \frac{E'}{K'}\,.\,a + {}'\mathfrak{A}.$$

Also ist

$$\mathrm{el}\,a + \mathfrak{El}'a = \left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'}\right)a + \mathfrak{A} + {}'\mathfrak{A} \text{ oder } \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,a} = \left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right)a + \mathfrak{A} + {}'\mathfrak{A}.$$

Da aber $\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'}$ ist, so ist

$$\mathfrak{A} + {}'\mathfrak{A} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \frac{\pi a}{2KK'},$$

wenn $\mathrm{am}\,a = \alpha$ und $\mathrm{amc}\,a = \alpha$ gesetzt wird.

Vertauscht man auch in der Gleichung

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}au + \mathfrak{U}$$

den Modul k mit k', indem man ai statt a und ui statt u setzt, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\mathfrak{Lm}'(a+u) - \mathfrak{Lm}'(a-u)}{2} = \frac{E'}{K'}au + {}'\mathfrak{U};$$

daher ist

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} + \frac{\mathfrak{Lm}'(a+u) - \mathfrak{Lm}(a-u)}{2} = \left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'}\right)au + \mathfrak{U} + {}'\mathfrak{U}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite reducirt sich nach §. 72. Formel (5.) auf $au + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,a}\,.\,\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u}\right)$; daher ist, wenn $\mathrm{am}\,u = \varphi$ und $\mathrm{amc}\,u = \varphi'$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{U} + {}'\mathfrak{U} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\alpha\,\sin\varphi}{\sin\alpha'\,\sin\varphi'}\right) - \frac{\pi au}{2KK'}.$$

Hiernach erhalten wir für die Integrale der ersten Classe auch die Ausdrücke:

$$\mathfrak{S}(u,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - {}'\mathfrak{A}\right).u + {}'\mathfrak{U} - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right),$$

$$\mathfrak{C}(u,a) = \left({}'\mathfrak{A} - \frac{k'\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right).u - {}'\mathfrak{U} + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right),$$

$$\mathfrak{D}(u,a) = {}'\mathfrak{A}.u - {}'\mathfrak{U} + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right);$$

und auch in diesen Formeln ist, wie in den vorigen, u nach den im Zusatze zu §. 58. angegebenen Ausdrücken zu berechnen aus $\mathrm{am}\,u = \Phi$, indem man in den genannten Ausdrücken k mit k' vertauscht, damit die Modularzahlen mit den vorigen dieselben seien. Die Formeln am Schlusse des §. 140. verwandeln sich jetzt in

$$\mathfrak{S}(K,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - {}'\mathfrak{A}\right)K - \frac{\pi a}{2K'},$$

$$\mathfrak{C}(K,a) = \left({}'\mathfrak{A} - \frac{k'\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right)K + \frac{\pi a}{2K'},$$

$$\mathfrak{D}(K,a) = {}'\mathfrak{A}.K + \frac{\pi a}{2K'}.$$

Das Argument a ist ebenfalls nach den im Zusatze zu §. 58. angegebenen Formeln zu berechnen.

Umgekehrt erhält man

$${}'\mathfrak{S}(u,a) = \left(\mathfrak{A} - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\right).u - \mathfrak{U} + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\alpha\,\sin\varphi}{\sin\alpha'\sin\varphi'}\right),$$

$${}'\mathfrak{C}(u,a) = (\mathfrak{A} - k^2\sin\alpha\sin\alpha').u - \mathfrak{U} + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\alpha\,\sin\varphi}{\sin\alpha'\sin\varphi'}\right),$$

$${}'\mathfrak{D}(u,a) = \mathfrak{A}.u - \mathfrak{U} + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\alpha\,\sin\varphi}{\sin\alpha'\sin\varphi'}\right).$$

§. 143.

Erste Art der Berechnung der Integrale ${}'S(u,a)$, ${}'C(u,a)$, ${}'D(u,a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Nehmen wir wieder dieselben Modular-Zahlen wie im §. 142., und setzen ai statt a, wodurch sich ${}'\mathfrak{A}$ in $i.{}'A$ und ${}'\mathfrak{U}$ in $i.{}'U$ verwandeln mag, so haben wir

$${}'S(u,a) = -{}'A.u + {}'U.$$

Es verwandelt sich nun Δ' in $\Delta' = \sqrt{(1 - k'^2\,\mathrm{sn}'^2 a)}$. Setzen wir also wieder $\mathrm{am}\,u = \Phi$, $\mathrm{am}'a = \alpha$, und berechnen $\mathrm{tang}\,\Phi' = \frac{1}{k'\,\mathrm{tang}\,\varphi}$, ferner $\mathrm{tang}\,\alpha' = \frac{1}{k\,\mathrm{tang}\,\alpha}$, so ist

$$\Delta = \frac{1}{\sin\varphi'} \quad \text{und} \quad \Delta' = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}.$$

Hieraus berechne man Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 etc. und Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 etc., wie im §. 139. mit den kurz vorher angegebenen Modular-Zahlen. Ferner sei $\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi-\mu)=\frac{\operatorname{tn}' a.\Delta}{\operatorname{sn} u.\Delta'}$ und also

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{k\cos\alpha}{\cos\alpha'}.\sin\varphi\sin\varphi',$$

woraus man berechnet

$$\operatorname{tang}\mu_1 = \frac{\Delta}{\Delta'}.\operatorname{tang}\mu,$$

$$\operatorname{tang}\mu_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta'_1}.\operatorname{tang}\mu_1,$$

$$\operatorname{tang}\mu_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta'_2}.\operatorname{tang}\mu_2,$$

$$\operatorname{tang}\mu_4 = \frac{\Delta_3}{\Delta'_3}.\operatorname{tang}\mu_3,$$

u. s. w.

so ist

$$'A = \Delta'_1.\sqrt{\frac{(m-\Delta')(\Delta'-n)}{m\,m_1}} + 2.\Delta'_2.\sqrt{\frac{(m_1-\Delta'_1)(\Delta'_1-n_1)}{m_1\,m_2}}$$
$$+ 4.\Delta'_3.\sqrt{\frac{(m_2-\Delta'_2)(\Delta'_2-n_2)}{m_2\,m_3}} + 8.\Delta'_4.\sqrt{\frac{(m_3-\Delta'_3)(\Delta'_3-m_3)}{m_3\,m_4}} + \text{etc.}$$

und

$$'U = (\mu_1-\mu) + 2(\mu_2-\mu_1) + 4(\mu_3-\mu_2) + 8(\mu_4-\mu_3) + \text{etc.}$$

Der Factor u aber ist nun wie im §. 142. nach einer von den Formeln

$$\mathfrak{Tang}(\eta' u) = \sin\varphi\left(\frac{\Delta_1}{m}.\frac{\Delta_2}{m_1}.\frac{\Delta_3}{m_2}.\frac{\Delta_4}{m_3}....\right),$$

$$\mathfrak{Sin}(\eta' u) = \operatorname{tang}\varphi\left(\frac{2m_1}{m+\Delta}.\frac{2m_2}{m_1+\Delta_1}.\frac{2m_3}{m_2+\Delta_2}.\frac{2m_4}{m_3+\Delta_3}....\right),$$

$$\mathfrak{Cos}(\eta' u) = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{2\Delta_1}{n+\Delta}.\frac{2\Delta_2}{n_1+\Delta_1}.\frac{2\Delta_3}{n_2+\Delta_2}.\frac{2\Delta_4}{n_3+n_3}....\right)$$

zu berechnen, in welchen wieder $\eta'=m_r=n_r$ gesetzt wird, so dafs nun $\eta'=\frac{\pi}{2K'}$ ist, da die Modular-Zahlen jetzt aus $m=1$ und $n=k$ berechnet worden sind.

Für die beiden übrigen Integrale der dritten Classe findet man die Formeln

$$'C(u,a) = (k'^2\sin\alpha\sin\alpha' - 'A).u + 'U,$$

$$'D(u,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right).u + 'U.$$

Ferner ist $\operatorname{el}' a=\frac{E'}{K'}.u+'A$, und da $'S(K,a)=(K-E)a-K.\operatorname{el}' a+\frac{1}{2}\pi$ ist, so findet man $'S(K,a)=-K\left(\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1\right).a-K.'A+\frac{1}{2}\pi$, oder auch

$$'S(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a - K.'A, \text{ also}$$
$$'C(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a + (k'^2 \sin\alpha \sin\alpha' - 'A)K,$$
$$'D(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a + \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right)K.$$

Zusatz 1. Man findet auch nun die Gleichungen

$$A + 'A = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \frac{\pi a}{2KK'},$$
$$U + 'U = \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha \sin\varphi}{\sin\alpha' \sin\varphi'}\right) - \frac{\pi a u}{2KK'},$$

und werden sie benutzt, so verwandeln sich die Formeln des §. 141. in

$$S(u,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right)u - 'U - \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha \sin\varphi}{\sin\alpha' \sin\varphi'}\right),$$
$$C(u,a) = ('A - k'^2 \sin\alpha \sin\alpha')u - 'U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha \sin\varphi}{\sin\alpha' \sin\varphi'}\right),$$
$$D(u,a) = 'A.u - 'U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha \sin\varphi}{\sin\alpha' \sin\varphi'}\right).$$

Den Factor u in diesen Formeln berechnet man am bequemsten nach den kurz vorher angegebenen Formeln vermittelst der gewöhnlichen hyperbolischen Functionen. Die Formeln am Schlusse des §. 141. verwandeln sich in

$$S(K,a) = K\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right) - \eta' a,$$
$$C(K,a) = K('A - k'^2 \sin\alpha \sin\alpha') + \eta' a,$$
$$D(K,a) = K.'A + \eta' a.$$

Die vorstehenden Formeln wird man benutzen können, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden ist. Die Gröfse $\eta' a$ ist aus $\text{am}' a = \alpha$ nach einer von den Formeln

$$\sin\eta' a = \sin\alpha . \left(\frac{2m_1}{m + \Delta'} \cdot \frac{2m_2}{m_1 + \Delta'_1} \cdot \frac{2m_3}{m_2 + \Delta'_2} \cdot \frac{2m_4}{m_3 + \Delta'_3} \cdots\right),$$
$$\cos\eta' a = \cos\alpha . \left(\frac{2\Delta'_1}{n + \Delta'} \cdot \frac{2\Delta'_2}{n_1 + \Delta'_1} \cdot \frac{2\Delta'_3}{n_2 + \Delta'_2} \cdot \frac{2\Delta'_4}{n_3 + \Delta'_3} \cdots\right),$$
$$\text{tang}\,\eta' a = \text{tang}\,\alpha . \left(\frac{\Delta'_1}{m} \cdot \frac{\Delta'_2}{m_1} \cdot \frac{\Delta'_3}{m_2} \cdot \frac{\Delta'_4}{m_3} \cdots\right)$$

zu berechnen, in welchen die Modular-Zahlen aus $m = 1$ und $n = k$ hergeleitet sind und also $\eta' = \frac{\pi}{2K'} = m_r = n_r$ ist, wenn r grofs genug genommen wird; wie in §. 143. Der Factor K mufs nach §. 57. berechnet werden.

Zusatz 2. Umgekehrt können die Formeln des §. 143. auch noch also dargestellt werden:

$$'S(u,a) = \left(A - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\right)u - U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha\,\sin\varphi}{\sin\alpha'\,\sin\varphi'}\right),$$

$$'C(u,a) = \left(A - \frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right)u - U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha\,\sin\varphi}{\sin\alpha'\,\sin\varphi'}\right),$$

$$'D(u,a) = A.u - U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha\,\sin\varphi}{\sin\alpha'\,\sin\varphi'}\right).$$

Der Factor u in diesen Ausdrücken ist nach den im §. 140. angegebenen Formeln zu berechnen. Wird der Werth $-'A = A - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} + \frac{\pi a}{2KK'}$ auch in den Formeln am Schlusse des §. 143. substituirt, so erhält man

$$'S(K,a) = K\left(A - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\right) + \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$'C(K,a) = K\left(A - \frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$'D(K,a) = K.A + \tfrac{1}{2}\pi;$$

und da

$$S(K,a) = K.A; \quad C(K,a) = K\left(\frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha} - A\right); \quad D(K,a) = K\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - A\right)$$

ist, so ist

$$'D(K,a) - S(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$'C(K,a) + C(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$'S(K,a) + D(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi;$$

was auch unmittelbar aus den Formeln (6.), (7.), (8.) §. 133. hervorgeht, wenn man in ihnen $u = K$, also $\text{snc}\,u = 0$ setzt.

§. 144.

Zweite Art der Berechnung von $\frac{\text{lm}(a+u) - \text{lm}(a-u)}{2}$.

Leiten wir aus a und u, wie in §. 59., die immer gröfser werdenden Argumente a_1, a_2, a_3, a_4 etc. und u_1, u_2, u_3, u_4 etc. mit den immer kleiner werdenden Moduln k_1, k_2, k_3, k_4 etc. her, so ist

$$a = \frac{a_1}{2m_1} = \frac{a_2}{4m_2} = \frac{a_3}{8m_3} = \frac{a_4}{16m_4} \ldots,$$

$$u = \frac{u_1}{2m_1} = \frac{u_2}{4m_2} = \frac{u_3}{8m_3} = \frac{u_4}{16m_4} \ldots,$$

wenn dieselben Modular-Zahlen angewandt werden, wie im §. 55., und also

$$a+u = \frac{a_1+u_1}{2m_1} = \frac{a_2+u_2}{4m_2} = \frac{a_3+u_3}{8m_3} = \frac{a_4+u_4}{16m_4} = \text{etc.},$$

$$a-u = \frac{a_1-u_1}{2m_1} = \frac{a_2-u_2}{4m_2} = \frac{a_3-u_3}{8m_3} = \frac{a_4-u_4}{16m_4} = \text{etc.}$$

Diesen Gleichungen gemäfs ist aber nach §. 89.

$$\text{lm}(a+u) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(a+u)^2}{2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{1}{\text{dn}(a+u)} + \tfrac{1}{4}\log\frac{1}{\text{dn}(a_1+u_1)} + \tfrac{1}{8}\log\frac{1}{\text{dn}(a_2+u_2)} + \text{etc.},$$

$$\text{lm}(a-u) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(a-u)^2}{2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{1}{\text{dn}(a-u)} + \tfrac{1}{4}\log\frac{1}{\text{dn}(a_1-u_1)} + \tfrac{1}{8}\log\frac{1}{\text{dn}(a_2-u_2)} + \text{etc.},$$

wenn die in diesen Ausdrücken vorkommenden Differenten sich der Reihe nach auf die immer kleiner werdenden Modul k, k_1, k_2, k_3 etc. beziehen.

Setzt man nun wieder, wie in §. 139.,

$$\frac{\text{lm}(a+u)-\text{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}\cdot au + \mathfrak{U},$$

so findet sich

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a-u)}{\text{dn}(a+u)}} + \tfrac{1}{4}\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a_1-u_1)}{\text{dn}(a_1+u_1)}} + \tfrac{1}{8}\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a_2-u_2)}{\text{dn}(a_2+u_2)}} + \tfrac{1}{16}\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a_3-u_3)}{\text{dn}(a_3+u_3)}} + \text{etc.}$$

Da $\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a-u)}{\text{dn}(a+u)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}(k^2\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u)$ ist, so kann die Reihe auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}(k^2\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u) + \tfrac{1}{4}\mathfrak{Arc\,Tang}(k_1^2\,\text{sn}\,a_1\,\text{snc}\,a_1\,\text{sn}\,u_1\,\text{snc}\,u_1) + \tfrac{1}{8}\mathfrak{Arc\,Tang}(k_2^2\,\text{sn}\,a_2\,\text{snc}\,a_2\,\text{sn}\,u_2\,\text{snc}\,u_2) + \tfrac{1}{16}\mathfrak{Arc\,Tang}(k_3^2\,\text{sn}\,a_3\,\text{snc}\,a_3\,\text{sn}\,u_3\,\text{snc}\,u_3) + \text{etc.}$$

Da aber, wie in §. 59., $\text{sn}\,u_1 = (1+k')\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u$ und eben so auch $\text{sn}\,a_1 = (1+k_1)\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a$ ist, so ist

$$k^2\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u = \frac{1-k'^2}{(1+k')^2}\,\text{sn}\,u_1\,\text{sn}\,a_1 = \frac{1-k'}{1+k'}\,\text{sn}\,a_1\,\text{sn}\,u_1 = k_1\,\text{sn}\,a_1\,\text{sn}\,u_1.$$

Setzt man also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Tang}\,\mu_1 &= k_1\,\text{sn}\,a_1\,\text{sn}\,u_1,\\
\mathfrak{Tang}\,\mu_2 &= k_2\,\text{sn}\,a_2\,\text{sn}\,u_2,\\
\mathfrak{Tang}\,\mu_3 &= k_3\,\text{sn}\,a_3\,\text{sn}\,u_3,\\
\mathfrak{Tang}\,\mu_4 &= k_4\,\text{sn}\,a_4\,\text{sn}\,u_4,\\
&\text{u. s. w.},
\end{aligned}$$

so haben wir die Reihe

$$1.\quad \mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 + \tfrac{1}{32}\mu_5 + \text{etc.}$$

Es handelt sich also nur noch um die Ermittelung eines einfachen Mechanismus in der Berechnung der Arcus μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. nach den vorhin angegebenen Formeln.

Berechnen wir aus $\nabla = \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u)}$ die Gröfsen ∇_1, ∇_2, ∇_3 etc. nach den Formeln

2. $$\nabla_1 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla + \frac{n_1^2}{\nabla}\right), \quad \nabla_2 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_1 + \frac{n_2^2}{\nabla_1}\right), \quad \nabla_3 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_2 + \frac{n_3^2}{\nabla_2}\right) \text{ etc.}$$

und eben so aus $\nabla' = \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a)}$ die Gröfsen ∇'_1, ∇'_2, ∇'_3, ∇'_4 etc. nach den Formeln

3. $$\nabla'_1 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla' + \frac{n_1^2}{\nabla'}\right), \quad \nabla'_2 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla'_1 + \frac{n_2^2}{\nabla'_1}\right), \quad \nabla'_3 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla'_2 + \frac{n_3^2}{\nabla'_2}\right) \text{ etc.;}$$

setzt man weiter

$$\delta_1 = \frac{m-n}{2} \cdot \operatorname{sn} u_1 \quad \text{und} \quad \delta'_1 = \frac{m-n}{2} \cdot \operatorname{sn} a_1,$$

$$\delta_2 = \frac{m_1-n_1}{2} \cdot \operatorname{sn} u_2 \quad - \quad \delta'_2 = \frac{m_1-n_1}{2} \cdot \operatorname{sn} a_2,$$

$$\delta_3 = \frac{m_2-n_2}{2} \cdot \operatorname{sn} u_3 \quad - \quad \delta'_3 = \frac{m_2-n_2}{2} \cdot \operatorname{sn} a_3$$

u. s. w. u. s. w.

so dafs, wie in §. 59.,

4.
$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{k^2}{2} \cdot \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u & \text{und} \quad \delta'_1 = \frac{k^2}{2} \cdot \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a, \\ \delta_2 = \frac{\nabla - \nabla_1}{2\nabla_1} \cdot \delta_1 = \frac{\nabla \cdot \delta_1}{2\nabla_1} - \frac{\delta_1}{2} & - \quad \delta'_2 = \frac{\nabla' \cdot \delta'_1}{2\nabla'_1} - \frac{\delta'_1}{2}, \\ \delta_3 = \frac{\nabla_1 - \nabla_2}{2\nabla_2} \cdot \delta_2 = \frac{\nabla_1 \cdot \delta_2}{2\nabla_2} - \frac{\delta_2}{2} & - \quad \delta'_3 = \frac{\nabla'_1 \cdot \delta'_2}{2\nabla'_2} - \frac{\delta'_2}{2}, \\ \delta_4 = \frac{\nabla_2 - \nabla_3}{2\nabla_3} \cdot \delta_3 = \frac{\nabla_2 \cdot \delta_3}{2\nabla_3} - \frac{\delta_3}{2} & - \quad \delta'_4 = \frac{\nabla'_2 \cdot \delta'_3}{2\nabla'_3} - \frac{\delta'_3}{2}, \\ \delta_5 = \frac{\nabla_3 - \nabla_4}{2\nabla_4} \cdot \delta_4 = \frac{\nabla_3 \cdot \delta_4}{2\nabla_4} - \frac{\delta_4}{2} & - \quad \delta'_5 = \frac{\nabla'_3 \cdot \delta'_4}{2\nabla'_4} - \frac{\delta'_4}{2} \end{cases}$$

u. s. w. u. s. w.

ist; ferner $\operatorname{am} u_1 = \Phi_1$, $\operatorname{am} u_2 = \Phi_2$, $\operatorname{am} u_3 = \Phi_3$, $\operatorname{am} u_4 = \Phi_4$, ...

und $\operatorname{am} a_1 = \alpha_1$, $\operatorname{am} a_2 = \alpha_2$, $\operatorname{am} a_3 = \alpha_3$, $\operatorname{am} a_4 = \alpha_4$, ...,

damit

5.
$$\begin{cases} \Phi_1 = 2\Phi - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) & \text{und} \quad \alpha_1 = 2\alpha - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right), \\ \Phi_2 = 2\Phi_1 - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) & - \quad \alpha_2 = 2\alpha_1 - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right), \\ \Phi_3 = 2\Phi_2 - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) & - \quad \alpha_3 = 2\alpha_2 - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right), \\ \Phi_4 = 2\Phi_3 - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) & - \quad \alpha_4 = 2\alpha_3 - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right) \end{cases}$$

u. s. w. u. s. w.

sei, in welchen Formeln überhaupt $\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_r}{\nabla_r}\right) = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_r}{m_r}\right)$ und eben so auch $\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_r}{\nabla'_r}\right) = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta'_r}{m_r}\right)$ ist: so können durch diese leicht zu berechnenden Hülfsgröfsen, welche zu mehr als einem Zwecke dienen, die Gröfsen μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. auf zwei verschiedene Arten ausgedrückt werden.

Da nämlich $\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = k_1 \operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} u_1 = \frac{1-k'}{1+k'} \operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} u_1 = \frac{m-n}{2m_1} \operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} u_1$ ist, so erhält man, wenn $\delta'_1 = \frac{m-n}{2} \operatorname{sn} a_1$ substituirt wird, $\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1} \sin \Phi_1$ und wenn $\delta_1 = \frac{m-n}{2} \operatorname{sn} u_1$ substituirt wird, $\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1} \sin a_1$. Hiernach haben wir also die Formeln

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1} \sin a_1 & \text{oder} \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1} \sin \Phi_1, \\ \mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\delta_2}{m_2} \sin a_2 & - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\delta'_2}{m_2} \sin \Phi_2, \\ \mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\delta_3}{m_3} \sin a_3 & - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\delta'_3}{m_3} \sin \Phi_3, \\ \mathfrak{Tang}\,\mu_4 = \frac{\delta_4}{m_4} \sin a_4 & - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_4 = \frac{\delta'_4}{m_4} \sin \Phi_4, \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Da die überaus rasch abnehmenden Gröfsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 etc. oder auch δ'_1, δ'_2, δ'_3, δ'_4 etc. nicht alle positiv sein werden, so werden auch die sich ebenfalls rasch verkleinernden Arcus μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. nicht alle positiv sein. Zugleich erhellet, dafs die Reihe $\mathfrak{U}$ einen hohen Grad der Convergenz hat; sie convergirt noch rascher, als die im §. 139. gefundene Reihe für $\mathfrak{U}$.

Die Gröfse u findet sich nach §. 59. mittelst der Reihe

$$7.\quad \begin{cases} \eta u = \operatorname{am} u - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) - \frac{1}{8} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right) - \text{etc. oder} \\ \eta u = \operatorname{am} u - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) - \frac{1}{8} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) - \text{etc.} \end{cases}$$

und den Parameter a erhält man mittelst der Reihe

$$8.\quad \begin{cases} \eta a = \operatorname{am} a - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta'_1}{m_1}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta'_2}{m_2}\right) - \frac{1}{8} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta'_3}{m_3}\right) - \text{etc. oder} \\ \eta a = \operatorname{am} a - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right) - \frac{1}{8} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) - \text{etc.} \end{cases}$$

Zusatz. Sind ηa und ηu berechnet, so erhält man für Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc. die Reihen

$$\Phi_1 = 2\eta u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) + \text{etc.},$$

$$\Phi_2 = 4\eta u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_5}{\nabla_5}\right) + \text{etc.},$$

$$\Phi_3 = 8\eta u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_5}{\nabla_5}\right) + \tfrac{1}{16}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_6}{\nabla_6}\right) + \text{etc.}$$

u. s. w.

und für die Amplituden α_1, α_2, α_3, α_4 etc. die Reihen

$$\alpha_1 = 2\eta a + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right) + \text{etc.},$$

$$\alpha_2 = 4\eta a + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_5}{\nabla'_5}\right) + \text{etc.},$$

$$\alpha_3 = 8\eta a + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_5}{\nabla'_5}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_6}{\nabla'_6}\right) + \text{etc.}$$

u. s. w.

§. 145.

Zweite Art der Berechnung der Integrale $\mathfrak{S}(u, a)$, $\mathfrak{C}(u, a)$, $\mathfrak{D}(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Setzen wir, wie in §. 140., wieder $\operatorname{el} a = \frac{E}{K}.a + \mathfrak{A}$ und $\frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}.au + \mathfrak{U}$, so erhalten wir

$$1. \quad \mathfrak{S}(u, a) = \mathfrak{A}.u - \mathfrak{U}.$$

Setzen wir ferner wieder $\operatorname{am} u = \Phi$ und $\operatorname{am} a = \alpha$, und berechnen hieraus $\operatorname{tang}\Phi' = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\varphi}$ und $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\alpha}$, so ist

$$2. \quad \mathfrak{C}(u, a) = (k^2 \sin\alpha \sin\alpha' - \mathfrak{A})u + \mathfrak{U},$$

$$3. \quad \mathfrak{D}(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \mathfrak{A}\right).u + \mathfrak{U}.$$

Weiter haben wir

$$\nabla = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'}, \quad \nabla' = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}, \quad \delta_1 = \frac{k^2}{2}\sin\Phi\sin\Phi', \quad \delta'_1 = \frac{k^2}{2}.\sin\alpha\sin\alpha'.$$

Berechnet man hieraus die übrigen Hülfsgröfsen, wie in §. 144., so ist nach §. 89.

$$\mathfrak{A} = \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 + \delta'_5 + \delta'_6 + \text{etc.};$$

und nach §. 144. ist

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 + \tfrac{1}{32}\mu_5 + \text{etc.},$$

in welcher Reihe also jedes Glied auf zwei verschiedene Arten berechnet werden kann. Den Factor u findet man nach einer von den beiden Reihen (7.) im §. 144., in welchen $\eta = m_r = n_r$ ist, wenn r grofs genug genommen wird.

Wird $\Phi = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, also $\sin\Phi' = 0$, so ist auch $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \text{etc.} = 0$; ferner $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = \text{etc.} = 0$, und $\mathfrak{U} = 0$, da auch $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \text{etc.} = 0$ ist.

Daher erhalten wir wieder

$$\mathfrak{S}(K, a) = \mathfrak{A}.K,$$
$$\mathfrak{C}(K, a) = (k^2 \sin\alpha \sin\alpha' - \mathfrak{A}).K,$$
$$\mathfrak{D}(K, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \mathfrak{A}\right).K.$$

Den Factor K giebt die Formel $K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\eta}$.

§. 146.

Zweite Art der Berechnung der Integrale $S(u, a)$, $C(u, a)$, $D(u, a)$ unter der Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Setzen wir in den Formeln des §. 145. ai für a, so erhalten wir schon die gesuchten Formeln; dadurch verwandelt sich am a in $i\,\mathfrak{Am}\,a = i.\mathfrak{L}\,\mathrm{am}'a$. Setzen wir also wieder $\mathrm{am}\,u = \Phi$ und $\mathrm{am}'a = \alpha$; ferner $\mathrm{tang}\,\Phi' = \frac{1}{k'\,\mathrm{tang}\,\varphi}$ und $\mathrm{tang}\,\alpha' = \frac{1}{k\,\mathrm{tang}\,a}$, so ist $\mathrm{amc}\,u = \Phi'$ und $\mathrm{amc}'a = \alpha'$.

Die Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3 etc., wie auch δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 etc., und Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 etc. bleiben ungeändert; die übrigen Hülfsgröfsen aber ändern ihre Bedeutungen oder Werthe, wenn sich gleich die Gröfsen δ'_1, δ'_2, δ'_3 etc. in $i\delta'_1$, $i\delta'_2$, $i\delta'_3$, $i\delta'_4$ etc. verändern, weil sie in der That imaginär werden; ferner α_1, α_2, α_3 etc. in $i\alpha_1$, $i\alpha_2$, $i\alpha_3$ etc. und μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. in $i\mu_1$, $i\mu_2$, $i\mu_3$, $i\mu_4$ etc. Da nun

$$\nabla = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'};\quad \nabla' = \frac{1}{\sin\alpha'};\quad \delta_1 = \frac{k^2}{2}\sin\Phi\sin\Phi';\quad \delta'_1 = \frac{k}{2}\cdot\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}$$

ist, so berechne man hieraus die Hülfsgröfsen ∇_1, ∇_2, ∇_3 etc., ∇'_1, ∇'_2, ∇'_3 etc.; ferner δ_2, δ_3, δ_4 etc. und δ'_2, δ'_3, δ'_4, δ'_5 etc. und auch Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 etc. nach den in §. 144. angegebenen Formeln; die Gröfsen α_1, α_2, α_3 etc. aber nach den Formeln

$$\alpha_1 = 2\,\mathfrak{L}\alpha - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right),$$

$$\alpha_2 = 2\,\alpha_1 - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right),$$

$$\alpha_3 = 2\,\alpha_2 - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right),$$

u. s. w.;

ferner μ_1, μ_2, μ_3 etc. nach den Formeln

$$\text{tang}\,\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 \quad \text{oder} \quad \text{tang}\,\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1}\sin\Phi_1,$$

$$\text{tang}\,\mu_2 = \frac{\delta_2}{m_2}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_2 \quad - \quad \text{tang}\,\mu_2 = \frac{\delta'_2}{m_2}\sin\Phi_2,$$

$$\text{tang}\,\mu_3 = \frac{\delta_3}{m_3}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_3 \quad - \quad \text{tang}\,\mu_3 = \frac{\delta'_3}{m_3}\sin\Phi_3,$$

$$\text{tang}\,\mu_4 = \frac{\delta_4}{m_4}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_4 \quad - \quad \text{tang}\,\mu_4 = \frac{\delta'_4}{m_4}\sin\Phi_4,$$

u. s. w. **u. s. w.**

Da sich nun $\mathfrak{A}$ in iA und $\mathfrak{U}$ in iU verändert, so erhalten wir

$$S(u, a) = A.u - U,$$

$$C(u, a) = \left(\frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha} - A\right).u + U,$$

$$D(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - A\right).u + U,$$

und hierin ist

$$A = \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 + \text{etc.}$$

und

$$U = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 + \text{etc.}$$

Der Factor u wird nach einer von den Reihen (7.) in §. 144. berechnet. Die Berechnung des Parameters a ist nicht nöthig; wird sie aber verlangt, so dient dazu die Reihe

$$\eta.a = \mathfrak{L}\alpha - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta'_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta'_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) - \text{etc. oder}$$

$$\eta.a = \mathfrak{L}\alpha - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right) - \tfrac{1}{8}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) - \text{etc.}$$

Wird $\Phi = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so hat man, wie oben,

$$S(K, a) = A.K,$$

$$C(K, a) = \left(\frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha} - A\right)K,$$

$$D(K, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - A\right)K,$$

und den Factor oder Quadranten K giebt die Formel $K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\eta}$.

§. 147.

Zweite Art der Berechnung der Integrale $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{E}(u,a)$, $'\mathfrak{D}(u,a)$ unter der Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Vertauscht man in den Formeln des §. 145. die beiden conjugirten Modul k und k' mit einander, so verwandelt sich $\mathrm{am}u$ in $\mathrm{am}'u = \Phi$ und $\mathrm{am}a$ in $\mathrm{am}'a = \alpha$. Im Uebrigen bleiben alle Formeln wie sie sind, nur müssen die Modular-Zahlen jetzt hergeleitet werden aus

$$m = 1 \quad \text{und} \quad n = k$$

nach den Formeln

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \quad m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, \quad m_3 = \frac{m_2+n_2}{2} \quad \text{etc.}$$
$$n_1 = \sqrt{(mn)}, \quad n_2 = \sqrt{(m_1 n_1)}, \quad n_3 = \sqrt{(m_2 n_2)} \quad \text{etc.}$$

Setzt man nun aufserdem ui statt u und ai statt a, wodurch sich $\mathrm{am}'u$ in $i\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}u = i.\mathfrak{L}\Phi$ und $\mathrm{am}'a$ in $i\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}a = i.\mathfrak{L}\alpha$ verwandelt, wenn wieder

$$\mathrm{am}u = \Phi \quad \text{und} \quad \mathrm{am}a = \alpha$$

gesetzt wird, so werden alle Gröfsen δ, δ' etc. und Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc. und α_1, α_2, α_3 etc. imaginär; die Gröfsen μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. aber verwandeln sich in $-\mu_1$, $-\mu_2$, $-\mu_3$, $-\mu_4$ etc.; ferner verwandelt sich $\mathfrak{A}'$ in $i'\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{U}'$ in $-'\mathfrak{U}$. Berechnet man nun $\tang\Phi' = \frac{1}{k'\tang\varphi}$ und $\tang\alpha' = \frac{1}{k'\tang\alpha}$, und ferner aus

$$\nabla = \frac{1}{\sin\varphi'}, \quad \nabla' = \frac{1}{\sin\alpha'}, \quad \delta_1 = \frac{k'}{2}\cdot\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \delta'_1 = \frac{k'}{2}\cdot\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}$$

die Gröfsen ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc., ∇'_1, ∇'_2, ∇'_3, ∇'_4 etc., ferner δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. und δ'_2, δ'_3, δ'_4, δ'_5 etc. nach den Formeln des §. 144.; weiter

$$\Phi_1 = 2\,\mathfrak{L}\Phi - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 2\,\mathfrak{L}\alpha - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right),$$
$$\Phi_2 = 2\Phi_1 - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) \quad - \quad \alpha_2 = 2.\alpha_1 - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right),$$
$$\Phi_3 = 2\Phi_2 - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) \quad - \quad \alpha_3 = 2.\alpha_2 - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right),$$
$$\Phi_4 = 2\Phi_3 - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) \quad - \quad \alpha_4 = 2.\alpha_3 - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right)$$
u. s. w. u. s. w.;

endlich hieraus

$$\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\Phi_1\,,$$

$$\mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\delta_2}{m_2}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_2 \quad - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\delta'_2}{m_2}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\Phi_2\,,$$

$$\mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\delta_3}{m_3}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_3 \quad - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\delta'_3}{m_3}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\Phi_3\,,$$

$$\mathfrak{Tang}\,\mu_4 = \frac{\delta_4}{m_4}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_4 \quad - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_4 = \frac{\delta'_4}{m_4}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\Phi_4$$

u. s. w. u. s. w.,

o verwandeln sich, weil nun wieder

$$'\mathfrak{A} = \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 + \delta'_5 + \text{etc. und}$$

$$'\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 + \tfrac{1}{32}\mu_5 + \text{etc.}$$

ist, die Formeln (1.), (2.), (3.) des §. 145. in

$$'\mathfrak{S}(u, a) = -'\mathfrak{A}\,.\,u + '\mathfrak{U},$$

$$'\mathfrak{C}(u, a) = \left(\frac{k' \cos\alpha'}{\cos\alpha} - '\mathfrak{A}\right)u + '\mathfrak{U},$$

$$'\mathfrak{D}(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - '\mathfrak{A}\right)u + '\mathfrak{U};$$

und der Factor u ist zu berechnen nach der Reihe

$$\eta u = \mathfrak{L}\Phi - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\,\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right)$$

$$- \tfrac{1}{16}\,\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_4}{m_4}\right) - \tfrac{1}{32}\,\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_5}{m_5}\right) - \text{etc.}$$

oder nach der Reihe

$$\eta u = \mathfrak{L}\Phi - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) - \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) - \tfrac{1}{8}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right)$$

$$- \tfrac{1}{16}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) - \text{etc.}$$

Zusatz. Die vorstehenden Formeln convergiren zu langsam, wenn der Modul k sehr klein ist. Man wird dann die im Zusatze zu §. 142. entwickelten Formeln anwenden; umgekehrt ist auch die Convergenz der Formeln des §. 145. zu gering, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden ist, und man wird dann auch die Integrale der ersten Classe nach den im Zusatze zu §. 142. entwickelten Formeln berechnen.

§. 148.

Zweite Art der Berechnung der Integrale $'S(u, a)$, $'C(u, a)$, $'D(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Nimmt man wieder dieselben Modular-Zahlen, wie im §. 147., welche aus $m = 1$ und $n = k$ nach den bekannten einfachen Formeln be-

rechnet werden, und setzt überhaupt ai statt a in den Formeln des §. 147., so erhält man die gesuchten neuen Formeln. Aus $\operatorname{am} u = \Phi$ und $\operatorname{am}' a = \alpha$ berechne man $\operatorname{tang}\Phi' = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\varphi}$ und $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{1}{k \operatorname{tang}\alpha}$; ferner

$$\nabla = \frac{1}{\sin\varphi'}, \quad \nabla' = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}, \quad \delta_1 = \frac{k'}{2} \cdot \frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}, \quad \delta'_1 = \frac{k'^2}{2} \cdot \sin\alpha \sin\alpha'$$

und die nächsten Hülfsgrößen hieraus nach den Formeln des §. 144., die Größen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 etc. und α_1, α_2, α_3, α_4 etc., aber nach den Formeln

$$\Phi_1 = 2\Phi - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 2\alpha - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right),$$

$$\Phi_2 = 2\Phi_1 - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) \quad - \quad \alpha_2 = 2\alpha_1 - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right),$$

$$\Phi_3 = 2\Phi_2 - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) \quad - \quad \alpha_3 = 2\alpha_2 - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right),$$

$$\Phi_4 = 2\Phi_3 - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) \quad - \quad \alpha_4 = 2\alpha_3 - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right)$$

u. s. w. u. s. w.,

endlich μ_1, μ_2, μ_3 etc. nach den Formeln

$$\operatorname{tang}\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1}\sin\alpha_1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang}\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1}\,\mathfrak{Sin}\,\Phi_1,$$

$$\operatorname{tang}\mu_2 = \frac{\delta_2}{m_2}\sin\alpha_2 \quad - \quad \operatorname{tang}\mu_2 = \frac{\delta'_2}{m_2}\,\mathfrak{Sin}\,\Phi_2,$$

$$\operatorname{tang}\mu_3 = \frac{\delta_3}{m_3}\sin\alpha_3 \quad - \quad \operatorname{tang}\mu_3 = \frac{\delta'_3}{m_3}\,\mathfrak{Sin}\,\Phi_3,$$

$$\operatorname{tang}\mu_4 = \frac{\delta_4}{m_4}\sin\alpha_4 \quad - \quad \operatorname{tang}\mu_4 = \frac{\delta'_4}{m_4}\,\mathfrak{Sin}\,\Phi_4$$

u. s. w. u. s. w.

Setzt man nun

$$'A = \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 \ldots,$$
$$'U = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 \ldots,$$

so ist

$$'\mathbf{S}(u, a) = -'A.u + 'U,$$
$$'\mathfrak{C}(u, a) = (k'^2 \sin\alpha \sin\alpha' - 'A).u + 'U,$$
$$'D(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right).u + 'U.$$

Der Factor u ist nach einer von den beiden Reihen für ηu in §. 147., in welchen $\eta = \frac{\pi}{2K'}$ ist, zu berechnen.

Wenn die obigen Formeln wegen zu grofser Kleinheit des Moduls k, oder auch die Formeln des §. 156. wegen allzubeträchtlicher Gröfse des Moduls k nicht rasch genug convergiren, so sind die im Zusatze 2. und 1. zu §. 143. angegebenen Formeln zu benutzen. Ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so hat man, wie in §. 143.,

$$'S(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{a}{K'}\right) - K.'A,$$

$$'C(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{a}{K'}\right) + (k'^2 \sin\alpha \sin\alpha' - 'A).K,$$

$$'D(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{a}{K'}\right) + \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right).K,$$

und die Gröfse a in diesen Formeln, oder sogleich $\frac{\pi a}{2K'} = \eta a$ ist nun nach einer von den beiden Reihen

$$\eta a = \alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta'_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta'_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta'_3}{m_3}\right) - \text{etc. oder}$$

$$\eta a = \alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right) - \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right) - \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) - \text{etc.}$$

zu berechnen; der Quadrant K aber mufs nach Formel (3.) des §. 57. berechnet werden, worin k mit k' zu vertauschen ist.

Jedes von den zwölf Modular-Integralen der zweiten Art kann also auf zwei verschiedene Arten ohne alle andere Hülfsmittel als die der gewöhnlichen logarithmischen Tafeln und der cyklischen und hyperbolischen Functionen berechnet werden.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

9.

Mémoire sur l'équilibre d'un corps solide suspendu à un cordon flexible.

(Par M. *Pagani*, prof. ord. à l'université de Louvain.)

Dans le troisième volume de la correspondance mathématique et physique de Bruxelles il est question d'une expérience curieuse de Mr. *Grégory* relative à l'équilibre de quelques corps attachés par un point à l'extrémité inférieure d'un cordon dont l'autre extrémité est fixée à l'axe vertical d'une roue qui tourne avec une vitesse constante.

Le cas le plus simple de cet équilibre est celui d'une barre homogène très mince AB (Fig. 11.) suspendue par l'extrémité A au cordon flexible OA. Si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, le filet moyen du cordon et l'axe de la barre, parvenus à un état permanent, seront dans le plan vertical y, x, et tourneront avec lui autour de la verticale Ox, dans la position indiquée par la figure.

Le quatrième volume du recueil cité contient la solution de ce problème dans laquelle j'ai pris en considération la courbure du fil. Je me propose maintenant de reprendre la théorie de cette expérience et d'examiner plus en détail les résultats que l'on en peut déduire dans un très grand nombre de cas particuliers.

Première section.

Théorie générale.

Considérons un solide quelconque homogène symétrique par rapport au plan des x, y; et supposons que la droite AB passe par le point d'attache du corps et par son centre de gravité G. Nommons, pour abréger,

θ la vitesse angulaire du systême,

a la distance entre le point d'attache A et le centre de gravité G,

ε la distance entre le centre G et le point c où la droite AB rencontre l'axe des x,

l la longueur du cordon OA,

ω l'aire de la section transversale du cordon,

ϱ sa densité,
p le poids du cordon divisé par sa longueur;
V le volume du corps suspendu,
ϱ' sa densité,
P son poids;
α l'angle ACO,
β l'angle que fait avec l'axe des x, la tangente à l'extrémité inférieure du cordon;
τ la tension en un point quelconque du cordon, rapportée à l'unité de surface,
T la valeur de τ au point A;
s la longueur variable de la courbe à partir du point O;
h la distance du point C à l'origine O;
x, y, les coordonnées d'un point quelconque du fil OA;
x', y', les coordonnées d'un point quelconque du corps solide;
ξ la différence $h-x'$;
g le coefficient de la gravité, et
π le rapport de la circonférence au diamètre du cercle.

La vitesse angulaire θ étant invariable, le système parviendra bientôt à un état d'équilibre stable. En appliquant à ce cas les principes connus de la mécanique, on obtient facilement les cinq relations suivantes, dans lesquelles les intégrations indiquées doivent s'étendre à tout le volume V:

$$g\varrho' V = \omega T \cos\beta, \quad \varrho'\theta^2 \int y' dV = \omega T \sin\beta,$$

$$\varrho'\theta^2 \int y'\xi\, dV + g\varrho' \int y' dV = \omega T(a+\varepsilon)\sin(\alpha+\beta),$$

$$d\left(\tau \frac{dx}{ds}\right) + g\varrho ds = 0, \quad d\left(\tau \frac{dy}{ds}\right) + \varrho\theta^2 y\, ds = 0.$$

Ces équations, jointes à l'expression de l'intégrale relative à la longueur donnée du cordon, serviront à la détermination des inconnues h, ε, α, β, T, et elles feront connaître la nature de la courbe OA, ainsi que la valeur de la tension τ.

L'équilibre stable du système peut aussi avoir lieu en supposant que le diamètre AB est tout entier à droite de l'axe des x; ce qui rend négative la valeur de $\cos\alpha$. Pour avoir les formules relatives à cette hypothèse il suffit de changer le signe de a.

Par la propriété connue du centre de gravité G, on a $\int y' dV = \varepsilon V \sin\alpha$; et si l'on observe que $g\varrho' V = P$, les deux premières équations nous donneront, en éliminant alternativement T et β,

$$1. \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{\varepsilon}{g}\theta^2 \sin\alpha, \qquad 2. \quad \omega T = \frac{P}{\cos\alpha}.$$

Pareillement si l'on élimine les mêmes quantités de la troisième équation, on aura

$$3. \quad \theta^2 \int y' \xi dV = [ag + (a+\varepsilon)\varepsilon\theta^2 \cos\alpha] V \sin\alpha.$$

En intégrant la quatrième équation et en déterminant la constante arbitraire par la condition qu'au point A on doit avoir $s = l$, $\tau = T$, $\frac{dx}{ds} = \cos\beta$, on trouve

$$\tau \frac{dx}{ds} + g\varrho s = T\cos\beta + g\varrho l.$$

Si l'on développe les équations différentielles et si l'on multiplie ensuite la première par $\frac{dx}{ds}$ et la seconde par $\frac{dy}{ds}$, la somme des produits sera intégrable, et donnera

$$4. \quad \tau + g\varrho x + \tfrac{1}{2}\varrho\theta^2 y^2 = K,$$

en désignant par K la constante arbitraire.

Eliminons τ entre l'équation (4.) et la précédente, nous aurons enfin

$$5. \quad \frac{ds}{dx} = \frac{K - g\varrho x - \frac{1}{2}\varrho\theta^2 y^2}{T\cos\beta + g\varrho(l-s)}.$$

Les équations que nous venons d'obtenir successivement peuvent être considérées comme des transformations du premier système d'équations; mais pour les rendre applicables, il reste encore deux intégrations à effectuer. L'intégration indiquée dans l'équation (3.) ne dépend que des quadratures; et nous verrons plus loin que sa valeur peut s'exprimer en termes finis dans un très grand nombre de cas. Il n'en est pas de même de l'équation (5.) qu'il est impossible d'intégrer autrement que par approximation.

A cet effet nous supposerons d'abord que le poids du cordon est une très petite fraction du poids du corps suspendu, ce qui permet de négliger les termes multipliés par g; et nous aurons cette équation beaucoup plus simple:

$$6. \quad T\cos\beta \frac{ds}{dx} = K - \tfrac{1}{2}\varrho\theta^2 y^2.$$

On déterminera la constante arbitraire K en observant que l'on a en même temps $y = (a+\varepsilon)\sin\alpha$, $\frac{dx}{ds} = \cos\beta$; ce qui donne

$$K = T + \tfrac{1}{2}\varrho\theta^2(a+\varepsilon)^2\sin^2\alpha.$$

Faisons, pour abréger,

$$\mu = \frac{1}{\cos\beta} + \tfrac{1}{2}\varrho\,\frac{\theta^2(a+\varepsilon)^2\sin^2\alpha}{T\cos\beta}, \qquad \lambda^2 = \frac{2T\cos\beta}{\varrho\theta^2},$$

l'équation (6.) deviendra

$$7. \quad \frac{ds}{dx} = \mu - \frac{y^2}{\lambda^2}.$$

Mais on a $g\varrho\omega = p$, et $\omega T\cos\beta = P$ d'après l'équation (2.); par conséquent

$$8. \quad \lambda^2 = \frac{2gP}{p\theta^2},$$

$$9. \quad \mu = \frac{1}{\cos\beta} + \left(\frac{a+\varepsilon}{\lambda}\right)^2\sin^2\alpha.$$

En substituant dans l'équation (7.) la valeur de $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, on en déduira sans difficulté

$$10. \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left[\left(\mu+1-\frac{y^2}{\lambda^2}\right)\left(\mu-1-\frac{y^2}{\lambda^2}\right)\right]}.$$

L'intégration de cette dernière équation dépend des fonctions elliptiques auxquelles on la ramène aisément en posant

$$11. \quad c^2 = \frac{\mu-1}{\mu+1};$$

$$12. \quad y = \frac{2c\lambda\sin\varphi}{\sqrt{[2(1-c^2)]}},$$

d'où

$$dy = \frac{2c\lambda\cos\varphi}{\sqrt{[2(1-c)^2]}}\,d\Phi.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (10.) on aura

$$dx = \frac{\lambda}{2}\sqrt{[2(1-c^2)]}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

et par suite

$$ds + dx = \frac{2\lambda}{\sqrt{[2(1-c^2)]}}\,d\Phi\sqrt{(1-c^2\sin^2\Phi)}.$$

Partant

$$13. \quad x = \frac{\lambda}{2}\sqrt{[2(1-c^2)]}\,F(c,\Phi),$$

$$14. \quad s+x = \frac{2\lambda}{\sqrt{[2(1-c^2)]}}\,E(c,\Phi).$$

Si nous substituons dans l'équation (4.) la valeur de K trouvée plus haut, nous aurons, en négligeant le terme multiplié par g,

15. $\tau = T + \frac{1}{2}\varrho\theta^2[(a+\varepsilon)^2\sin^2\alpha - y^2]$.

Désignons par Φ' la valeur de Φ qui correspond à $y = (a+\varepsilon)\sin\alpha$; la formule (12.) nous donnera

16. $(a+\varepsilon)\sin\alpha = \frac{2c\lambda\sin\varphi'}{\sqrt{[2(1-c^2)]}}$;

et en faisant, dans les équations (13.) et (14.), $x = h-(a+\varepsilon)\cos\alpha$, $s = l$, $\Phi = \Phi'$, on aura

17. $h = (a+\varepsilon)\cos\alpha + \frac{\lambda}{2}\sqrt{[2(1-c^2)]}\,F(c,\Phi')$,

18. $l+h = (a+\varepsilon)\cos\alpha + \frac{2\lambda}{\sqrt{[2(1-c^2)]}}E(c,\Phi')$.

Si le rapport $\frac{\gamma}{\lambda}$ est une fraction très petite et telle que l'on puisse négliger sa quatrième puissance dans l'équation (10.), on a un système de formules plus simples que les précédentes. On aura d'abord, en intégrant cette équation,

19. $y = \frac{\lambda\sqrt{(\mu^2-1)}}{\sqrt{(2\mu)}}\sin\frac{x\sqrt{(2\mu)}}{\lambda}$;

et ensuite

20. $s = \frac{\mu y}{\sqrt{(\mu^2-1)}}\left(1+\frac{y^2}{3\mu(\mu^2-1)\lambda^2}\right)$.

Ces formules donnent, en y faisant $y = (a+\varepsilon)\sin\alpha$,

21. $(a+\varepsilon)\sin\alpha = \frac{\lambda\sqrt{(\mu^2-1)}}{\sqrt{(2\mu)}}\sin[h-(a+\varepsilon)\cos\alpha]\frac{\sqrt{(2\mu)}}{\lambda}$,

22. $l = \frac{\mu(a+\varepsilon)\sin\alpha}{\sqrt{(\mu^2-1)}}\left[1+\frac{(a+\varepsilon)^2\sin^2\alpha}{3\mu(\mu^2-1)\lambda^2}\right]$.

En développant l'équation (21.) par le retour des suites, et en négligeant les termes divisés par les puissances de λ supérieures au carré, on obtient,

23. $h-(a+\varepsilon)\cos\alpha = \frac{(a+\varepsilon)\sin\alpha}{\sqrt{(\mu^2-1)}}\left[1+\frac{\mu(a+\varepsilon)^2\sin^2\alpha}{3(\mu^2-1)\lambda^2}\right]$.

En combinant les formules (22.) et (23.), on en déduit

$$h-(a+\varepsilon)\cos\alpha = \frac{3\lambda^2+\mu(a+\varepsilon)^2\sin^2\alpha}{2\mu\lambda^2+(a+\varepsilon)^2\sin^2\alpha}\,l.$$

Substituons dans cette expression, ainsi que dans l'équation (22.), la valeur de μ donnée par la formule (9.); nous aurons, en négligeant toujours les termes divisés par λ^3,

24. $h = (a+\varepsilon)\cos\alpha + \left[\cos\beta + \frac{1}{3}(1-4\cos\beta)\left(\frac{a+\varepsilon}{\lambda}\right)^2\sin^2\alpha\right]l$.

25. $l = (a+\varepsilon)\left[\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \frac{2}{3}\left(\frac{a+\varepsilon}{\lambda}\right)^2\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\tang^3\beta}\right]$.

La formule (25.) pouvant offrir quelque difficulté dans le cas où l'on aurait $\beta = 0$, il faudra calculer directement la valeur de l, en substituant dans l'équation (22.) la valeur de μ dans laquelle on fera préalablement $\cos\beta = 1$. De cette manière on a

$$26. \qquad l = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left[\frac{7}{6} + \left(\frac{a+\varepsilon}{\lambda}\right)^2 \sin^2\alpha\right].$$

En négligeant tout à fait les termes divisés par λ^2, on obtient les formules suivantes, beaucoup plus simples mais moins exactes que les précédentes,

$$y = x \operatorname{tang}\beta, \qquad h = (a+\varepsilon)\cos\alpha + l\cos\beta, \qquad l = (a+\varepsilon)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Dans cette hypothèse le fil est tendu en ligne droite, et la solution du problème sera donnée par ces formules combinées avec les trois premières et la 15me. On peut substituer aux deux dernières celles-ci qui en dérivent

$$27. \qquad h\sin\alpha = l\sin(\alpha+\beta), \qquad l\sin\beta = (a+\varepsilon)\sin\alpha,$$

et qui se démontrent au moyen du triangle rectiligne OAC.

Il résulte de toute cette analyse que, si le poids du corps suspendu est très grand relativement au poids du cordon, ce qui est le cas de l'expérience citée, les équations (1.), (2.), (3.), (8.), (9.), (12.), (16.), (17.) et (18.), établissant des relations nécessaires et suffisantes entre les inconnues du problème et les quantités données, serviront à la complète détermination des premières. Ensuite les équations (11.) et (13.) et la formule (15.) feront connaître la nature de la courbe OA et la tension en un point quelconque de cette courbe.

Si l'on néglige les termes divisés par λ^3, il faudra d'abord combiner les formules (24.) et (25.) ou (26.) avec les quatre premières. La nature de la courbe OA sera définie par l'équation (19.) laquelle, étant développée, en y mettant la valeur de μ et en s'arrêtant aux termes divisés par λ^2, devient

$$19'. \qquad y = x\operatorname{tang}\beta + \frac{1}{3\lambda^2\sin\beta}[3x(a+\varepsilon)^2\sin^2\alpha - x^3].$$

Quant à la tension en un point quelconque de la courbe, elle sera connue au moyen de la formule (15.).

Enfin, si l'on néglige tous les termes divisés par λ^2, le problème pourra être résolu par les formules (1.), (2.), (3.) et (27.).

Les neuf équations que nous avons rappelées plus haut renferment plus de neuf quantités, en y comprenant les quantités données; par con-

séquent si l'on se donnait d'avance $\beta = 0$, il suffirait de laisser indéterminée l'une ou l'autre des quantités l, θ; et les formules que l'on obtiendrait dans cette hypothèse pourraient encore servir à la complète détermination des autres quantités.

On aura donc pour le cas particulier dont nous venons de parler,

$$\beta = 0, \quad 1'. \ \varepsilon = 0, \quad 2'. \ \omega T = P,$$

$$3'. \ \theta^2 \int y' \xi \, dV = agV \sin\alpha, \qquad 8'. \ \lambda^2 = \frac{2gP}{p\theta^2},$$

$$9'. \ \mu = 1 + \frac{a^2 \sin^2\alpha}{\lambda^2}, \qquad 11'. \ c^2 = \frac{1}{1 + \frac{2\lambda^2}{a^2 \sin^2\alpha}}, \qquad 16'. \ \Phi' = \frac{\pi}{2},$$

$$17'. \ h = a\cos\alpha + \frac{1-c^2}{2c} a \sin\alpha F'.c, \qquad 18'. \ l = \frac{a\sin\alpha}{c}[E'c - \tfrac{1}{2}(1-c^2)F'.c],$$

$$12'. \ y = a\sin\alpha\sin\Phi, \qquad 13'. \ x = \frac{1-c^2}{2c} a \sin\alpha F(c,\Phi),$$

$$15'. \ \omega\tau = P + \frac{1}{2g} p\theta^2 a^2 \sin^2\alpha . \cos^2\Phi.$$

Ces formules, déduites de leurs analogues, suffisent pour démontrer la légitimité de l'hypothèse admise. Elles donnent sous une forme très simple, la solution exacte du problème dans le cas où le centre de gravité G est situé sur l'axe de rotation.

Lorsque je me suis occupée pour la première fois de cette question (Voyez, le 1er cahier du 4me volume de la correspondance citée), j'ai supposé, pour simplifier le problème, que le centre de gravité G était sur l'axe de rotation, et j'ai déterminé les conditions de l'équilibre d'une barre homogène et l'équation de la courbe formée par le fil. Mr. *Desalis* qui s'est occupé de la même question, après moi, et dont le travail est imprimé dans le cahier suivant, a supposé que le fil décrivait une surface conique et il est parvenu aux formules analogues à celles que nous avons désignées sous les Nros. (1.), (2), (3.) et (27.). L'examen que nous avons fait nous permet de conclure que la solution du problème que fournissent ces dernières formules peut-être exacte dans plusieurs cas, notamment si le fil n'est pas très long et si la vitesse angulaire n'est pas très grande. Il en est de même de la solution qui suppose $\beta = 0$; elle sera exacte toutes les fois que les équations rapportées plus haut seront satisfaites; elle peut servir particulièrement dans certains cas où l'autre solution serait en défaut. Mais pour avoir la solution générale, il faut recourir aux formules que nous avons données en premier lieu dans l'addition à la note

citée pour le cas de la barre homogène, et à celles que l'on trouve ici pour un corps symétrique quelconque.

Nous ferons remarquer avant d'aller plus loin qu'on peut aussi obtenir l'intégrale approchée de l'équation (5.) dans le cas où le poids du cordon est comparable au poids du corps suspendu, si la courbe OA, formée par le filet moyen, ne s'écarte pas sensiblement de l'axe des x.

En effet mettons d'abord l'équation (5.) sous cette forme

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\varkappa - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{g}y^2}{\gamma l + l - s},$$

en désignant par $\varkappa$ une nouvelle constante arbitraire, et par γ le quotient du poids du corps divisé par celui du cordon. Maintenant si l'on substitue dans cette équation $h-x$ à la place de $l-s$, et si l'on néglige les puissances de $\frac{dy}{dx}$ supérieures à la seconde, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(2(\varkappa-\gamma l-h)-\frac{\theta^2}{g}y^2\right)}} = \frac{dx}{\sqrt{(\gamma l+h-x)}}.$$

Faisons, pour abréger,

$$2(\varkappa-\gamma l-h) = k^2\frac{\theta^2}{g},$$

et nous aurons, en intégrant,

$$y = k\sin.\frac{2\theta}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{(\gamma l+h)}-\sqrt{(\gamma l+h-x)}\right].$$

Pour déterminer la constante h nous supposerons d'abord que l'extrémité inférieure de la chaîne OA est libre, et que l'on a $\gamma=0$. On doit donc avoir au point A, $\frac{dy}{dx}=0$, $x=h$; et de là on déduit $h=\frac{\pi^2}{16\theta^2}g$.

Il faut d'ailleurs, pour l'exactitude de nos résultats, que cette valeur de h soit peu différente de l et moindre que cette quantité; ce qui exige que la vitesse angulaire θ soit plus grande que $\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{g}{l}}$, et diffère très peu de cette valeur.

Supposons actuellement que la chaîne porte un poids et que son extrémité inférieure puisse glisser sans frottement le long de l'axe des x, nous aurons à la fois $y=0$, $x=h$, et par conséquent

$$\frac{2\theta}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{(\gamma l+h)}-\sqrt{(\gamma l)}\right] = \pi;$$

d'où

$$h = \frac{\pi^2 g}{4\theta^2}+\frac{\pi}{\theta}\sqrt{(\gamma g l)}, \qquad \theta > \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left[\sqrt{(\gamma+1)}+\sqrt{\gamma}\right].$$

La valeur de l'autre constante arbitraire k se déterminera en intégrant la différentielle de l'arc depuis 0 jusqu'à l. Cette différentielle étant à peu près égale à

$$dx\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}\right),$$

si l'on y substitue la valeur de $\frac{dy}{dx}$ et si l'on fait, pour abréger,

$$\varphi = \frac{4\theta}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{(\gamma l+h)}-\sqrt{(\gamma l+h-x)}\right],$$

on aura

$$28.\quad l-h = \frac{\theta^2 k^2}{g}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi\,.\,d\varphi}{4\theta\sqrt{\left(\frac{\gamma l+h}{g}\right)-\varphi}}.$$

Posons

$$\Pi = 2\theta\sqrt{\left(\frac{\gamma l+h}{g}\right)} = \pi+2\theta\sqrt{\left(\frac{\gamma l}{g}\right)},$$

et nous obtiendrons, en substituant cette valeur dans l'équation précédente,

$$k^2 = \frac{2g(l-h)}{\theta^2\left(\log\frac{\Pi}{\Pi-\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{2\Pi-\varphi}\right)}.$$

Si le rapport $\frac{\pi}{\Pi}$ est très petit on aura, en développant l'intégrale définie,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{2\Pi-\varphi} = \Sigma\frac{fn}{(2\Pi)^n},$$

la somme devant s'étendre depuis $n=2$ jusqu'à $n=\infty$, et la fonction fn étant déterminée par l'équation

$$fn = n(2\Pi)^{n-1}-n(n-1)f(n-2).$$

La valeur de k^2 que nous venons de trouver ne peut pas convenir au cas où l'on aurait $\gamma=0$. Mais en reprenant l'équation (28.) qui devient, dans ce cas,

$$l-h = \frac{\theta^2 k^2}{g}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi}{\pi-\varphi},$$

on en déduit aisément

$$k^2 = \frac{2g(l-h)}{\theta^2\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)\frac{d\varphi}{\varphi}}.$$

On a généralement

$$\int_0^{\varphi}(1-\cos\Phi\frac{d\varphi}{\varphi} = 1-\cos\frac{\varphi}{\sqrt{2}}+\frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{1}{24}-\frac{\varphi^2}{7.8.16}+\frac{11\varphi^4}{7.8.9.10.160}-\text{etc.}\right).$$

La série du second membre de cette équation est très convergente pour des valeurs très petites de l'angle Φ; mais en prenant seulement cinq à six termes on aura une valeur suffisante même pour le cas de $\Phi=\pi$.

Deuxième Section.

Applications.

Pour appliquer les formules générales de la section précédente il est nécessaire d'effectuer d'abord l'intégration indiquée dans l'équation (3.). On facilitera les calculs en transportant l'origine des coordonnées au centre G, et en prenant la droite GA pour axe des u et la perpendiculaire à cette droite pour axe des t. Il faudra poser en conséquence

$$y' = (u+\varepsilon)\sin\alpha - t\cos\alpha, \qquad \xi = (u+\varepsilon)\cos\alpha + t\sin\alpha.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (3.), et en observant que l'origine des nouvelles coordonnées est au centre de gravité du corps, on a

$$\theta^2\left[\sin\alpha\cos\alpha\int(u^2-t^2)\,dV - \cos 2\alpha\int(u+\varepsilon)t\,dV\right] = (g+\varepsilon\theta^2\cos\alpha)\,aV\sin\alpha.$$

Si le corps est symétrique non seulement par rapport au plan des u, t, mais encore par rapport à l'axe des u, on aura

$$\int(u+\varepsilon)\,t\,dV = 0,$$

et la dernière équation se réduira simplement à

$$29. \qquad \theta^2\cos\alpha\left[\int(u^2-t^2)\,dV - a\varepsilon V\right] = agV.$$

Désignons par MV et par NV, les moments d'inertie du volume V relativement aux axes des t et des u; nous aurons

$$(M-N)\,V = \int(u^2-t^2)\,dV;$$

et par conséquent

$$30. \qquad \theta^2\cos\alpha = \frac{ag}{M-N-a\varepsilon}.$$

Cette formule démontre que l'on doit avoir

$$M > N$$

pour que l'équilibre puisse subsister, le point C étant au-dessous du centre de gravité du corps. Daus le cas contraire, la valeur de ε étant négative, il faut que le centre de gravité se trouve du côté opposé au fil OA, et que la tangente au point A fasse un angle obtus avec l'axe des x positifs; puisque, d'après l'équation (1.) le signe de tangente β est le même que celui de ε.

On appliquera immédiatement la formule (30.) à tous les corps dont les moments d'inertie sont connus. Ainsi, par exemple, si le corps suspendu est un ellipsoïde dont les demi-axes parallèles aux u et aux t,

sont a et b, on trouve

$$31. \qquad \theta^2 \cos\alpha = \frac{5ag}{a^2 - b^2 - 5a\varepsilon}.$$

On doit donc avoir $a > b$ pour que le centre de gravité de l'ellipsoïde soit au-dessus du point C.

Cherchons maintenant ce que devient la formule (30.) dans d'autres cas; et supposons en premier lieu que le corps suspendu ait la forme d'un prisme très mince dont la droite AB indique la projection de la base. Nous aurons d'abord $t = 0$, $N = 0$ et

$$dV = fu.du, \qquad MV = \int_{-a_1}^{a} fu.u^2\,du, \quad \text{en faisant } a_1 = GB.$$

Partant

$$32. \qquad \theta^2 \cos\alpha = \frac{ag\int_{-a_1}^{a} fu.du}{\int_{-a_1}^{a} fu.u^2\,du - a\varepsilon\int_{-a_1}^{a} fu.du}.$$

1er Exemple. Si la base du prisme est un trapèze dont le rapport entre les deux côtés parallèles est ν, on trouve

$$\theta^2 \cos\alpha = \frac{18ag}{(a+a_1)^2\left(1+\frac{2\nu}{(1+\nu)^2}\right) - 18a\varepsilon}.$$

En faisant successivement dans cette formule $\nu = 1$ et $\nu = 0$, on a

$$33. \qquad \theta^2 \cos\alpha = \frac{3g}{a - 3\varepsilon},$$

et

$$\theta^2 \cos\alpha = \frac{18ag}{(a+a_1)^2 - 18a\varepsilon}.$$

La formule (33.) est relative au rectangle et convient par conséquent au cas d'une petite barre; la seconde formule se rapporte au triangle isoscèle, et donne

$$34. \qquad \theta^2 \cos\alpha = \frac{8ag}{a - 8\varepsilon}$$

et

$$35. \qquad \theta^2 \cos\alpha = \frac{2g}{a - 2\varepsilon},$$

selon que le sommet du triangle est en A ou en B.

2me Exemple. Si la base est une ellipse ou un cercle, la formule (32.) donne

$$36. \qquad \theta^2 \cos\alpha = \frac{4g}{a - 4\varepsilon}.$$

3me Exemple. Si la base est une zone terminée par deux ellipses concentriques et semblables dont les demi-axes sont a et b, a' et b', ou par deux cercles dont les rayons sont a et a', on aura

$$37. \quad \theta^2 \cos\alpha = \frac{4ag}{a^2 - a'^2 - 4a\varepsilon}.$$

Supposons en second lieu que le corps suspendu ait la forme d'un cylindre dont l'axe est la droite $AB = 2a$, nous aurons

$$dV = ft.dt\,du;$$

et si nous désignons par b la plus grande valeur de t, l'équation (29.) nous donnera

$$38. \quad \theta^2 \cos\alpha \left[\int_0^a du \int_0^b (u^2 - t^2) ft.dt - a\varepsilon \int_0^a du \int_0^b ft.dt\right] = ag \int_0^a du \int_0^b ft.dt.$$

4me Exemple. Si la base du cylindre est un rectangle, on a $ft =$ constante; et par suite la formule (38.) nous fournira

$$39. \quad \theta^2 \cos\alpha = \frac{3ag}{a^2 - b^2 - 3a\varepsilon}.$$

Ce résultat analogue à celui de la formule (31.), donne lieu à la même remarque.

5me Exemple. Si la base du cylindre est une zone elliptique dont les demi-axes parallèles à l'axe des t sont b et b', la formule (38.) donnera

$$40. \quad \theta^2 \cos\alpha = \frac{12ag}{4a^2 - 3(b^2 + b'^2) - 12a\varepsilon}.$$

Même remarque que pour l'exemple précédent.

6me Exemple. Pour un cylindre plein de même forme, il suffit de faire $b' = 0$ dans la formule (40.).

Considérons maintenant un solide de révolution autour de l'axe AB. On aura

$$dV = du\,dt\sqrt{(b^2 - t^2)},$$

et $b = fu$, en désignant par fu l'ordonnée de la courbe génératrice de la surface du solide. En substituant ces valeurs dans l'équation (29.) et en y faisant comme plus haut $GB = a_1$, on trouvera

$$41. \quad \theta^2 \cos\alpha \left[\int_{-a_1}^a (4u^2 - f^2u) f^2u.du - 4a\varepsilon \int_{-a_1}^a f^2u.du\right] = 4ag \int_{-a_1}^a f^2u.du.$$

7me Exemple. Le solide de révolution ayant la forme d'un cône droit, dont le sommet est au point A, on trouve, au moyen de cette équation,

$$42. \quad \theta^2 \cos\alpha = \frac{15g}{(1-m^2)a - 15\varepsilon},$$

en désignant par m le quotient du diamètre de la base divisé par la hauteur du cône. Il faut donc que l'on ait $m<1$ pour que le centre de gravité da corps puisse être plus élevé que le point C.

Par appliquer l'équation générale à un solide homogène symétrique par rapport à trois axes qui se coupent au centre G il suffit de faire dans l'équation (38.) $b = F.u$; en dénotant par $F.u$ l'ordonnée de la section principale du corps sur le plan des t, u.

Cependant, si le solido est un anneau engendré par la révolution d'une surface plane autour de l'axe des t, il sera plus commode de prendre

$$dV = u\,du\,dt\,\frac{d\psi}{\cos^2\psi},$$

la lettre ψ désignant l'angle formé par le plan de la figure génératrice avec celui des t, u. On aura donc, au lieu de l'équation (29.), ces deux formules

$$V = \int_0^b dt \int_0^\pi \frac{d\psi}{\cos^2\psi} \int_{u'}^{u''} u\,du,$$

$$\theta^2 \cos\alpha \left[\int_0^b dt \int_0^\pi \frac{d\psi}{\cos^2\psi} \int_{u'}^{u''} (u^2 - t^2)\,u\,du - a\varepsilon V \right] = agV.$$

Si la figure génératrice est symétrique par rapport à deux axes parallèles à ceux des coordonnées u et t; en nommant r le rayon du cercle décrit par le centre de cette figure, on aura

$$u' = (r - ft)\cos\psi, \qquad u'' = (r + ft)\cos\psi;$$

et les expressions précédentes deviendront simplement

$$43. \quad \begin{cases} V = 2r\pi \int_0^b ft.dt, \\ r\pi\theta^2 \cos\alpha \left[\int_0^b (r^2 + f^2.t - 2t^2)\,ft\,dt - a\varepsilon V \right] = agV. \end{cases}$$

8me Exemple. Si la surface génératrice est une ellipse, on a

$$ft = \frac{b'}{b}\sqrt{(b^2 - t^2)};$$

et les formules (43.) nous donnent

$$44. \quad \theta^2 \cos\alpha = \frac{8ag}{4r^2 + 3b'^2 - 2b^2 - 8a\varepsilon}.$$

9me Exemple. Le cas de l'anneau proprement dit est compris dans la formule précédente, et il suffit d'y faire $b' = b$; ce qui la réduit à

$$45. \quad \theta^2 \cos\alpha = \frac{8ag}{4r^2 + b^2 - 8a\varepsilon}.$$

10me Exemple. **Si l'anneau est très aplati on peut supprimer b^2 dans la formule (44.) qui devient par là**

$$\theta^2 \cos\alpha = \frac{8ag}{4r^2+3b'^2+8a\varepsilon}.$$

Mais on a $r+b'=a$: donc si l'on fait $r=b'=a'$, on trouvera

$$\theta^2 \cos\alpha = \frac{8ag}{7a^2+7a'^2+2aa'-8a\varepsilon}.$$

En comparant ce résultat à la formule (37.) on voit qu'il y a une différence sensible entre le cas de l'anneau aplati produit par la révolution d'une ellipse et celui de l'anneau produit par la révolution d'un petit rectangle.

Problème 1er. **Déterminer les circonstances de l'équilibre de la barre très mince *AB*, le centre de gravité *G* étant sur l'axe *Ox* et la valeur du module *c* étant donnée.**

Solution. **On prendra d'abord au lieu de la formule (3′.) la formule (33.) en y faisant $\varepsilon=0$; ce qui donne**

$$46. \quad \cos\alpha = \frac{3g}{a\theta^2},$$

ou bien

$$47. \quad \theta^2 = \frac{3g}{a\cos\alpha}.$$

Substituant cette valeur de θ^2 dans la formule (8.) on en tire

$$48. \quad \lambda^2 = \tfrac{2}{3}\frac{aP\cos\alpha}{p},$$

au moyen de quoi l'équation (11.) donnera (en posant pour abréger

$$49. \quad q = \frac{2c^2P}{3ap(1-c^2)}\Big),$$

$$50. \quad \cos\alpha = \sqrt{(1+q^2)} - q.$$

Exemple 1er. **Soient $a=0^m,3$, $\frac{P}{ap}=60$, $c=0{,}01$. Les formules (49., 50., 47. et 18′.) donnent à très peu près**

$$\alpha = 5^0.8', \qquad \theta = \pi\sqrt{10}, \qquad l = 7a.$$

Exemple 2me. **En faisant $c=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ et en conservant les autres données on trouvera à peu près**

$$\alpha = 89^0.17', \quad \theta = 30\pi, \qquad l = \tfrac{5}{4}a.$$

Remarque. **La valeur de α ne dépend que de celle du module *c* et du rapport entre le poids de l'unité de longueur de la barre et le poids de l'unité de longueur du cordon. La valeur de θ, toutes choses égales d'ailleurs, est en raison inverse de la racine carrée de la longueur de la**

barre. La longueur du cordon, le module étant le même, est proportionnelle à celle de la barre et au sinus de l'inclinaison α. Plus le rapport $\frac{P}{ap}$ augmente, plus l'angle α approche de 90^0, et plus la vitesse angulaire devient grande. En général pour que le centre G soit sur l'axe Ox, il est nécessaire que le cordon soit très long ou très dense si la vitesse angulaire n'est pas très grande.

Problème 2me. On connait la vitesse angulaire, la longueur de la barre et le rapport $\frac{P}{p}$: trouver les conditions nécessaires à l'équilibre dans la suppotion que le centre G soit situé sur l'axe des x.

Solution. En éliminant les quantités $\cos\alpha$ et q au moyen des équations (47., 49. et 50.), on a

$$51. \quad \frac{1}{c^2} = 1 + 4g\frac{P}{p}\cdot\frac{\theta^2}{a^2\theta^4 - 9g^2}.$$

Cette formule combinée avec les formules (46.) et (18′.) fera connaître les inconnues c, α et l.

Exemple. On suppose, $a = 0^m,3$, $\frac{P}{ap} = 15000$, $\theta = 10\pi$; on aura

$$c = \sin 1^0,28, \quad \alpha = 84^0.17'.47'', \quad l = 48,55\,a.$$

Problème 3me. Une sphère homogène est attachée à l'extrémité inférieure d'un cordon vertical qui tourne uniformément sur lui-même, et le centre de gravité du systême est tant soit peu écarté de la verticale qui passe par le point fixe; déterminer la situation d'équilibre du cordon et de la sphère.

Solution. Le poids de la sphère étant supposé très grand par rapport à celui du cordon, si l'on néglige les termes divisés par λ^3, la formule (31.), en y faisant $b = a$, donne $\cos\alpha = -\frac{g}{\varepsilon\theta^2}$; ensuite la formule (1.) nous fournit $\cos\beta = -\cos\alpha$ et les formules (24.) et (25.) deviennent

$$h = (a + \varepsilon - l)\cos\alpha + \frac{1 + 4\cos\alpha}{3}\left(\frac{a+\varepsilon}{\lambda}\right)^2 \sin^2\alpha . l,$$

$$l = a + \varepsilon + \frac{2}{3\lambda^2}(a+\varepsilon)^3\cos^3 a.$$

Substituant dans cette dernière la valeur de $\cos\alpha$ on aura

$$a + \varepsilon = l + \frac{3g^3}{3\lambda^2\theta^6}\left(\frac{l}{l-a}\right)^3, \quad \text{et} \quad h = -\frac{2g^4 l^3}{3\lambda^2\theta^8(l-a)^4},$$

ou bien, eu égard à la valeur de λ^2 (formule 8.),

$$\varepsilon = l - a + \frac{g^2 p}{3\theta^4 P}\left(\frac{l}{l-a}\right)^3, \qquad h = -\frac{g^3 p}{3\theta^6 P}\cdot\frac{l^3}{(l-a)^4}.$$

Pour l'exactitude de ces résultats il faut d'abord que la différence $l-a$ ne soit pas très petite; et si cette condition est remplie, on aura pour ε une valeur positive ou négative selon que l sera $>$ ou $<a$. Dans le premier cas $\cos a$ étant négatif, l'équilibre exige que le diamètre AB de la sphère soit tout entier du côté du cordon OA. Mais alors on doit changer le signe de a, et les formules précédentes donnent:

1° la distance entre le centre de la sphère et le point C où le prolongement du diamètre BA rencontre la verticale, c'est-à-dire

$$\varepsilon = l + a + \frac{g^2 p}{3\theta^4 P}\left(\frac{l}{l+a}\right)^3;$$

2° la distance du point C au point fixe, ou la valeur de l'abscisse

$$OC = h = -\frac{g^3 p}{3\theta^6 P}\cdot\frac{l^3}{(l+a)^4};$$

3° l'angle $BCx = \beta$ au moyen de la formule $\cos\beta = \frac{g}{\varepsilon\theta^2}$;

4° la tension du cordon au point A, (formule 2.), exprimée par

$$\omega T = \frac{\varepsilon P \theta^2}{g};$$

5° l'équation de la courbe formée par le cordon OA, (formule 19'.),

$$y = \left(\operatorname{tang}\beta + \frac{p l^2 \theta^2 \sin\beta}{3\gamma P}\right)x - \frac{p\theta^2 x^3}{6 g P \sin\beta};$$

6° la tension en un point quelconque du cordon, (formule 15.),

$$\omega\tau = \frac{P\theta^2}{g}\left[\varepsilon + \tfrac{1}{2}\frac{p}{P}(l^2\sin^2\beta - y^2)\right].$$

Si l'on avait $l<a$ on pourrait supposer ε négatif et par suite $\cos\alpha$ positif. Mais on aurait alors $\cos\beta$ négatif et la valeur de μ donnée par la formule (9.) étant également négative si λ est très grand, l'équation (19.) donnerait pour y une valeur imaginaire. Donc le système étant d'abord en repos, si on lui imprime un mouvement de rotation autour de la verticale avec une vitesse angulaire croissante, le diamètre AB de la sphère ne prendra point la position indiquée par la figure. L'équilibre serait cependant possible dans cette situation du diamètre si la vitesse angulaire était très grande, pourvu que le point C fût situé entre le centre G et le point A; ce qui rend négative la valeur de ε. Mais pour déterminer les valeurs numériques de toutes les inconnues il faudra recourir aux formules générales dans lesquelles ces quantités sont mêlées et qui ne peuvent être résolues que par des tâtonnements.

Addition.

Dans le 4me volume de la correspondance citée j'ai aussi considéré l'équilibre d'une chaîne fermée et suspendue par un point de sa circonférence à l'extrémité du cordon OA. En imprimant au système une certaine vitesse angulaire, la chaîne commence par s'ouvrir en restant dans le plan vertical qui passe par la courbe OA; mais elle ne tarde pas à s'incliner de manière que son plus grand diamètre prend la position AB. Pour avoir les conditions de l'équilibre relatif à cet état, on nommera:

ω' la section transversale de la chaîne,

ϱ' sa densité,

v, t, z, les coordonnées rectangulaires d'un élément quelconque ds' de la courbe formée par la chaîne,

τ' la tension correspondante à l'élément ds' et rapportée à l'unité de surface.

L'origine des coordonnées est placée au point C; les v positifs sont pris dans le sens CA, les t positifs font un angle aigu avec l'axe Ox, et les z sont perpendiculaires au plan de la figure.

Cela posé, on aura, d'après le principe des vitesses virtuelles,

$$\int (U\,\delta v + T\,\delta t + Z\,\delta z)\,\varrho'\,ds' - \int \tau'\,\delta .\,ds' = 0;$$

et il est facile de s'assurer que l'on doit avoir

$$U = (v\sin\alpha + t\cos\alpha)\,\theta^2\sin\alpha - g\cos\alpha,$$
$$T = (v\sin\alpha + t\cos\alpha)\,\theta^2\cos\alpha + g\sin\alpha,$$
$$Z = -\theta^2 z.$$

En opérant sur la première de ces équations d'après les méthodes connues, on trouve

$$\frac{\tau'}{\varrho'} = \text{const.} - \int (U\,dv + T\,dt + Z\,dz),$$
$$\frac{\tau'}{\varrho'}\cdot\frac{dv^2}{ds^2}\,d\frac{dt}{dv} = U\,dt - T\,dv,$$
$$\frac{\tau'}{\varrho'}\cdot\frac{dv^2}{ds^2}\,d\frac{dz}{dv} = U\,dz - Z\,dv.$$

En substituant dans ces équations les valeurs des forces accélératrices, on aura d'abord

$$52.\quad \frac{\tau'}{\varrho'} = C + g(v\cos\alpha - t\sin\alpha) - \frac{\theta^2}{2}\,[z^2 + (v\sin\alpha + t\cos\alpha)^2].$$

Si l'on élimine au moyen de cette formule la quantité $\frac{\tau'}{\varrho'}$ et si l'on fait, pour abréger

$$t' = \frac{dt}{dv}, \qquad z' = \frac{dz}{dv},$$

on aura, pour définir la courbe formée par la chaîne, les équations,

$$\frac{dz'}{1+t'^2+z'^2} = \frac{[\theta^2(v\sin\alpha+t\cos\alpha)\sin\alpha - g\cos\alpha]z' - \theta^2 z}{C+g(v\cos\alpha - t\sin\alpha) - \frac{\theta^2}{2}[z^2+(v\sin\alpha+t\cos\alpha)^2]}dv,$$

$$\frac{dt'}{1+t'^2+z'^2} = \frac{\theta^2(v\sin\alpha+t\cos\alpha)(t'\sin\alpha-\cos\alpha) - g(\sin\alpha+t'\cos\alpha)}{C+g(v\cos\alpha - t\sin\alpha) - \frac{\theta^2}{2}[z^2+(v\sin\alpha+t\cos\alpha)^2]}dv.$$

On ne peut pas intégrer ces équations dans le cas général qu'elles représentent; mais on peut les simplifier moyennant certaines restrictions. La première consiste à supposer que la troisième ordonnée t est une très petite quantité que l'on peut négliger sans erreur sensible. Donc si nous faisons $t = t' = 0$, les dernières équations donneront seulement

$$53. \qquad \frac{dz'}{1+z'^2} = \frac{\theta^2(vz'\sin^2\alpha - z) - gz'\cos\alpha}{C+gv\cos\alpha - \frac{\theta^2}{2}(z^2+v^2\sin^2\alpha)}dv.$$

Avec les mêmes restrictions la formule (52.) devient

$$54. \qquad \frac{\tau'}{\varrho'} = C+gv\cos\alpha - \frac{\theta^2}{2}(z^2+v^2\sin^2\alpha).$$

Malgré cette simplification il n'est pas possible d'intégrer l'équation de la courbe formée par la chaîne; et si l'on veut obtenir cette équation en termes finis, il est nécessaire de restreindre encore plus la question. Nous nous bornerons à l'examen de deux cas particuliers.

Supposons d'abord que l'on ait sensiblement $\cos\alpha = 0$, l'équation (53.) se réduira à celle-ci:

$$\frac{dz'}{1+z'^2} = \frac{\theta^2(v\,dz - z\,dv)}{C - \frac{\theta^2}{2}(v^2+z^2)},$$

dont l'intégrale est

$$v^2+z^2 = a^2$$

et la constante

$$C = \tfrac{3}{2}a^2\theta^2.$$

Au moyen de ces valeurs, la formule (54.) donnera

$$\tau = \varrho' a^2\theta^2.$$

Pour comparer la valeur de la tension à un poids donné, on fera $\theta = 2n\pi$, et en désignant le poids de la chaîne par P', on aura

$$P' = 2\pi g \varrho' a \omega'.$$

Partant

$$\omega' \tau' = 2n^2 \pi \frac{a}{g} P'.$$

On voit donc que la tension est égale au poids de la chaîne multiplié par le rapport de sa longueur au coefficient de la pesanteur, et par le carré du nombre de tours qu'elle fait dans une seconde de temps.

Considérons enfin le cas où la chaîne reste dans le plan vertical; en d'autres termes faisons $\sin\alpha = 0$ et $\cos\alpha = 1$, dans les équations (53.) et (54.). Il en résultera

$$\frac{dz'}{1+z'^2} = -\frac{g\,dz + \theta^2 z\,dv}{C + gv - \frac{\theta^2}{2} z^2},$$

$$\frac{\tau'}{\varrho'} = C + gv - \frac{\theta^2}{2} z^2.$$

La première de ces équations n'est pas intégrable sous forme finie; mais si l'on néglige les termes multipliés par θ^2, on trouve l'équation différentielle de la chaînette; et si l'on néglige les termes multipliés par g, on obtient

$$\frac{dz'}{1+z'^2} = \frac{\theta^2 z\,dv}{\frac{\theta^2}{2} z^2 - C},$$

équation intégrable et qui donne

$$\frac{dz}{dv} = \pm\sqrt{(C'(\theta^2 z^2 - 2C)^2 - 1)},$$

en désignant par C' la nouvelle constante arbitraire. En changeant les constantes, la dernière équation pourra être mise sous cette forme

$$dv = \pm \frac{(b'^2 - b^2)\,dz}{\sqrt{((2b'^2 - b^2 - z^2)(b^2 - z^2))}},$$

où il est aisé de voir que l'on a fait $C = \frac{1}{2}\theta^2 b'^2$ et $C' = \frac{1}{\theta^4 (b'^2 - b^2)^2}$; la lettre b désigne ici la plus grande valeur de z. D'après cela la valeur de la tension sera donnée par la formule

$$\frac{\tau'}{\varrho} = \tfrac{1}{2}\theta^2 (b'^2 - z^2).$$

Faisons $z = b\sin\Phi$, $c = \frac{b}{\sqrt{(2b'^2 - b^2)}}$, et l'expression précédente de dv deviendra

$$dv = -\frac{b(1-c^2)}{2c}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}};$$

d'où l'on déduit

$$v = a - \frac{b(1-c^2)}{2c}F(c,\Phi).$$

On déterminera les constantes arbitraires en supposant connue la longueur de la chaîne; ce qui rentre dans ce que nous avons déjà vu.

10.

Beweise einiger geometrischer Lehrsätze.

(Von Herrn Dr. *Bauer* in Stettin.)

Beweis des Lehrsatzes No. 15. im IX. Bande pag. 102 dieses Journals.

Lehnsatz. In einem Dreieck ABC sei M die Mitte der Seite AC. Man ziehe BM und bezeichne

AB mit c, BC mit a, $AM = MC$ mit h, BM mit p,

so ist:

$$a^2 + c^2 = 2(h^2 + p^2).$$

Lehrsatz. Dreht sich ein rechter Winkel in der Ebene eines Kreises um seinen festen Scheitelpunct, so ist der Ort der Mitte der Sehne zwischen seinen Schenkeln ein zweiter Kreis, dessen Mittelpunct in der Mitte zwischen dem Mittelpuncte des ersten Kreises und jenem festen Puncte liegt.

Beweis. (Siehe Fig. 12.) O sei der Mittelpunct eines Kreises; innerhalb der Kreisfläche werde irgend ein Punct C angenommen und die Mitte zwischen O und C sei M. Ferner seien die Mitten zweier Sehnen zwischen den Schenkeln zweier rechten Winkel, die ihre Spitze in C haben, μ und μ_1, so ist, wenn der Radius des Kreises r heifst:

$$(C\mu)^2 + (O\mu)^2 = (C\mu_1)^2 + (O\mu_1)^2 = r^2$$

und nach dem Lehnsatze

$$(C\mu)^2 + (O\mu)^2 = 2(M\mu)^2 + 2(MO)^2,$$
$$(C\mu_1)^2 + (O\mu_1)^2 = 2(M\mu_1)^2 + 2(MO)^2.$$

Hieraus folgt

$$M\mu = M\mu_1.$$

Setzt man

$$M\mu = \varrho, \qquad OC = d,$$

so ist:

$$2\varrho^2 + \tfrac{1}{2}d^2 = r^2 \qquad \text{oder} \qquad 4\varrho^2 - r^2 = r^2 - d^2$$

oder

$$(r + 2\varrho)(r - 2\varrho) + (r + d)(r - d) = 0.$$

Auflösung der Aufgabe No. 16. Band IX. p. 103 dieses Journals.

Aufgabe. Bei der Ellipse ist das Rechteck unter den beiden Leitstrahlen, die nach irgend einem Puncte derselben gezogen werden, gleich dem Quadrate des halben Durchmessers, welcher mit der Tangente in jenem Puncte parallel ist. Findet dieser Satz auch bei der Hyperbel statt?

Auflösung. Die Beantwortung dieser Frage giebt bereits *Hamilton* (Lehre von den Kugelschnitten, übers. von *J. J. Feldhoff*. Coblenz, 1825.), indem er (Bch. 2. Stz. 19.) den bezüglichen Satz sowohl für die Ellipse als für die Hyperbel beweist. Seine Beweisführung stützt sich hauptsächlich auf folgende beiden Sätze:

1. Wenn zwei eine Ellipse oder die entgegengesetzten Hyperbelzweige berührende parallele Geraden irgend einer andern Berührenden begegnen, so wird das Rechteck, welches unter denjenigen Abschnitten der von den Parallelen geschnittenen Berührenden enthalten ist, die zwischen dem Berührungspuncte und den Parallelen liegen, gleich sein dem Quadrate des mit der Berührenden parallelen halben Durchmessers (*Hamilton* Bch. 1. Stz. 50. Thl. 2.).

2. Legt man durch die Endpuncte der Quer-Axe (grofsen Axe) der Ellipse oder der Hyperbel zwei Berührende, welche irgend einer andern Berührenden in den Puncten H und G begegnen, so geht der um die Gerade HG als Durchmesser beschriebene Kreis durch die beiden Brennpuncte des Schnitts.

Der erste dieser beiden Sätze läfst sich leicht vermittelst der von Hrn. *Plücker* (analyt. geom. Entwicklungen Bd. 2.) eingeführten Liniencoordinaten beweisen. Auf Liniencoordinaten bezogen stellt nämlich die Gleichung

$$w^2 + 2Bvw = F$$

eben sowohl eine Ellipse als eine Hyperbel dar. Die Curve wird von der zweiten Coordinaten-Axe im Anfangspuncte der Coordinaten berührt und der Mittelpunct liegt in der ersten Coordinaten-Axe. Wenn man v constant nimmt, so ist offenbar, welchen Werth man auch dem v giebt (d. h. für jede Richtung zweier parallelen Tangenten) das Product der w's, d. h. das Product der Abschnitte der zweiten Axe, welche zwischen dem Berührungspunct derselben und den beiden parallelen Tangenten liegen, gleich F.

Wird $v = 0$ gesetzt, d. h. sind die parallelen Tangenten der ersten Axe parallel, so ist

$$w^2 = F,$$

d. h. F ist das Quadrat des der zweiten Axe parallelen Halbdurchmessers.

Aus diesem Satze folgt mit Hülfe bekannter Sätze über Kegelschnitte der von Hrn. *Steiner* im gegenwärtigen Journal Bd. I. p. 279 Note No. 2. aufgestellte Satz, welcher den ersten Theil des Satzes 50. Bch. 1. *Hamilton* bildet.

Beweis des Lehrsatzes No. 1. Band XVI. p. 374 dieses Journals.

Lehrsatz. Zieht man durch irgend einen Punct O in der Ebene einer gleichseitigen Hyperbel zwei sich rechtwinklig durchschneidende Geraden mit den Axen parallel, welche der Hyperbel im Allgemeinen in vier Puncten begegnen, und verbindet diese Durchschnittspuncte durch Sehnen, so liegen die Mitten dieser Sehnen, der Mittelpunct M der Hyperbel und der gegebene Punct O stets auf einem und demselben Kreise, dessen Mittelpunct in der Mitte der Linie MO liegt, welche den gegebenen Punct O mit dem Mittelpuncte M der Hyperbel verbindet; eben so liegen die Schwerpuncte der Dreiecke, welche jenen Punct zur Spitze und die Sehnen zu Grundlinien haben, auf einem andern Kreise, dessen Mittelpunct auf derselben Verbindungslinie MO in dem Endpuncte des ersten Drittels dieser Linie, von O aus, liegt, und dessen Halbmesser gleich $\frac{1}{3}MO$ ist.

Beweis. Die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, auf ihre Axen als Coordinaten-Axen bezogen, ist

$$y^2 - x^2 = a.$$

Zieht man durch den Punct O in der Ebene der Hyperbel zwei sich rechtwinklig durchschneidende Geraden mit den Axen parallel, so kann man von den vier entstehenden Durchschnittspuncten auf sechs verschiedene Arten zwei durch eine Sehne verbinden. Die Mitten der sechs Sehnen sind, wenn O die Coordinaten x' und y' hat, durch ihre Coordinaten ausgedrückt, folgende:

Auflösung der Aufgabe No. 16. Band IX. p. 103 dieses Journals.

Aufgabe. Bei der Ellipse ist das Rechteck unter den beiden Leitstrahlen, die nach irgend einem Puncte derselben gezogen werden, gleich dem Quadrate des halben Durchmessers, welcher mit der Tangente in jenem Puncte parallel ist. Findet dieser Satz auch bei der Hyperbel statt?

Auflösung. Die Beantwortung dieser Frage giebt bereits *Hamilton* (Lehre von den Kugelschnitten, übers. von *J. J. Feldhoff.* Coblenz, 1825.), indem er (Bch. 2. Stz. 19.) den bezüglichen Satz sowohl für die Ellipse als für die Hyperbel beweist. Seine Beweisführung stützt sich hauptsächlich auf folgende beiden Sätze:

1. Wenn zwei eine Ellipse oder die entgegengesetzten Hyperbelzweige berührende parallele Geraden irgend einer andern Berührenden begegnen, so wird das Rechteck, welches unter denjenigen Abschnitten der von den Parallelen geschnittenen Berührenden enthalten ist, die zwischen dem Berührungspuncte und den Parallelen liegen, gleich sein dem Quadrate des mit der Berührenden parallelen halben Durchmessers (*Hamilton* Bch. 1. Stz. 50. Thl. 2.).

2. Legt man durch die Endpuncte der Quer-Axe (grofsen Axe) der Ellipse oder der Hyperbel zwei Berührende, welche irgend einer andern Berührenden in den Puncten H und G begegnen, so geht der um die Gerade HG als Durchmesser beschriebene Kreis durch die beiden Brennpuncte des Schnitts.

Der erste dieser beiden Sätze läfst sich leicht vermittelst der von Hrn. *Plücker* (analyt. geom. Entwicklungen Bd. 2.) eingeführten Liniencoordinaten beweisen. Auf Liniencoordinaten bezogen stellt nämlich die Gleichung

$$w^2 + 2Bvw = F$$

eben sowohl eine Ellipse als eine Hyperbel dar. Die Curve wird von der zweiten Coordinaten-Axe im Anfangspuncte der Coordinaten berührt und der Mittelpunct liegt in der ersten Coordinaten-Axe. Wenn man v constant nimmt, so ist offenbar, welchen Werth man auch dem v giebt (d. h. für jede Richtung zweier parallelen Tangenten) das Product der w's, d. h. das Product der Abschnitte der zweiten Axe, welche zwischen dem Berührungspunct derselben und den beiden parallelen Tangenten liegen, gleich F.

Wird $v = 0$ gesetzt, d. h. sind die parallelen Tangenten der ersten Axe parallel, so ist

$$w^2 = F,$$

d. h. F ist das Quadrat des der zweiten Axe parallelen Halbdurchmessers.

Aus diesem Satze folgt mit Hülfe bekannter Sätze über Kegelschnitte der von Hrn. *Steiner* im gegenwärtigen Journal Bd. I. p. 279 Note No. 2. aufgestellte Satz, welcher den ersten Theil des Satzes 50. Bch. 1. *Hamilton* bildet.

Beweis des Lehrsatzes No. 1. Band XVI. p. 374 dieses Journals.

Lehrsatz. Zieht man durch irgend einen Punct O in der Ebene einer gleichseitigen Hyperbel zwei sich rechtwinklig durchschneidende Geraden mit den Axen parallel, welche der Hyperbel im Allgemeinen in vier Puncten begegnen, und verbindet diese Durchschnittspuncte durch Sehnen, so liegen die Mitten dieser Sehnen, der Mittelpunct M der Hyperbel und der gegebene Punct O stets auf einem und demselben Kreise, dessen Mittelpunct in der Mitte der Linie MO liegt, welche den gegebenen Punct O mit dem Mittelpuncte M der Hyperbel verbindet; eben so liegen die Schwerpuncte der Dreiecke, welche jenen Punct zur Spitze und die Sehnen zu Grundlinien haben, auf einem andern Kreise, dessen Mittelpunct auf derselben Verbindungslinie MO in dem Endpuncte des ersten Drittels dieser Linie, von O aus, liegt, und dessen Halbmesser gleich $\frac{1}{3}MO$ ist.

Beweis. Die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, auf ihre Axen als Coordinaten-Axen bezogen, ist

$$y^2 - x^2 = a.$$

Zieht man durch den Punct O in der Ebene der Hyperbel zwei sich rechtwinklig durchschneidende Geraden mit den Axen parallel, so kann man von den vier entstehenden Durchschnittspuncten auf sechs verschiedene Arten zwei durch eine Sehne verbinden. Die Mitten der sechs Sehnen sind, wenn O die Coordinaten x' und y' hat, durch ihre Coordinaten ausgedrückt, folgende:

1. $(x', 0)$,
2. $(0, y')$,
3. $\left(\frac{x'+\sqrt{(y'^2-a)}}{2}, \frac{y'+\sqrt{(x'^2+a)}}{2}\right)$,
4. $\left(\frac{x'+\sqrt{(y'^2-a)}}{2}, \frac{y'-\sqrt{(x'^2+a)}}{2}\right)$,
5. $\left(\frac{x'-\sqrt{(y'^2-a)}}{2}, \frac{y'+\sqrt{(x'^2+a)}}{2}\right)$,
6. $\left(\frac{x'-\sqrt{(y'^2-a)}}{2}, \frac{y'-\sqrt{(x'^2+a)}}{2}\right)$,

Die vier letzten Puncte können zusammengefafst werden unter dem Schema:

3. 4. 5. 6. $\left(\frac{x'\pm\sqrt{(y'^2-a)}}{2}, \frac{y'\pm\sqrt{(x'^2+a)}}{2}\right)$,

Das Quadrat der Entfernung R eines jeden dieser 6 Puncte von dem Puncte $\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}\right)$ oder von der Mitte zwischen O und M (dem Mittelpuncte der Hyperbel) ist gleich, nämlich

$$R^2 = \frac{x'^2+y'^2}{4}.$$

Dies ist aber das Quadrat der Entfernung des Punctes $\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}\right)$ von M, dem Anfangspuncte der Coordinaten.

Wenn man drei Puncte, die in einer Geraden liegen, als Dreieck betrachtet, so sind die Schwerpuncte der 6 Dreiecke, welche O zur Spitze und eine Sehne zur Grundlinie haben, durch ihre Coordinaten ausgedrückt, folgende:

1. $\left(\frac{x'}{3}, y'\right)$,
2. $\left(x', \frac{y'}{3}\right)$,
3. 4. 5. 6. $\left(\frac{2x'\pm\sqrt{(y'^2-a)}}{3}, \frac{2y'\pm\sqrt{(x'^2+a)}}{3}\right)$.

Das Quadrat der Entfernung (r) eines jeden dieser 6 Puncte von dem Puncte $\left(\frac{2x'}{3}, \frac{2y'}{3}\right)$ ist dasselbe, nämlich

$$r^2 = \frac{x'^2+y'^2}{9}.$$

Ein Punct, dessen Coordinaten $\frac{2x'}{3}$ und $\frac{2y'}{3}$ sind, liegt aber auf der Linie MO zweimal so weit von M als von O entfernt. Das Quadrat der Entfernung eines Punctes $\left(\frac{2x'}{3}, \frac{2y'}{3}\right)$ vom Punct O oder (x', y') ist

$$\frac{x'^2+y'^2}{9} = r^2.$$

Beweis des von Herrn Steiner in seinem Werke „Systém. Entwicklung der Abhängigkeit geometr. Gestalten" Anhang S. 299 No. 16. aufgestellten Lehrsatz.

Der Lehrsatz lautet, mit veränderter Bezeichnung:

Drehen sich zwei beliebige, der Gröfse nach unveränderliche Winkel (aA) und $(a'A')$ in einer Ebene dergestalt um ihre festen Scheitelpuncte β und β', die in einem gegebenen Kegelschnitt liegen, dafs der Durchschnittspunct (a, a') zweier ihrer Schenkel a und a' diesen Kegelschnitt durchläuft, so beschreibt jeder der drei übrigen Puncte (a, A'), (a', A), (A, A'), in denen sich ihre Schenkel paarweise schneiden, einen Kegelschnitt, welcher durch die zwei festen Scheitel β und β' geht.

Beweis. (Siehe Fig. 15.) **Heifse der eine Schenkel des Winkels (aA) in den verschiedenen Lagen, die er bei der Drehung erhält, b, c, d u. s. f., und der andere B, C, D u. s. f., und entsprechend der eine Schenkel des Winkels $(a'A')$: b', c', d' u. s. f., und der andere Schenkel: B', C', D' u. s. f., so ist, da $\mathrm{W.}(aA) = \mathrm{W.}(bB) = \mathrm{W.}(cC)$ und eben so $\mathrm{W.}(a'A') = \mathrm{W.}(b'B') = \mathrm{W.}(c'C')$, auch**

$$\mathrm{W.}(AB) = \mathrm{W.}(ab) \quad \text{und} \quad \mathrm{W.}(AC) = \mathrm{W.}(ac) \quad \text{u. s. f.}$$

Eben so

$$\mathrm{W.}(A'B') = \mathrm{W.}(a'b') \quad \text{und} \quad \mathrm{W.}(A'C') = \mathrm{W.}(a'c') \quad \text{u. s. f.}$$

Bezeichnet man demnach den ebenen Strahlbüschel, dessen Mittelpunct β und dessen Strahlen a, b, c, d u. s. f. sind, mit $\beta_{(a.b.c....)}$ und eben so den ebenen Strahlbüschel, dessen Mittelpunct β' und dessen Strahlen A', B', C', D' u. s. f. sind, mit $\beta'_{(A'.B'.C'....)}$ u. s. f., so leuchtet ein, dafs je zwei Strahlen des Strahlbüschels $\beta_{(A.B.C....)}$ denselben Winkel mit einander bilden wie die beiden entsprechenden des Strahlbüschels $\beta_{(a.b.c....)}$ und je zwei Strahlen des Strahlbüschels $\beta_{(A'.B'.C'....)}$ denselben Winkel wie die beiden entsprechenden des Strahlbüschels $\beta_{(a'.b'.c'....)}$. Wenn also $\beta_{(a.b.c....)}$ und $\beta'_{(a'.b'.c'....)}$ zwei projectivische ebene Strahlbüschel sind, so sind auch

1.	$\beta_{(A.B.C....)}$	**und**	$\beta'_{(a'.b'.c'....)}$,
2.	$\beta_{(a.b.c....)}$	**und**	$\beta'_{(A'.B'.C'....)}$,
3.	$\beta_{(A.B.C....)}$	**und**	$\beta'_{(A'.B'.C'....)}$

drei Paar projectivische ebene Strahlbüschel, d. h. (Syst. d. Abh. S. 139. IV.): wenn (a, a') Punct eines Kegelschnitts ist, der durch die Puncte β und β'

geht, so ist auch ein jeder der drei Puncte (a, A'), $A, a')$, (A, A') Punct eines von drei Kegelschnitten, denen die Puncte β und β' gemeinschaftlich sind.

Auf ähnliche Art werden folgende Sätze bewiesen:

1. Bewegen sich zwei Paare von Puncten a, A und a', A' mit unveränderter Entfernung des a von A und a' von A' auf zwei, einen Kegelschnitt berührenden Geraden β und β' in der Art, dafs die durch a und a' geführte Linie Tangente desselben Kegelschnitts bleibt, so bleibt auch die durch a und A, so wie die durch a' und A und die durch A und A' geführte Linie Tangente eines und desselben von drei neuen Kegelschnitten, welche die Linien β und β' berühren.

2. Drehen sich zwei beliebige, der Gröfse nach unveränderliche Ebenenwinkel *) (aA) und $(a'A')$ dergestalt um ihre festen Scheitel β und β', welche in der Oberfläche eines Kegels vom zweiten Grade liegen, dafs der Durchschnitt der beiden Ebenen a und a' die Oberfläche des Kegels beschreibt, so beschreibt jede der drei übrigen Linien $(a.A')$, $(a'.A)$, $(A.A')$, in denen sich die Schenkel der Ebenenwinkel paarweise schneiden, die Oberfläche eines Kegels vom zweiten Grade, in welcher die Scheitel β und β' der beiden Ebenenwinkel (aA) und $(a'A')$ liegen.

3. Bewegen sich zwei beliebige, der Gröfse nach unveränderliche Winkel (aA) und $(a'A')$, deren gemeinschaftlicher Scheitelpunct in der Durchschnittslinie zweier einen Kegel zweiten Grades berührenden Ebenen β und β' liegt, in den beiden Ebenen β und β' dergestalt, dafs die durch a und a' gelegte Ebene beständig denselben von β und β' berührten Kegel zweiten Grades tangirt, so berührt auch jede von den drei Ebenen (a, A'), (a', A), (A, A'), welche durch je zwei Schenkel der Winkel (aA) und $(a'A')$ gelegt werden, einen bestimmten von drei neuen Kegeln zweiten Grades, welche von den Ebenen β und β' berührt werden.

---

*) Wenn zwei Ebenen a und A sich in der Linie β schneiden, so nenne ich β den Scheitel des Ebenenwinkel (aA), dessen Schenkel die beiden Ebenen a und A sind.

Beweis des von Herrn Steiner in seinem Werke „System. Entw. d. Abh. geom. Gest." Anhang S. 302 No. 24. aufgestellten Lehrsatzes.

Der Lehrsatz lautet:

Befinden sich zwei projectivische Gebilde, eine Gerade A und ein ebener Strahlbüschel B, in beliebiger schiefer Lage in einer Ebene, und man zieht durch jeden Punct der Geraden einen Strahl, welcher entweder *a*) dem (dem jedesmaligen Punct) entsprechenden Strahl des Strahlbüschels parallel ist, oder *b*) welcher zu ihm rechtwinklig ist, so berühren alle solche Strahlen eine bestimmte Parabel, welche auch von der gegebenen Geraden A berührt wird.

Der Beweis beruht darauf, dafs gezeigt wird: die Gerade A und die durch den Punct $\mathfrak{a}$ in ihr mit dem Strahl a parallel oder zu ihm senkrecht gezogene A' werden von den mit den übrigen Strahlen durch die entsprechenden Puncte der A parallel oder zu ihnen senkrecht gezogenen Geraden in entsprechenden Puncten projectivisch ähnlich geschnitten.

Beweis von *a*). In Fig. 13. ist durch den Punct $\mathfrak{a}$ die Gerade A' parallel mit dem Strahl a in dem ebenen Strahlbüschel B, dessen Mittelpunct B ist, gezogen. In dem ebenen Strahlbüschel wird es einen Strahl c geben, welcher mit der Geraden A parallel ist. Es wird also in der Geraden A einen Punct $\mathfrak{c}$ geben, welcher seinen entsprechenden Punct $\mathfrak{c}'$ in dem Durchschnitt der Geraden A und A' hat. Man ziehe die Linie $B\mathfrak{a}$ und nenne diesen Strahl des ebenen Strahlbüschels b, so liegt b zwischen a und c; also wird auch der Punct $\mathfrak{b}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ liegen. Vom Punct $\mathfrak{b}$ aus ziehe man mit b eine Parallele, welche A' in $\mathfrak{b}'$ trifft. Nimmt man nun jenseits c (in Bezug auf b) einen Strahl d, oder jenseits a einen Strahl d, so wird der ihm entsprechende Punct $\mathfrak{d}$ entweder jenseits $\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{a}$ (in Bezug auf $\mathfrak{b}$) liegen; es werde der Punct $\mathfrak{d}$ jenseits $\mathfrak{a}$ angenommen, so wird der durch $\mathfrak{d}$ mit d parallel gezogene Strahl die Gerade A' in $\mathfrak{d}'$ und zwar unterhalb $\mathfrak{b}'$ treffen. Nun ergiebt sich

$$\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}'\,\mathfrak{b}'} = \frac{\sin(a\,b)}{\sin(c\,b)}, \qquad \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}'\,\mathfrak{d}'} = \frac{\sin(a\,d)}{\sin(c\,d)};$$

also

$$\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}'\,\mathfrak{b}'} : \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}'\,\mathfrak{d}'} = \frac{\sin(a\,b)}{\sin(c\,b)} : \frac{\sin(a\,d)}{\sin(c\,d)}.$$

Da aber die Gerade A und der ebene Strahlbüschel B projectivisch sind, so ist

$$\frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} = \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{ab}{c'b'} : \frac{ad}{c'd'} = \frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd},$$

woraus sich unmittelbar ergiebt:

1. $c'b' : c'd' = cb : cd,$
2. $c'b' : cb = c'd' : cd.$

Aus (1.) folgt:

$$c'd' - c'b' : c'b' = cd - cb : cb$$

d. h.

3. $b'd' : c'b' = bd : cb,$
4. $b'd' : bd = c'b' : cb.$

Die Gleichungen (2.) und (4.) zusammengefafst, geben:

$$\frac{cb}{c'b'} = \frac{cd}{c'd'} = \frac{db}{d'b'}.$$

Folglich sind die Geraden A und A' projectivisch ähnlich in Bezug auf die Puncte, in denen sie von den mit den Strahlen des Strahlbüschels Parallelen geschnitten werden (Syst. Entw. d. Abh. geom. Gest. S. 43).

Beweis von *b*). In Fig. 14. ist durch den Punct a in der Linie A eine Linie A' senkrecht auf den Strahl a in dem ebenen Strahlbüschel, dessen Mittelpunct B ist, gezogen. In dem Strahlbüschel wird es einen Strahl c geben, welcher senkrecht zu der Linie A ist. In dem Schneidungspunct der Linien A und A' ist also der Punct a in Bezug auf die Linie A und der Punct c' in Bezug auf die Linie A' vereinigt. Man ziehe die Linie Ba, so wird, wenn Ba als Strahl des Strahlbüschels b ist, der Punct b in A zwischen c und a liegen, wie in Fig. 13. und die durch b zu dem Strahl b rechtwinklig gezogene bb' wird die Linie A' oberhalb A treffen. Wird nun der Strahl d oberhalb a angenommen, so mufs auch die durch d zu d rechtwinklig gezogene dd' die Gerade A' oberhalb b' treffen.

Aus einfachen geometrischen Betrachtungen ergiebt sich:

$$\text{W. } bb'a = \text{W. } (ab), \qquad \text{W. } b'ba = \text{W. } (cb).$$

Hieraus folgt

$$\frac{ab}{c'b'} = \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)}, \qquad \frac{ad}{c'd'} = \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)},$$

also, wie in dem Beweise von *a*):

$$\frac{ab}{c'b'} : \frac{ad}{c'd'} = \frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd}$$

u. s. f.

Beweis des von Herrn Steiner in seinem Werke „System. Entw. d. Abh. geom. Gest." Anhang S. 303 No. 27. aufgestellten Lehrsatzes.

Lehrsatz. Liegen zwei projectivische ebene Strahlbüschel B und B' beliebig im Raume, und man legt durch irgend einen gegebenen Punct d Ebenen, von welchen jede irgend zwei entsprechenden Strahlen der Strahlbüschel parallel ist, so umhüllen sie eine Kegelfläche D zweiten Grades; oder legt man durch D solche Geraden, von welchen jede zu irgend zwei entsprechenden Strahlen der Strahlbüschel der Richtung nach rechtwinklig ist, so liegen sie in einer Kegelfläche zweiten Grades.

Beweis des ersten Theils des Satzes. M sei die Durchschnittslinie der Ebenen der beiden ebenen Strahlbüschel B und B', deren Strahlen a, b, c, d, e, r u. s. f. und a', b', c', d', e', r' .... heifsen mögen. Es giebt in B einen Strahl d, der parallel M ist und eben so in B' einen Strahl e', der parallel M ist. Die durch D mit d und d' parallel gelegte Ebene (A') ist demnach der Ebene des Strahlbüschels B' parallel, und eben so ist die durch D mit e und e' parallel gelegte Ebene (A) der Ebene des Strahlbüschels B parallel. (A) und (A') werden also von den übrigen durch D respective mit a und a', b und b' u. s. w. parallel gelegten Ebenen in solchen Strahlen α und α', β und β' geschnitten, welche a und a', b und b' parallel sind, woraus erhellt, dafs (A) und (A') in projectivischen ebenen Strahlbüscheln geschnitten werden, welche in einem Raumbüschel D liegen, woraus (nach Syst. Entw. d. Abh. geom. Gest. S. 138 II. links) folgt, dafs die schneidenden Ebenen einen Kegel zweiten Grades umhüllen, dessen Spitze D ist.

Beweis des zweiten Theils des Satzes. Man fälle von D aus das Perpendikel DM auf die Ebene von B und DM' auf die Ebene von B'. Irgend ein Strahl DA, der von D aus im Raume willkürlich gezogen ist, kann betrachtet werden als der Durchschnitt zweier Ebenen DMA und $DM'A$ und eben so ein Strahl DR als der Duchschnitt der beiden Ebenen DMR und $DM'R$. Sämmtliche Strahlen also, die von D aus gezogen werden, können als die Durchschnitte betrachtet werden irgend zweier Ebenen in zwei Ebenenbüscheln, deren Axen DM und DM' sind. Nun sei der Strahl DA senkrecht zu a und a', so wird a senkrecht sein auf der Ebene DMA und a' senkrecht auf der Ebene $DM'A$.

Eben so wird, wenn DR senkrecht zu r und r' ist, r senkrecht sein zu DMR und r' senkrecht zur Ebene $DM'R$. Der Flächenwinkel (DMR, DMA) ergänzt also den Winkel, den die Strahlen r und a im ebenen Strahlbüschel B mit einander bilden, zu zwei Rechten. Eben so ergänzt der Flächenwinkel $(DM'R, DM'A)$ den Winkel, welchen die Strahlen r' und a' im ebenen Strahlbüschel B' mit einander bilden, zu zwei Rechten. Zwei Winkel aber, die sich zu zwei Rechten ergänzen, haben gleiche Sinus. Die Strahlen also, die von D aus senkrecht zu zwei entsprechenden Strahlen der ebenen Strahlbüschel B und B' gerichtet sind, können betrachtet werden als die Durchschnitte je zweier entsprechender Ebenen in zwei projectivischen Ebenenbüscheln, deren Axen DM und DM' sind. Hieraus folgt der zweite Theil des Satzes (Syst. Entw. d. Abh. geom. Gest. S. 138. II. rechts).

Auflösung der Aufgabe 3. im Anhange der ersten Bandes der „Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten etc." von J. Steiner.

Zuerst mag folgender Satz bewiesen werden (Anhang d. System. Entw. d. Abh. etc. S. 312 No. 56.).

„Wenn in jeder von zwei Geraden A, A' die in einer Ebene liegen, drei beliebige Puncte angenommen werden, so lassen sich durch diese, paarweise, 9 Geraden G legen, welche sich, paarweise, in 18 Puncten P schneiden, wovon 6 mal 3 in einer Geraden g liegen und von diesen 6 Geraden gehen 3 und 3 durch einen Punct."

Beweis. Man bezeichne die 3 Puncte auf der Linie A mit den Ziffern 1, 2, 3 und auf der Linie A' mit I, II, III; den Durchschnitt zweier Linien G, etwa I 1 und II 2 mit (I 1. II 2) u. s. f., den Durchschnitt der Linien A und A' mit O; eine Linie, welche zwei Puncte P verbindet mit (I 2. II 1, II 3. III 2) u. s. f. Die Linie (I 1. II 2, O) ist die Polare des Punctes (I 2. II 1) in Bezug auf den Kegelschnitt, welcher die fünf Linien I 1, II 2, III 3, A und A' berührt. In Bezug auf denselben Kegelschnitt ist (I 1. III 3, O) die Polare von (I 3. III 1) und (II 2. III 3, O)

die Polare von (II 3. III 2). Da nun die Linien (I 1. II 2, *O*), (I 1. III 3, *O*), (II 2. III 3, *O*) den Punct *O* mit einander gemein haben, so müssen ihre Pole auf einen und derselben Geraden, der Polaren des Punctes *O* liegen. Diese Gerade werde bezeichnet mit

$$g_{\text{I}}\ (\text{I}\,1)\ (\text{II}\,2)\ (\text{III}\,3):$$

so kann auf ähnliche Art gezeigt werden, dafs die übrigen 15 Puncte *P* auf folgenden 5 Geraden *g* vertheilt sind:

$$g_{\text{II}}\ (\text{I}\,1)\ (\text{II}\,3)\ (\text{III}\,2),$$
$$g_{\text{III}}\ (\text{I}\,3)\ (\text{II}\,2)\ (\text{III}\,1),$$
$$g_{\text{IV}}\ (\text{I}\,2)\ (\text{II}\,1)\ (\text{III}\,3),$$
$$g_{\text{V}}\ (\text{I}\,2)\ (\text{II}\,3)\ (\text{III}\,1),$$
$$g_{\text{VI}}\ (\text{I}\,3)\ (\text{II}\,1)\ (\text{III}\,2).$$

Es liegen also, etwa auf der Linie g_{IV} die 3 Puncte:

$$(\text{I}\,1.\ \text{II}\,2)\quad (\text{I}\,3.\ \text{III}\,2)\quad (\text{II}\,3.\ \text{III}\,1)$$

und die Linie g_{IV} ist die Polare des Punctes *O* in Bezug auf den Kegelschnitt, welcher die 5 Geraden A, *A'*, I 2, II 1, III 3 berührt.

Aus dem bekannten Satze der Situations-Geometrie

„wenn die 3 Seiten eines Dreiecks den Seiten eines andern Dreiecks in 3 Puncten begegnen, die in gerader Linie liegen, so schneiden sich diejenigen geraden Linien, welche die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkelpuncte der beiden Dreiecke verbinden, in demselben Puncte,"

folgt ferner, dafs von den Linien *g* 3 und 3 sich in einem Puncte schneiden, nämlich die Linien $g_{\text{I}}\ g_{\text{V}}\ g_{\text{VI}}$ und die Linien $g_{\text{II}}\ g_{\text{III}}\ g_{\text{IV}}$.

Wenn die 3 Linien I 1, II 2, III 3 sich in einem Puncte *Q* schneiden, so geht bekanntlich (vergl. „die geometr. Constructionen ausgef. mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises von *J. Steiner*" S. 12, V.) die Linie g_{I} durch den Punct *O*. Wir erhalten alsdann folgenden Satz:

„Wenn 5 gerade Linien gegeben sind, von welchen 3 durch einen zweiten gegebenen Punct *Q* und die beiden übrigen durch einen zweiten Punct *O* gehen, so schneiden sich diese geraden Linien aufserdem noch in 6 Puncten. Diese 6 Puncte lassen sich durch 6 neue gerade Linien verbinden, und diese 6 geraden Linien schneiden sich untereinander in 9 neuen Puncten (*p*), die ursprünglichen 5 Linien aber in 6 neuen Puncten (p_{I}). Von den 9 Puncten *p* liegen 3 auf einer durch *O* gehenden Linie (*g*) und die übrigen 6, zu zweien, auf 3 geraden Linien, die durch den Punct *Q* gehen. Die 6 Puncte p_{I} liegen zu 3 auf zwei Linien, deren Durchschnittspunct in der Linie *g* befindlich ist.

Die von Herrn Professor *Steiner* gestellte Aufgabe lautet:

„Wenn in einer Ebene zwei beliebige Geraden A, A' und in jeder irgend 4 harmonische Puncte gegeben sind, so bestimmen die letztern, paarweise genommen, 16 Strahlen S; diese schneiden sich in 12 Puncten P, u. s. w.: welche Eigenschaft haben die Strahlen S in Hinsicht ihrer gegenseitigen Lage, und welche die Puncte P? wie oft liegen von den letztern 3, und wie oft 6 in einer Geraden? u. s. w."

Der Durchschnittspunct der Linien A und A' sei O; die vier harmonischen Puncte auf der Linie A werden bezeichnet mit 1, 2, 3, 4 und die vier harmonischen Puncte auf der Linie A' mit I. II. III. IV. Bezeichnet man nun mit Herrn Prof. *Moebius* (Barycentr. calcul S. 246 §. 183.) das Doppelschnittsverhältnifs

$$\frac{12}{32} : \frac{14}{34} \text{ mit } (1, 3, 2, 4),$$

so leuchtet ein, dafs:

$$(1,3,2,4) = (3,1,4,2) = (2,4,1,3) = (4,2,3,1) = (1,3,4,2)$$
$$= (3,1,2,4) = (4,2,1,3) = (2,4,3,1) = (\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV}) = -1.$$

Da nun (System. Entw. der Abh. geom. Gest. S. 157)

„alle Geraden, welche von irgend 4 festen Geraden harmonisch geschnitten werden, einen bestimmten Kegelschnitt berühren, welcher auch von jenen festen Geraden berührt wird,"

so ergiebt sich, dafs 40 der Puncte P auf folgenden 8 Geraden vertheilt sind:

g_{I}. (I 1) (II 2) (III 3) (IV 4),
g_{II}. (I 3) (II 4) (III 1) (IV 2),
g_{III}. (I 2) (II 1) (III 4) (IV 3),
g_{IV}. (I 4) (II 3) (III 2) (IV 1),
g_{V}. (I 1) (II 4) (III 3) (IV 2),
g_{VI}. (I 3) (II 2) (III 1) (IV 4),
g_{VII}. (I 4) (II 1) (III 2) (IV 3),
g_{VIII}. (I 2) (II 3) (III 4) (IV 1).

Jede dieser 8 Linien ist die Polare des Punctes O in Bezug auf einen von 8 bestimmten Kegelschnitten. So ist die Linie g_{V} die Polare des Punctes O in Bezug auf den Kegelschnitt, welcher die 6 Linien berührt: A, A', I 1, II 4, III 3, IV 2 u. s. f.

Jede der 8 Linien g enthält 6 der Puncte P, von welchen 4 auf keiner der 7 übrigen Linien vorkommen, zwei aber im Durchschnitt mit zweien der 7 übrigen liegen. So hat die Linie g_{I} mit der Linie g_{V} den Punct (I 3. III 1) und mit der Linie g_{VI} den Punct (II 4. IV 2) gemein. Eben so ist der Punct (II 2. IV 4) den beiden Linien g_{II} und g_{V}, der Punct (I 4. III 2) den beiden Linien g_{III} und g_{VIII}, der Punct (II 1. IV 3) den Linien g_{IV} und g_{VIII}, der Punct (II 3. IV 1) den Linien g_{III} und g_{VII}, der Punct (I 1. III 3) den Linien g_{II} und g_{VI} und der Punct (I 2. III 4) den Linien g_{IV} und g_{VII} gemein.

Von den 8 Linien g schneiden sich 4 und 4 in einem Punct, nämlich die Linien g_{III}, g_{IV}, g_{VI}, g_{V} und g_{I}, g_{II}, g_{VII}, g_{VIII}. Dieses folgt aus dem vorhin erwähnten, bekannten Lehrsatze der Situations-Geometrie. Für die 4 Linien g_{I}, g_{II}, g_{VII}, g_{VIII} kann es beispielsweise also bewiesen werden.

Die Linie g_{I} wird bestimmt durch die beiden Puncte:

(I 3. III 1) und (II 4. IV 2).

Die Linie g_{VIII} wird bestimmt durch die beiden Puncte:

(IV 4. III 1) und (I 1. IV 2).

Die Linie g_{VII} wird bestimmt durch die beiden Puncte:

(I 3. IV 4) und (I 1. II 4).

Die Linien (I 3. III 1, IV 4. III 1) und (II 4. IV 2, I 1. IV 2) schneiden sich im Puncte (III 1. IV 2).

Die Linien (II 4. IV 2, II 4. I 1) und (I 3. IV 4, I 3. III 1) schneiden sich im Puncte (II 4. I 3).

Die Linien (I 1. II 4, I 1. IV 2) und (IV 4. III 1, IV 4. I 3) schneiden sich im Puncte (I 1. IV 4).

Denn die Linie (I 3. III 1, IV. 4. III 1) ist keine andre als die Linie III 1 selbst. Da nun aber die drei Puncte (III 1. IV 2), (II 4. I 3), (I 1. IV 4) in einer Geraden, nämlich in der Linie g_{IV} liegen, so müssen die drei Geraden g_{I}, g_{VII} und g_{VIII} sich in einem Punete schneiden.

Die Linie g_{I} wird aber auch bestimmt durch die beiden Puncte:

(I 2. II 1) und (I 4. IV 1).

Die Linie g_{VIII} wird auch bestimmt durch die beiden Puncte

(IV 3. II 1) und (I 4. III 2).

Die Linie g_{II} wird bestimmt durch die beiden Puncte

(I 2. IV 3) und (III 2. IV 1).

Da nun aber auch die drei Puncte (I 4. II 1), (III 2. IV 3), (I 2. IV 1) in einer Linie liegen, nämlich in der Linie g_{v}, so müssen auch die drei Linien: g_{i}, g_{viii}, g_{ii} sich in einem Puncte schneiden, welcher Punct derselbe sein wird wie der Durchschnitt der drei Linien: g_{i}, g_{vii}, g_{viii}.

Unter den 40 Puncten P, welche auf den acht Linien g vertheilt sind, mögen diejenigen 8, welche im Durchschnitt je zweier Linien g liegen, mit P_{i}, diejenigen 32 aber, von denen je 4 einer bestimmten Linie g eigenthümlich zugehören, mit P_{ii} bezeichnet werden. Diejenigen noch übrigen 32 Puncte P aber, von denen keiner sich auf einer Linie g befindet, mögen mit P_{iii} bezeichnet werden.

Von den 8 Puncten 1, 2, 3, 4, I, II, III, IV können auf 16 verschiedene Arten 3 Puncte der Linie A auf 3 Puncte der Linie A' bezogen werden. In jeder Combination erhält man nach dem oben erwähnten Satze des Herrn Prof. *Steiner* 18 der Puncte P in der Art zusammengestellt, dafs sie zu dreien auf sechs Linien liegen. Zwei dieser Linien kommen unter den Linien g vor und eine jede von ihnen enthält einen Punct P_{i} und 2 Puncte P_{ii}. Jede der vier andern Linien (γ) enthält 2 Puncte P_{iii} und einen Punct P_{ii}. So giebt die Combination (I II IV 3 4 2) folgende sechs Linien:

a. (I 3) (II 4) (IV 2),
b. (I 3) (II 2) (IV 4),
c. (I 2) (II 4) (IV 3),
d. (I 4) (II 3) (IV 2),
e. (I 4) (II 2) (IV 3),
f. (I 2) (II 3) (IV 4).

Die Linie a ist offenbar die Linie g_{ii} und die Linie b ist die Linie g_{vi}. Die drei Linien a, e, f schneiden sich in einem Puncte und eben so schneiden sich die drei Linien b, c, d in einem Puncte. Wir erhalten demnach 64 Linien (γ), von denen eine jede einen Punct P_{ii} und 2 Puncte P_{iii} enthält. Jeder Punct P_{ii} ist der Durchschnitt von zwei Linien (γ). So ist der Punct (I 3. II 2) der Durchschnitt der beiden Linien

(I 2) (II 3) (III 1) und
(I 2) (II 3) (IV 4).

In jedem Punct P_{iii} schneiden sich aber vier Linien (γ). So schneiden sich im Puncte (II 2. III 4) die vier Linien:

(I 1) (II 4) (III 2),
(I 3) (II 4) (III 2),
(IV 1) (II 4) (III 2),
(IV 3) (II 4) (III 2).

Auf jeder Linie g schneiden sich 4 Paar Linien (γ). So schneiden sich auf der Linie g_{VI}

1. aus der Combination (I II IV 3 2 4) die beiden Linien
(II 4) (I 2) (IV 3) und
(IV 2) (I 4) (II 3);
2. aus der Combination (I II III 3 2 1) die beiden Linien
(I 2) (II 1) (III 3) und
(I 1) (II 3) (III 2);
3. aus der Combination (I III IV 3 1 4) die beiden Linien
(I 1) (III 4) (IV 3) und
(I 4) (III 3) (IV 1);
4. aus der Combination (II III IV 2 1 4) die beiden Linien
(II 1) (III 4) (IV 2) und
(II 4) (III 2) (IV 1).

Diese vier Puncte auf der Linie g_{VI}, denen auf jeder der sieben übrigen Linien g vier ähnliche entsprechen, mögen Π_I, so wie die beiden Puncte, in denen sich die Linien g zu vieren schneiden, Π genannt werden.

Jede Linie g schneidet sich in einem Punct Π mit drei andern Linien g, in einem Punct P_I mit einer vierten und in dem zweiten Punct P_I mit einer fünften neuen Linie g; in den 4 Puncten P_{II} mit 4 Paar Linien (γ) und in den 4 Puncten Π_I mit 4 Paar neuen Linien (γ).

Jede Linie γ schneidet sich in einem Puncte Π_I mit einer Linie g und einer andern Linie γ; in jedem zweier Puncte P_{III} mit drei neuen Linien γ und in einem Punct P_{II} mit einer neuen Linie γ und einer neuen Linie g.

Diese Entwicklungen, zusammengefafst, geben folgenden Satz.

Lehrsatz 1. Wenn in einer Ebene zwei beliebige Gerade A, A_I und in jeder vier harmonische Puncte gegeben sind, so bestimmen die letztern, paarweise genommen, 16 Strahlen S; diese schneiden sich in 72 Puncten P. Diese 72 Puncte P lassen sich in drei Gruppen theilen. In der ersten Gruppe kommen 8 Puncte (P_I), in der zweiten 32 Puncte (P_{II}) und in der dritten 32 Puncte (P_{III}) vor. Die Lage der Puncte (P_I), (P_{II}), (P_{III}) gegen einander ist folgende. Die 8 Puncte (P_I) und die 32 Puncte (P_{II})

liegen zusammen auf acht geraden Linien (g) dergestalt, dafs jeder Punct (P_{I}) zweien Linien (g) gemeinschaftlich ist, jede Linie (g) aber 4 Puncte (P_{II}) eigenthümlich hat. Die acht Linien (g) schneiden sich zu vieren in 2 Puncten (Π). Die 32 Puncte P_{III} liegen zu zweien auf 64 Linien (γ), welche zu zweien sich in einem Puncte (P_{IV}) schneiden. Die 64 Linien (γ) schneiden sich überdies noch zu zweien in 32 neuen Puncten (Π_{I}), welche zu vieren auf den acht Linien (g) enthalten sind.

Wenn die Linien I 1, II 2, III 3, IV 4 sich in einem Puncte schneiden, so erhalten wir folgenden Satz.

Lehrsatz 2. In einer Ebene sind sechs gerade Linien gegeben, wovon zwei sich in einem Punct O und die vier übrigen, welche vier harmonische Strahlen sind, in einem zweiten gegebenen Puncte Q schneiden. Die sechs Linien schneiden sich aufserdem noch in 8 neuen Puncten, durch welche zwölf neue Linien (S) gelegt werden können. Die zwölf Linien (S) schneiden sich unter einander in 42 neuen Puncten (P) und die vier Harmonicalen in 24 neuen Puncten (Π). Von den 42 Puncten (P) liegen 6 auf einer durch O gehenden Linie (γ), 20 liegen zu vieren auf 5 durch Q gehenden Linien (g) und 16 zu zweien auf 8 ebenfalls durch Q gehenden Linien (G). Diese 16 Puncte mögen zum Unterschiede mit (p) bezeichnet werden.

Unter den fünf Linien (g) giebt es zwei Linien g_{V} und g_{VI}, von denen eine jede einen der Puncte P mit der Linie (γ) gemein hat; ferner zwei Linien g_{III} und g_{IV}, von denen eine jede zwei bestimmte Puncte P enthält, welche so zu einander liegen, dafs, wenn man sie durch zwei neue Linien γ_{I} und γ_{II} verbindet, diese beiden Linien sich auf der Linie (γ) schneiden, und zwar in demselben Puncte, in welchem die fünfte der Linien (g), die Linie g_{II}, die Linie (γ) schneidet. Dieser Punct möge mit (L) bezeichnet werden. Jede der beiden Linien γ_{I} und γ_{II} enthält aufserdem noch vier Puncte aus der Reihe der 24 Puncte (Π). Diese acht auf den Linien γ_{I} und γ_{II} enthaltenen Puncte (Π) mögen zum Unterschiede mit Π_{I} und die noch übrigen 16 Puncte (Π) mit Π_{II} bezeichnet werden.

Die 16 Puncte Π_{II} liegen zu zweien auf acht geraden Linien (K), welche sich zu zweien in 4 auf der Linie (γ) liegenden neuen Puncten (α) schneiden. Jede der Linien (K) enthält aufser zweien Puncten Π_{II} noch einen bestimmten Punct Π_{I}, und zwar, wenn zwei Linien (K) sich in einem Puncte (α) schneiden, so gehört der auf der einen liegende Punct Π_{I}

der Linie γ_{I}, der auf der andern liegende der Linie γ_{II} an. Jede der drei Linien (g_{II}), (g_{V}), (g_{VI}) enthält 4 solcher Puncte P, welche auf keiner der Linien (γ), (γ_{I}), (γ_{II}) wieder vorkommen. Eben so hat jede der beiden Linien (g_{III}) und (g_{IV}) zwei solche eigenthümlichen Puncte P. Aehnlicherweise enthält die Linie (γ) vier solcher Puncte P, welche auf keiner der Linien (g) wiederkehren. Diese 20 Puncte (P), von denen keiner einer Linie (g) und (γ) gemeinschaftlich ist, mögen mit (P_{I}) bezeichnet werden.

Die 16 Puncte Π_{II} liegen zu zweien auf acht Geraden K_{II}, welche sich zu zweien in den 4 Puncten P_{I} der Linie g_{II} treffen.

Die 16 Puncte (p) liegen zu zweien auf acht solchen Linien $(\mathfrak{K})$, welche sich paarweise in den 4 Puncten P_{I} der Linie (γ) treffen.

Die 16 Puncte Π_{II} liegen aber auch zu zweien auf solchen acht Geraden K_{III} und K_{IV}, von denen vier (K_{III}) sich zu zweien in den 2 Puncten P_{II} der Linie g_{III} und die 4 andern (K_{IV}) zu zweien in den zwei Puncten P_{I} der Linie g_{IV} treffen. Aehnlicherweise liegen die 16 Puncte p zu zweien auf acht solchen Linien (K_1) und (K_2), dafs eine jede der vier Linien (K_1) durch einen der 4 Puncte Π_{I} auf der Linie γ_{I} und jede der vier Linien (K_2) durch einen der vier Puncte Π_{I} auf der Linie γ_{II} geht.

Die 16 Puncte p lassen sich mit den 16 Puncten Π_{II} paarweise zu sechszehn solchen Linien K_{V} und K_{VI} zusammenstellen, dafs die acht Linien K_{V} sich paarweise in den 4 Puncten P_{I} der Linie g_{V}, die acht Linien K_{VI} aber sich paarweise in den 4 Puncten P_{II} der Linie g_{VI} schneiden. Jede Linie K_{V} enthält also einen Punct (p), einen Punct (Π_{II}) und einen der 4 Puncte P_{I} auf der Linie g_{V}. Eben so enthält jede Linie (K_{V}) einen Punct (p), einen Punct (Π_{II}) und einen der 4 Puncte P_{II} auf der Linie K_{VI}.

Unter den Durchschnittspuncten der Linien $(\mathfrak{K})$ mit den Linien (K_{II}) giebt es 8 Puncte (α_1) und (α_2), von denen vier (α_1) auf der Linie γ_{I} und die vier andern (α_2) auf der Linie γ_{II} liegen, so dafs jeder der Puncte (α_1) im Durchschnitt der Linie γ_{I} mit einer der Linien $(\mathfrak{K})$ und einer der Linien (K_{II}) sich befindet, u. s. f.

Unter den Durchschnittspuncten der Linien K_{III} mit den Linien K_{IV} giebt es vier Puncte (α_{V}) und (α_{VI}), von denen zwei: (α_{V}) auf der Linie g_{V} und die beiden andern: (α_{VI}) auf der Linie g_{VI} liegen.

Unter den Durchschnittspuncten der Linien K_1 mit den Linien K_2 giebt es vier Puncte (α_{II}), welche auf der Linie g_{II} liegen.

Unter den Durchschnittspuncten der Linien K_V mit den Linien K_{VI} giebt es 8 Puncte (α_{III}) und (α_{IV}), von denen vier (α_{III}) auf der Linie g_{III} und die vier andern (α_{IV}) auf der Linie g_{IV} liegen.

Die Form des Lehrsatzes 2. mit der Form des Lehrsatzes 1. zu vereinigen, mögen folgende Bemerkungen dienen:

Die Linien (g_I), (g_{VII}), (g_{VIII}) des ersten Lehrsatzes entsprechen die Linien (γ), (γ_I), (γ_{II}) des zweiten Lehrsatzes.

Die 32 Puncte P_{III} des ersten Lehrsatzes sind im zweiten Lehrsatze in zwei Gruppen getrennt, wovon die eine die 16 Puncte P, die andere die 16 Puncte Π_{II} enthält.

Der Punct Q des zweiten Lehrsatzes vereinigt 4 Puncte P_{II} des ersten. Die andern 28 Puncte P_{II} des ersten Lehrsatzes sind enthalten in den 20 Puncten P_I und den 8 Puncten Π_I.

Der Punct Q des zweiten Lehrsatzes vereinigt in sich auch 4 Puncte Π_I des Lehrsatzes 1.

Die übrigen 28 Puncte Π_I des Lehrsatzes 1. sind folgende 28 Puncte im zweiten Lehrsatze:

4	Puncte	α	auf	der	Linie	γ,
4	- -	α_1	-	-	-	γ_I,
4	- -	α_2	-	-	-	γ_{II},
4	- -	α_{II}	-	-	-	g_{II},
4	- -	α_{III}	-	-	-	g_{III},
4	- -	α_{IV}	-	-	-	g_{IV},
2	- -	α_V	-	-	-	g_V,
2	- -	α_{VI}	-	-	-	g_{VI}.

Von den beiden Puncten II des ersten Lehrsatzes wird im zweiten der eine im Punct Q, der andere im Punct L wiedergefunden.

Da für jeden Werth des Doppelschnittsverhältnisses $(1, 3, 2, 4) = (3, 1, 4, 2) = (2, 4, 1, 3) = (4, 2, 3, 1)$ bleibt, so ergeben sich, wenn $(1, 3, 2, 4)$ irgend einen andern Werth als -1 bekommt, aber noch $(1, 3, 2, 4) = (I, III, II, IV)$ behalten wird (nach Syst. Entw. d. Abh. u. s. w. S. 156), statt der Lehrsätze 1. und 2. folgende beiden:

Lehrsatz 3. Wenn in einer Ebene zwei Gerade A und A_1 und in jeder Geraden 4 Puncte, in der einen die Puncte 1, 2, 3, 4, in der an-

dern die Puncte I, II, III, IV in solcher gegenseitigen Lage angenommen werden, dafs die Doppelschnittsverhältnisse (1, 3, 2, 4) und (I, III, II, IV) gleich sind, so bestimmen die Puncte 1, 2, 3, 4 mit den Puncten I, II, III, IV 16 Strahlen S, welche sich in 72 Puncten p schneiden. Von diesen 72 Puncten p liegen 24 Puncte (p_{I}) zu sechsen auf 4 Geraden (G), die übrigen 48: (p_{II}) liegen zu zweien auf 48 Geraden ($\mathfrak{G}$), welche sich paarweise in den 24 Puncten p_{I} schneiden. Jeder Punct p_{II} liegt demnach im Durchschnitt zweier Geraden ($\mathfrak{G}$). Diese 48 Geraden ($\mathfrak{G}$) schneiden sich aufserdem zu dreien in 16 neuen Puncten (II). Die 48 Puncte p_{II} liegen aber auch zu dreien auf 32 Linien ($\mathfrak{G}_1$), so dafs jeder Punct p_{II} ebenfalls im Durchschnitt zweier Linien ($\mathfrak{G}_1$) sich befindet. Auf jeder Linie (G) schneiden sich 4 Paar Linien ($\mathfrak{G}_1$) in 4 neuen Puncten (II_1). Jeder Punct p_{I} ist also im Durchschnitt einer Linie (G) und zweier Linien ($\mathfrak{G}$); jeder Punct p_{II} im Durchschnitt zweier Linien ($\mathfrak{G}$) mit zweien Linien ($\mathfrak{G}_1$); jeder Punct II im Durchschnitt dreier Linien ($\mathfrak{G}$); jeder Punct II_1 im Durchschnitt einer Linie G und zweier Linien ($\mathfrak{G}_1$).

Lehrsatz 4. Wenn in einer Ebene 6 Linien gegeben sind, von denen 4 durch einen gegebenen Punct O und die beiden andern A und A_1 durch einen zweiten gegebenen Punct O gehen, so schneiden sich diese sechs Linien aufserdem noch in 8 neuen Puncten, von denen 4, welche durch die Ziffern 1, 2, 3, 4 unterschieden werden mögen, auf der Linie A und die vier andern, welche durch die Ziffern I, II, III, IV bezeichnet werden mögen, auf der Linie A_1 sich befinden. Diese 8 neuen Puncte lassen sich paarweise zu 12 neuen Linien S verbinden. Die zwölf Linien S schneiden sich untereinander in 42 neuen Puncten P und die vier durch O gehenden Linien in 24 neuen Puncten II.

Unter den 48 Puncten P liegen 6 Puncte: ($\mathfrak{p}$) auf einer durch O gehenden Geraden (γ), 12 Puncte ($\mathfrak{P}$) liegen zu vieren auf drei durch O gehenden Linien (g). Die noch übrigen 24 Puncte P mögen in zwei Gruppen vertheilt werden, wovon in der einen 8 Puncte (P^{I}), in der andern 16 Puncte (P_{II}) vorkommen. Die 8 Puncte P_{I} sind:

(III 2. IV 3) (III 4. II 3),
(II 3. I 2) (II 1. III 2),
(I 2. IV 1) (I 4. II 1),
(IV 1. III 4) (IV 3. I 4),

Die 16 Puncte P_{II} sind folgende:

(I 2. III 1) (I 3. II 1),
(I 3. IV 1) (I 4. III 1),
(II 1. IV 2) (II 4. I 2),
(II 3. IV 2) (II 4. III 2),
(III 1. II 3) (III 2. I 3),
(III 1. IV 3) (III 4. I 3),
(IV 1. II 4) (IV 2. I 4),
(IV 2. III 4) (IV 3. II 4).

Die 8 Puncte P_{I} liegen zu zweien auf 4 durch Q gehenden Linien (G_{I}) und die 16 Puncte P_{II} liegen zu zweien auf 8 durch Q gehenden Linien (G_{II}), und zwar liegen sowohl die Puncte P_{I} als auch die Puncte P_{II} in der Art paarweise auf den Linien G_{I} und G_{II} wie sie in der obigen Zusammenstellung gruppirt sind.

Die 24 Puncte II mögen ebenfalls in zwei Gruppen vertheilt werden, wovon in der einen 8 Puncte (II_1), in der andern 16 Puncte (II_2) vorkommen. Die 8 Puncte II_1 sind:

(I 1. II 4),
(I 1. IV 2),
(II 2. I 3),
(II 2. III 1),
(III 3. II 4),
(III 3. IV 2),
(IV 4. I 3),
(IV 4. III 1).

Die 6 Puncte (p) mögen endlich ebenfalls in zwei Gruppen vertheilt werden, so dafs in der einen zwei Puncte (p_1), in der andern vier Puncte (p_2) vorkommen. Die beiden Puncte (p_1) sind:

(I 3. III 1),
(II 4. IV 2).

Die 4 Puncte (p_2) sind:

(I 2. II 1),
(I 4. IV 1),
(II 3. III 2),
(III 4. IV 3).

Die 8 Puncte P_{I} liegen zu zweien auf vier Geraden K_{I}, welche sich paarweise in den beiden Puncten p_1 schneiden.

Die 16 Puncte P_{II} liegen zu zweien auf 8 Geraden K_{II}, welche sich paarweise in den 4 Puncten $\mathfrak{P}_2$ schneiden.

Die 16 Puncte H_2 liegen zu zweien auf 8 Geraden $\mathfrak{K}_1$, welche sich paarweise in den 4 Puncten P einer der drei Linien (g) schneiden. Diese eine Linie möge zum Unterschiede mit (g_1) bezeichnet werden und die beiden andern (g) mögen durch die Symbole g_2 und g_3 unterschieden werden. Auf der Linie g_2 liegen folgende 4 Puncte $(\mathfrak{P})$:

(I 4. III 2),
(II 3. IV 1),
(I 3. IV 2),
(II 4. III 1).

Unter diesen vier Puncten mögen die beiden ersten mit $(\mathfrak{P}_1)$, die beiden andern mit $(\mathfrak{P}_2)$ bezeichnet werden. Aehnlicherweise mögen auf der Linie g_3 unter den 4 Puncten $(\mathfrak{P})$ die beiden Puncte (I 3. II 4) und (III 1. IV 2) mit $(\mathfrak{P}_2)$ und die beiden andern (I 2. III 4) und (II 1. IV 3) mit $(\mathfrak{P}_1)$ bezeichnet werden.

Die 16 Puncte H_2 liegen zu zweien auf 8 Geraden $(\mathfrak{k}_2)$, welche sich paarweise so zusammenstellen lassen, dafs sich zwei Paare in den beiden Puncten $(\mathfrak{P}_2)$ der Linie g_2 und die beiden andern Paare in den beiden Puncten $(\mathfrak{P}_2)$ der Linie g_3 schneiden. Die vier ersten Linien $\mathfrak{k}_2$ mögen zum Unterschiede mit $(\mathfrak{k}_{2,2})$, die vier andern mit $(\mathfrak{k}_{2,3})$ bezeichnet werden.

Die 8 Puncte H_1 liegen zu zweien auf 8 Geraden $\mathfrak{k}_1$, von denen zwei Paare sich in den beiden Puncten $\mathfrak{P}_1$ der Linie g_2 und die beiden andern Paare in den beiden Puncten $\mathfrak{P}_1$ der Linie g_3 schneiden, so dafs jeder Punct H_1 im Durchschnitt zweier Linien $\mathfrak{k}_1$ liegt.

Unter den Durchschnittspuncten der 8 Linien $\mathfrak{K}_1$ mit den 8 Linien $\mathfrak{k}_2$ giebt es 8 neue Puncte M_{II}, welche zu gleicher Zeit auf den 8 Linien K_{II} liegen, so dafs jede Linie K_{II} den Durchschnitt einer Linie $\mathfrak{K}_1$ mit einer Linie $\mathfrak{k}_1$ enthält.

Unter den Durchschnittspuncten der Linien $\mathfrak{k}_{2,2}$ mit den Linien $\mathfrak{k}_{2,3}$ giebt es vier neue Puncte M_I, welche zu gleicher Zeit auf den Linien K_{II} liegen, so dafs jede Linie K_I den Durchschnittspunct einer Linie $\mathfrak{k}_{2,2}$ mit einer Linie $\mathfrak{k}_{2,3}$ enthält.

Die 16 Puncte H_2 liegen zu zweien auf 8 Geraden (ϱ), welche durch die 8 Puncte H_1 gehen, so dafs jede Gerade (ϱ) einen Punct H_1 und zwei

Puncte Π_2 enthält. Die 8 Geraden ϱ schneiden sich zu zweien in 4 neuen Puncten α der Linie (γ).

Die 16 Puncte P_{II} liegen zu zweien auf 8 Geraden R, welche durch die 8 Puncte Π_1 gehen, so dafs jede Gerade R einen Punct Π_1 und zwei Puncte P_{II} enthält. Die 8 Geraden R schneiden sich zu zweien in 4 neuen Puncten a_1 der Linie g_1.

Jeder Punct Π_2 läfst sich mit einem bestimmten Puncte P_{II} durch eine Gerade (r) verbinden, welche durch einen der Puncte P_I geht. Die 16 Geraden (r) schneiden sich paarweise in 8 neuen Puncten a_2 und a_3, wovon 4 Puncte (a_2) auf der Linie g_2 und die vier andern a_3 auf der Linie g_3 liegen.

Die Form des Lehrsatzes 4. mit der Form desjenigen 3. zu vereinigen, mögen folgende Bemerkungen dienen:

In dem Puncte Q sind 6 Puncte p_x des Lehrsatzes 3. vereinigt; die noch übrigen 18 Puncte p_x sind enthalten in den 12 Puncten $(\mathfrak{P})$ und den 6 Puncten $(\mathfrak{p})$.

Die 48 Puncte p_{II} des 3ten Lehrsatzes sind nach dem 4ten Lehrsatze enthalten in den 24 Puncten P und den 24 Puncten Π.

Die 4 Geraden G des 3ten Lehrsatzes sind nach dem 4ten enthalten in den 3 Geraden g und der Geraden (γ).

Die 48 Geraden $(\mathfrak{G})$ des 3ten Lehrsatzes sind nach dem 4ten enthalten in den 8 Linien $(\mathfrak{K}_1)$, den 8 Linien $(\mathfrak{k}_1)$, den 8 Linien $(\mathfrak{k}_2)$, den 8 Linien (K_{II}), den 4 Linien (K_I) und den 12 Linien (G).

Der Punct Q des 4ten Lehrsatzes vereinigt in sich 4 Puncte Π des 3ten Lehrsatzes. Die 12 übrigen Puncte Π des dritten Lehrsatzes sind enthalten in den 8 Puncten M_{II} und den 4 Puncten M_I.

Die 32 Linien $(\mathfrak{G}_r)$ des 3ten Lehrsatzes sind nach dem 4ten enthalten in den 8 Geraden (ϱ), den 8 Geraden (R) und den 16 Geraden (r).

Die 16 Puncte Π_1 des 3ten Lehrsatzes sind nach dem 4ten enthalten in den 4 Puncten α und den 12 Puncten a.

Einen Theil des 3ten Lehrsatzes hat bereits Hr. Professor *Plücker* (gegenw. Journal Bd. 9. S. 411) ausgesprochen durch Folgendes:

„Wenn irgend ein Kegelschnitt und ein um denselben beschriebenes Sechseck gegeben sind, so werden irgend zwei Seiten dieses Sechsecks von den vier übrigen in 8 Puncten geschnitten. Die 8 Puncte lassen sich durch 12 neue gerade Linien mit einander verbinden. Diese 12

neue gerade Linien schneiden sich in 42 neuen Puncten. Von diesen 42 Puncten liegen 6, nach einem allbekannten Satze, auf einer durch den Durchschnitt jener beiden Seiten gehenden geraden Linie; 12 liegen zu vieren auf drei geraden Linien; 24 liegen, paarweise, auf solchen 12 geraden Linien, welche zu dreien in den vier Berührungspuncten auf den vier übrigen Sechsecks-Seiten sich schneiden."

In dem so ausgesprochenen Lehrsatze ist Folgendes zu ändern, nämlich:

1. „Von den 42 Puncten liegen 6 auf einer durch den Durchschnitt jener beiden Seiten gehenden geraden Linie." Diese gerade Linie (die Linie (γ) des dritten Lehrsatzes) ist die Polare des „Durchschnitts jener beiden Seiten," in Bezug auf den gegebnen Kegelschnitt und kann nicht durch ihren eignen Pol gehn.

2. „24 Puncte liegen paarweise auf solchen 12 geraden Linien u. s. w." Diese 12 geraden Linien gehören zu den 48 Linien ($\mathfrak{G}$) des 3ten Lehrsatzes; es ist aber nicht möglich, dafs einer der Puncte *II* auf einer der Linien I 1, II 2, III 3, IV 4 liege.

Einen Theil des 4ten Lehrsatzes hat Herr Professor *Plücker* (gegenw. Journal Bd. 11. S. 26) ausgesprochen durch Folgendes:

„Wenn 6 gerade Linien gegeben sind, von welchen 4 durch einen gegebenen Punct P und die beiden übrigen durch einen zweiten gegebenen Punct Q gehen, so schneiden sich diese geraden Linien aufserdem noch in 8 Puncten. Diese 8 Puncte lassen sich durch 12 neue gerade Linien verbinden und diese 12 gerade Linien schneiden sich in 42 neuen Puncten. Von diesen 42 Puncten liegen 6 auf einer und derselben geraden Linie, die durch den Punct Q geht; 12 dieser Puncte liegen zu vieren auf 3 und 20 zu zweien auf 12 geraden Linien, die alle durch den Punct P gehen."

Beweis der von Herrn Professor Steiner No. 24. und 25. im III. Bande S. 212 dieses Journals aufgestellten Lehrsätze.

Lehrsatz 24. Schneidet man die drei Diagonalen *AB, CD, EF* eines gegebenen vollständigen Vierecks, gebildet durch die vier Geraden *AE, AF, ED, CF* (Band III. Taf. II. Fig. 10.), mit irgend einer Geraden *a c e* (oder *b d f*) in den Puncten *a, c, e* (oder *b, d, f*), und bestimmt

hierauf in jeder Diagonale den entsprechenden harmonischen Punct b, d, f (oder a, c, e) d. h. so, dafs z. B. $Aa : aB = Ab : Bb$, so liegen diese drei neuen Puncte allemal in irgend einer Geraden bdf (oder ace); und ferner: dreht sich die schneidende Gerade ace um irgend einen Punct P, so bewegt sich die zugehörige (harmonische) Gerade bdf so, dafs sie beständig irgend einen bestimmten Kegelschnitt berührt, der zugleich von den drei Diagonalen AB, CD, EF berührt wird; und auch umgekehrt.

Beweis. (Siehe Band III. Taf. II. Fig. 10.) Der Punct b sei der zugeordnete harmonische Punct zu a in Bezug auf A und B; eben so d der zugeordnete harmonische Punct zu c in Bezug auf C und D. Die Linie bd schneide die Diagonale EF im Puncte f. Es soll nun bewiesen werden, dafs f der dem e zugeordnete harmonische Punct in Bezug auf E und F ist. Die Linie ace treffe die Linie bfd im Puncte M; man ziehe die 6 Strahlen ME, MC, MB, MA, MD, MF; so bilden diese bekanntlich eine Involution von 6 Geraden. Herr Prof. *Plücker* (Analyt. geometr. Entwicklungen Thl. 2. S. 185) giebt folgende Erklärung:

„Drei Paare von geraden Linien, von denen jedes Paar mit zwei gegebenen geraden Linien vier Harmonicalen bildet, bilden unter sich eine Involution von sechs geraden Linien."

Da nun MA und MB ein zugeordnetes Paar harmonischer Strahlen zu Ma und Mb und eben so MC und MD ein Paar zugeordneter harmonischer Strahlen zu Ma und Mb ist, so mufs auch ME und MF ein Paar zugeordneter harmonischer Strahlen zu Ma und Mb sein.

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, denke man sich die Puncte, in denen die Gerade $Peca$ in ihren verschiedenen Lagen die drei Diagonalen trifft, unterschieden durch (e', c', a'), (e'', c'', a'') ...., so dafs die Puncte e, e', e'' .... *einer* Diagonale angehören. Da bewiesen ist, dafs die Puncte b, f, d in einer Geraden liegen, und eben so die Puncte b', f', d' in einer neuen Geraden, und da offenbar (System. Entw. d. Abhäng. S. 38) die Geraden EF, CD, BA in den Puncten e, e', e'' ...., c, c', c'' ...., a, a', a'' .... projectivisch geschnitten werden, so braucht nur bewiesen zu werden, dafs die beiden Reihen von Puncten E, e, e', e'' .... und F, f, f', f'' .... als die entsprechenden Puncte zweier projectivischen, ungleichliegenden Geraden zu betrachten sind, welche dergestalt auf einander gelegt sind, dafs in E und F zwei Paare entsprechende Puncte vereinigt gedacht werden. Man bezeichne mit m

die Mitte zwischen E und F, so kann m betrachtet werden als derjenige Punct der Geraden, deren Puncte $E, e, e', e'' \ldots$ sind, welcher dem unendlich entfernten Puncte der Geraden, deren Puncte $F, f, f', f'' \ldots$ sind, in der projectivischen Beziehung der beiden Geraden zu einander entspricht. Aehnlicherweise kann m betrachtet werden als derjenige Punct der Geraden $(F, f, f', f'' \ldots)$, welcher dem unendlich entfernten Puncte der Geraden $(E, e, e', e'' \ldots)$ entspricht. Nun ist klar, dafs $(mF)^2 = (mE)^2 = me.mf = me'.mf' = me''.mf'' \ldots$ w. z. b. w.

Lehrsatz 25. Ein vollständiges Viereck von vier Puncten A, B, C, D (Fig. 11.) hat drei Paare gegenüber liegende Seiten (oder Diagonalen) AB und CD, AC und DB, AD und CB, die einander respective in den Puncten a, b, c schneiden. Zieht man aus irgend einem Puncte p nach jenen Puncten a, b, c die Geraden pa, pb, pc und bestimmt hierauf bei jedem Puncte (a, b, c) die entsprechende vierte harmonische Gerade aq, bq, cq, d. h. eine solche Gerade, dafs die durch denselben Punct gehenden vier Geraden (z. B. aA, ap, aD, aq) ein harmonisches System bilden (d. h. dafs sie jede Gerade, welche sie schneiden, harmonisch theilen): so treffen diese drei Geraden aq, bq, cq einander allemal in irgend einem Puncte q; und ferner: bewegt sich der Punct p in irgend einer Geraden, so beschreibt der Punct q irgend einen Kegelschnitt, der allemal durch die drei Puncte a, b, c geht; und auch umgekehrt.

Beweis. (Siehe Band III. Taf. II. Fig. 11.) Aehnlicherweise wie beim 24sten Lehrsatze kann bewiesen werden, dafs, wenn cq der dem cp zugeordnete harmonische Strahl in Bezug auf cB und cA, und bq der dem bp zugeordnete harmonische Strahl in Bezug auf bC und bD ist und man durch p und q eine Gerade (M) legt, dafs dann diese Gerade (M) (welche die 6 Geraden cB, cA, bC, bD, aA, aD in 6 solchen Puncten schneidet, welche eine Involution von 6 Puncten bilden) von den Strahlen aA und aD in zwei Puncten geschnitten wird, welche zwei zugeordnete harmonische Puncte zu den Puncten p und q sind.

Ebenfalls auf ähnliche Art wie zu Lehrsatz 24. kann gezeigt werden, dafs, wenn p auf einer Geraden fortrückt und in seinen verschiedenen Positionen mit $p', p'' \ldots$ und der dem p entsprechende Punct q mit $q', q'' \ldots$ bezeichnet wird, die beiden Gruppen von Strahlen aA, ap, ap', $ap'' \ldots$ und aD, aq, aq', $aq'' \ldots$ als die entsprechenden Strahlen zweier projectivisch ungleichliegender Strahlbüschel betrachtet werden kön-

nen, welche dergestalt auf einander gelegt sind, dafs in den Strahlen aA und aD zwei Paar entsprechende Strahlen zusammenfallen.

Anmerkung. Die Punctenpaare e und f, e' und f', e'' und f'' seien drei Paare zugeordneter harmonischer Puncte zu zwei gegebenen Puncten E und F, so ist

$$\frac{1}{Ee}+\frac{1}{Ef}=\frac{1}{Ee'}+\frac{1}{Ef'}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{ee'}{ff'}=\frac{Ee.Ee'}{Ef.Ef'}, \qquad \frac{ef'}{e'f}=\frac{Ee.Ef'}{Ee'.Ef}.$$

Aehnlicherweise ergiebt sich:

$$\frac{ee''}{ff''}=\frac{Ee.Ee''}{Ef.Ef''}, \quad \frac{ef''}{e''f}=\frac{Ee.Ef''}{Ee''.Ef}, \quad \frac{e'e''}{f'f''}=\frac{Ee'.Ee''}{Ef'.Ef''}, \quad \frac{e'f''}{e''f'}=\frac{Ee'.Ef''}{Ee''.Ef'}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich die Uebereinstimmung der Erklärung des Herrn Professor *Plücker* (Analyt. geom. Entw. Thl. 2. S. 185) mit der gewöhnlichen Definition einer Involution von 6 Puncten.

Insbesondere beweisen diese Gleichungen die Richtigkeit der von Herrn *Chasles* (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie p. 318*) gegebenen Erklärung:

„*Six points, qui sont conjugués deux à deux, sont en involution, quand quatre d'entre eux ont leur rapport enharmonique égal à celui de leurs conjugués.*"

Ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten A und A', B und B' sind, sei in einen Kegelschnitt eingeschrieben. Irgend eine Transversale, welche den Kegelschnitt in den Puncten c und c' trifft, treffe die Seiten des Vierecks in den Puncten a und a', b und b' (d. h. die Seite A im Puncte a u. s. f.). Denkt man sich (nach System. Entw. d. Abh. etc. S. 139) den Kegelschnitt durch zwei projectivische ebene Strahlbüschel, deren Mittelpuncte im Durchschnitt von A und B' und von A' und B sind, erzeugt, so folgt

$$\frac{ac}{b'c}:\frac{ac'}{b'c'}=\frac{bc}{a'c}:\frac{bc'}{a'c'}.$$

Auf diesem Wege wird, gemäfs der Erklärung des Herrn *Chasles*, mit Hülfe projectivischer Eigenschaften der bekannte Satz von *Desargues* bewiesen: (*Poncelet Traité etc. p. 95*)

„*Un quadrilatère étant inscrit à une section conique quelconque, toute transversale détermine, par ses intersections avec la courbe et les côtés du quadrilatère, six points qui sont en involution.*"

11.

Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen nebst einigen Anwendungen derselben.

(Von Herrn *Theodor Schönemann* zu Berlin.)

§. 1.

Lehnsatz. Bezeichnet a irgend eine ganze Zahl, und b_0, b_1, b_2, ... b_{a-1} die kleinsten Reste, welche die Zahlen $0b$, $1b$, $2b$, ... $(a-1)b$ durch a getheilt lassen, so werden diese alle von einander verschieden sein, wenn b keinen gemeinschaftlichen Theiler mit a hat; denn wären irgend zwei jener Zahlen, deren Indices ν und μ sein mögen, gleich, also $b_\nu = b_\mu$, so müfste $\nu b - \mu b = b(\nu - \mu)$ durch a aufgehen, welches offenbar nicht möglich ist, da b zu a relative Primzahl ist, und $\nu - \mu$ kleiner als a ist und nicht 0 sein kann, da ν von μ verschieden ist. Da also sämmtliche Reste b_0, b_1, b_2, ... b_{a-1} von einander verschieden sind, und es nur die a verschiedenen Reste 0, 1, 2, ... $a-1$ giebt, so folgt, dafs jene Zahlen mit diesen, wenn auch in anderer Ordnung übereinstimmen werden. Hätte nun aber b mit a einen gemeinschaftlichen Theiler, und bezeichnet man den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler beider Zahlen durch δ, so werden die Reste der Zahlen $0.\frac{b}{\delta}$, $1.\frac{b}{\delta}$, $2.\frac{b}{\delta}$, ... $a-1.\frac{b}{\delta}$ wieder mit den Resten 0, 1, 2, ... $a-1$ übereinstimmen. Denkt man sich diese Zahlen aber als Reste nach dem Divisor $\frac{a}{\delta}$, so ist klar, dafs die Reste der Zahlen $0.\frac{b}{\delta}$, $1.\frac{b}{\delta}$, ... $\left(\frac{a}{\delta}-1\right)\frac{b}{\delta}$ mit den Zahlen 0, 1, 2, ... $\frac{a}{\delta}-1$ übereinstimmen und dafs diese Zahlen in den Resten der Zahlen $0.\frac{b}{\delta}$, $1.\frac{b}{\delta}$, $2.\frac{b}{\delta}$, ... $a-1.\frac{b}{\delta}$, δ mal enthalten sein werden.

§. 2.

Betrachtet man jetzt die Gleichung $x^a - 1 = 0$ und bezeichnet eine primitive Wurzel derselben durch α, so kann man bekanntlich die

sämmtlichen Wurzeln jener Gleichung durch α^0, α^1, α^2, ... α^{a-1} darstellen. Die $b$ten Potenzen dieser Wurzeln, werden folglich durch $\alpha^{0.b}$, $\alpha^{1.b}$, ... $\alpha^{a-1.b}$ dargestellt. Hat nun b mit a den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler δ, so kann man jene Ausdrücke auch so schreiben: $(\alpha^\delta)^{0.\frac{b}{\delta}}$, $(\alpha^\delta)^{1.\frac{b}{\delta}}$, $(\alpha^\delta)^{2.\frac{b}{\delta}}$, ... $(\alpha^\delta)^{a-1.\frac{b}{\delta}}$. Nun wird aber α^δ selbst eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{\frac{a}{\delta}}-1=0$ sein, und die Zahlen $0.\frac{b}{\delta}$, $1.\frac{b}{\delta}$, ... $a-1.\frac{b}{\delta}$ werden, durch $\frac{a}{\delta}$ getheilt, δ mal die Reste 0, 1, 2, ... $\frac{a}{\delta}-1$ erzeugen: also werden die Ausdrücke $(\alpha^\delta)^{0.\frac{b}{\delta}}$, $(\alpha^\delta)^{1.\frac{b}{\delta}}$, $(\alpha^\delta)^{2.\frac{b}{\delta}}$, ... $(\alpha^\delta)^{a-1.\frac{b}{\delta}}$, δ mal die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{a}{\delta}}-1=0$ enthalten. Die Gleichung für die $b$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $x^a-1=0$ wird also unter der Form $\left(x^{\frac{a}{\delta}}-1\right)^\delta=0$ auftreten. Die Coefficienten dieser Gleichung werden folglich ganze positive oder negative Zahlen, oder 0 sein. Ich behaupte nun, dafs jede symmetrische Function der Ausdrücke α^0, α^1, ... α^{p-1} sich als ganze Function solcher Coefficienten, folglich als ganze positive oder negative Zahl oder auch als 0 wird darstellen lassen.

Um jedes Mifsverständnifs zu vermeiden, bemerke ich, dafs ich hier und für die Folge unter einer ganzen Function gegebener Ausdrücke eine ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte rationale Function dieser Ausdrücke verstehe.

Bevor wir nun zu dem allgemeinen Schlufs übergehen, auf dem unsere Aussage beruht, wollen wir eine allgemeine Bezeichnung für symmetrische Functionen gegebener Elemente einführen.

Eine symmetrische Function von m Elementen, die aus lauter einzelnen Producten zusammengesezt ist, in denen n verschiedene Elemente vorkommen, von denen das erste in die c_1^{te}, das zweite in die c_2^{te}, ... das n^{te} in die c_n^{te} Potenz erhoben ist (und jede symmetrische ganze Function ist bekanntlich ein Aggregat solcher Functionen), bezeichnen wir durch $[c_1\, c_2 \ldots . c_n]$; so dafs also z. B. für die Elemente α, β, γ, δ die symmetrische Function $\alpha\beta\gamma^2+\alpha\beta\delta^2+\alpha\gamma\beta^2+\alpha\gamma\delta^2+\alpha\delta\beta^2+\alpha\delta\gamma^2+\beta\gamma\alpha^2+\beta\gamma\delta^2+\beta\delta\alpha^2+\beta\delta\gamma^2+\gamma\delta\alpha^2+\gamma\delta\beta^2$ durch $[1, 1, 2]$ dargestellt wird. Fallen jene m Elemente mit den a Ausdrücken α^0, α^1, ... α^{a-1} zusammen, so wird

sich der Coefficient von x^{a-n} in der Entwicklung von $\left(x^{\frac{a}{\delta}}-1\right)^{\delta}$ durch $(-1)^n [b_1 b_2 \ldots. b_n]$ darstellen lassen, wo $b = b_1 = b_2 = \ldots. = b_n$ ist. Dies folgt unmittelbar aus der Identität der beiden Ausdrücke $\left(x^{\frac{a}{\delta}}-1\right)^{\delta}$ und $(x-\alpha^{0\cdot b})(x-\alpha^{1\cdot b})(x-\alpha^{2\cdot b}) \ldots. (x-\alpha^{(a-1)\cdot b})$.

Der oben ausgesprochene Satz wird nun auch in dem allgemeineren und wichtigeren Satze enthalten sein, dafs sich jede symmetrische Function $[c_1 c_2 \ldots. c_n]$ als ganze Function anderer symmetrischer Functionen, die durch lauter gleiche, in Klammern eingeschlossene Zahlen angedeutet werden, ausdrücken läfst. Von diesem Satze möge man sich erst an einigen, leicht zu verfolgenden Beispielen überzeugen, nemlich:

1) $[8,5,3] = [8][5][3] - [13,3] - [11,5] - [8,8]$. Es ist aber $[13,3] = [13][3] - [16]$ und $[11,5] = [11][5] - [16]$, folglich

$$[8,5,3] = [8][5][3] - [8,8] - [13][3] - [11][5] + 2[16].$$

2) $[8,8,3] = [8,8][3] - [11,8]$; $[11,8] = [11][8] - [19]$, also

$$[8,8,3] = [8,8][3] - [11][8] + [19].$$

3) $[8,8,3,3] = [8,8][3,3] - [11,8,3] - [11,11]$; $[11,8,3] = [11][8][3] - [19,3] - [14,8] - [11,11]$; $[19,3] = [19][3] - [22]$; $[14,8] = [14][8] - [22]$, folglich

$$[8,8,3,3] = [8,8][3,3] - [11][8][3] + [19][3] + [14][8] - 2[22].$$

Betrachten wir nun die allgemeine symmetrische Function $[c_1 c_2 \ldots. c_n]$, welche von der Beschaffenheit sein mag, dafs von den Zahlen $c_1, c_2, \ldots. c_n$ eine Anzahl μ gleich α_1, eine zweite Anzahl ν gleich β_1, eine dritte Anzahl ϱ gleich γ_1 etc. wird. Setzt man $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots. = \alpha_\mu$, $\beta_1 = \beta_2 = \ldots. = \beta_\nu$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots. = \gamma_\varrho$ und bildet das Product $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots. \alpha_\mu][\beta_1 \beta_2 \ldots. \beta_\nu][\gamma_1 \gamma_2 \ldots. \gamma_\varrho]$ etc., so wird dies offenbar aus aus $[c_1 c_2 \ldots. c_n]$ und anderen symmetrischen Functionen bestehen, deren einzelne Summanden jedoch nur eine geringere Anzahl von Elementen enthalten kann als n andeutet. (Wesentlich ist es auch, hierbei zu bemerken, dafs $[c_1 c_2 \ldots. c_n]$ nur einmal in diesem Product als Summand vorkommen kann.) Wir erhalten demnach $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots. \alpha_\mu][\beta_1 \beta_2 \ldots. \beta_\nu][\gamma_1 \gamma_2 \ldots. \gamma_\varrho] = [c_1 c_2 \ldots. c_n] + \Sigma$, wo Σ ein Aggregat einfacher symmetrischer Functionen bezeichnet, in deren einzelnen Summanden weniger als n verschiedene Elemente auftreten. Demnach ist

$$[c_1 c_2 \ldots. c_n] = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots. \alpha_\mu][\beta_1 \beta_2 \ldots. \beta_\nu][\gamma_1 \gamma_2 \ldots. \gamma_\varrho] - \Sigma;$$

und da man jede einzelne Function, die in Σ enthalten ist, wieder ähn-

lich wie $[c_1\, c_2 \ldots . c_n]$ transformiren kann, so ist klar, dafs $[c_1\, e_2 \ldots . c\,]$ zuletzt als Aggregat von Producten hervorgehen mufs, deren jedes aus symmetrischen Functionen besteht, die durch gleiche eingeklammerte Zahlen angedeutet werden.

Setzt man nun die Wurzeln der Gleichung $x^a - 1 = 0$ als Elemente der symmetrischen Functionen, so werden die, durch lauter gleiche in Klammern eingeschlossene Zahlen angedeuteten Functionen mit den positiven oder negativen Coefficienten der Gleichungen für die ganzen Potenzen der Wurzeln der Gleichung $x^a - 1 = 0$ übereinstimmen, folglich nach dem Vorhergehenden ganze Zahlen sein; und da sich ferner jede ganze symmetrische Function jener Wurzeln als ganze Function dieser Zahlen entwickeln läfst, so folgt, dafs diese Function selbst durch ganze Zahlen oder 0 werde darstellbar sein.

§. 3.

Aufgabe. Wenn eine Gleichung vom $n$ten Grade $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . + a_n = 0$ vorliegt, eine andere Gleichung aufzustellen, welche die $p$ten Potenzen der Wurzeln der vorliegenden Gleichung als Wurzeln enthält; vorausgesetzt p bedeute irgend eine ganze positive Zahl.

Gesetzt es wären $b_1, b_2, \ldots . b_n$ die Wurzeln der vorliegenden Gleichung, also $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . + a_n = (x - b_1)(x - b_2) \ldots . (x - b_n)$, so erhielt man die verlangte Gleichung, indem man das Product $(x^p - b_1^p)(x^p - b_2^p) \ldots . (x^p - b_n^p)$ entwickelte, dies gleich 0 setzte und für x^p irgend eine andere Unbekannte z einführte. Bezeichnet nun α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$, so ist bekanntlich $x^p - b^p = (x - b)(x - b\alpha)(x - b\alpha^2) \ldots . (x - b\alpha^{p-1})$. Werden auf diese Weise sämmtliche Factoren zerlegt, so geht das Product $(x^p - b_1^p)(x^p - b_2^p) \ldots . (x^p - b_n^p)$ in folgendes über:

$$
\begin{aligned}
&(x - b_1)\ \ (x - b_2)\ \ (x - b_3)\ \ \ldots . (x - b_n).\\
&(x - b_1\alpha)(x - b_2\alpha)(x - b_3\alpha) \ldots . (x - b_n\alpha).\\
&(x - b_1\alpha^2)(x - b_2\alpha^2)(x - b_3\alpha^2) \ldots . (x - b_n\alpha^2).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(x - b_1\alpha^{p-1})(x - b_2\alpha^{p-1})(x - b_3\alpha^{p-1}) \ldots . (x - b_n\alpha^{p-1}).
\end{aligned}
$$

Jedes der p Producte, die in einer Horizontalreihe enthalten sind, kann man leicht durch die ursprüngliche Gleichung und durch α darstellen. Man erhält dann das obige Product durch

$$(x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n).$$
$$(x^n + a_1 \alpha x^{n-1} + a_2 \alpha^2 x^{n-2} + \ldots + a_n \alpha^n).$$
$$(x^n + a_1 \alpha^2 x^{n-1} + a_2 \alpha^4 x^{n-2} + \ldots + a_n \alpha^{2n}).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x^n + a_1 \alpha^{p-1} x^{n-1} + a_2 \alpha^{2(p-1)} x^2 + \ldots + a_n \alpha^{n(p-1)})$$

ausgedrückt.

Betrachten wir nun den Coefficienten irgend einer $q$ten Potenz von x, so besteht dieser offenbar aus einer Summe von Gliedern, deren jedes einzelne ein Product aus den verschiedenen Coefficienten der ersten Gleichung ist, die keiner andern Beziehung unterworfen sind, als dafs die Summe ihrer Indices gleich $pn - q$ ist, und aus einer symmetrischen Function der Ausdrücke $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{p-1}$, welche wir im folgenden §. näher untersuchen wollen. Hier bemerken wir nur, dafs diese symmetrische Functionen sich nach §. 2. werden durch ganze Zahlen darstellen lassen, und dafs der Coefficient von x^q verschwinden müsse, wenn q nicht durch p aufgeht; denn in der Entwicklung von $(x^p - b_1^p)(x^p - b_2^p)\ldots(x^p - b_n^p)$ kommen nur Potenzen von x vor, deren Exponenten Vielfache von p sind. Bezeichnen wir nun die Coefficienten für die $p$ten Potenzen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung durch $a_{1p}, a_{2p}, a_{3p}, \ldots a_{np}$, so folgt, dafs dieselben ganze Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Gleichung sein werden. Aus §. 2. folgt noch, dafs sich jede symmetrische Function der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung als ganze Function der Gröfsen $a_{1p}, a_{2p}, \ldots a_{np}$ (wo p verschiedene ganze Zahlen bedeuten kann) ausdrücken läfst; daher folgt, in Verbindung mit dem Vorhergehenden:

dafs sich jede symmetrische ganze Function der Wurzeln einer Gleichung als ganze Function der Coefficienten dieser Gleichung ausdrükken läfst.

Zusatz. Bedeuten $a_1, a_2, \ldots a_n$ ganze Zahlen, oder 0, so werden sich auch $a_{1p}, a_{2p}, \ldots a_{np}$ durch ganze Zahlen oder 0 ausdrücken lassen. Diesen Satz hat *Gaufs* in den *Disq. Arithm. §. 338.* ohne Beweis angemerkt. Wir können noch hinzufügen, dafs sich dann jede symmetrische ganze Function der Wurzeln der Gleichung durch eine ganze Zahl oder 0 darstellen läfst.

§. 4.

Wenden wir uns jetzt zur Untersuchung des Coefficienten irgend einer $q$ten Potenz von x in der Entwicklung des Products

$$(x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n).$$
$$(x^n + a_1 \alpha x^{n-1} + a_2 \alpha^2 x^{n-2} + \ldots + \alpha^n a_n).$$
$$(x^n + a_1 \alpha^2 x^n + a_2 \alpha^{2n} x^{n-2} + \ldots + a_n \alpha^{2n}).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x^n + a_1 \alpha^{p-1} x^{n-1} + a_2 \alpha^{2(p-1)} x^{n-2} + \ldots + a_n \alpha^{(p-1)n}).$$

Dieser besteht aus einer Summe von Gliedern, deren jedes ein Product aus den verschiedenen Coefficienten der ersten Gleichung ist, multiplicirt in eine symmetrische Function der Ausdrücke α^0, α^1, α^2, ... α^{p-1}. Stellen wir nun das Product der Coefficienten durch $a_{a_0} a_{a_1} a_{a_2} \ldots a_{a_{p-1}}$ dar, wo also $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_{p-1} = pn - q$ ist und alle Zahlen a kleiner als n, aber positiv oder 0 sind, (a_0 bedeutet den Coefficienten von x^n also 1): so können wir die symmetrische Function von α^0, α^1, ... α^{p-1}, die in jenen Ausdruck noch multiplicirt werden mufs, durch

$$\Sigma \alpha^{0a_0 + 1a_1 + 2a_2 + \ldots (p-1)a_{p-1}}$$

ausdrücken. Die Summe wird hervorgebracht, wenn man alle mögliche Vertauschungen unter den Zahlen a_0, a_1, ... a_{p-1} macht, während die Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ ungeändert bleiben, jedoch so, dafs die Vertauschungen der gleichen Elemente a unter einander, indem die übrigen ungeändert bleiben, nur für eine zählen, und dafs man dann sämmtliche Potenzen von α, die auf diese Weise hervorgebracht werden, addirt. Dies folgt aus der Bildungsweise eines Products. Da nun in der Entwicklung des obigen Products der Coefficient einer $q$ten Potenz von x durch

$$\Sigma a_{a_0} a_{a_1} \ldots a_{a_{p-1}} \Sigma \alpha^{0a_0 + 1a_1 + \ldots p-1 . a_{p-1}},$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_{p-1} = pn - q$$

dargestellt wird, und verschwinden mufs, wenn $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}$ nicht mit p aufgeht, die Gröfsen a_{a_0}, a_{a_1}, a_{a_2}, ... $a_{a_{p-1}}$ mögen beschaffen sein wie sie wollen: so folgt hieraus der für die folgende Untersuchung wichtige Satz, dafs $\Sigma \alpha^{0a_0 + 1a_1 + \ldots p-1 . a_{p-1}}$ selbst 0 sein werde, wenn $a_0 + a_1 + \ldots a_{p-1}$ nicht mit p aufgeht. (Auf anderem Wege hat schon *Meier Hirsch* diesen Satz im §. 95. seiner Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, Berlin, 1809, bewiesen.)

Wenden wir uns nun zur Bestimmung von $\Sigma \alpha^{0a_0 + 1a_1 + 2a_2 + \ldots p-1 . a_{p-1}}$ für den Fall, wo $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}$ mit p aufgeht. Ich bemerke zuerst, dafs man diese Summe auch bilden könne, indem man alle möglichen Vertauschungen unter den Elementen a_0, a_1, ... a_{p-1} vornimmt,

so als wenn alle diese Zahlen a unter einander verschieden wären, und hernach die erhaltene Zahl durch $1.2.3....\mu.1.2.3....\nu.1.2.3....\varrho$ etc. dividirt, wo μ, ν, ϱ etc. bezeichnen, wie viele von den Elementen a als unter einander gleich zu achten sind. Denn es ist offenbar, dafs durch die obige Annahme, alle Elemente wären ungleich, statt jedes einzelnen Ausdruckes $1.2.3....\mu.1.2.3....\nu.1.2.3....\varrho$ etc. gleiche Ausdrücke gesetzt worden sind.

Wir werden also im Folgenden unter $\Sigma\alpha^{0a_0+1a_1+....p-1.a_{p-1}}$ diejenige Summe verstehen, in der bei der Bildung auf die Gleichheit mehrerer Elemente a keine Rücksicht genommen worden ist; wir haben mithin, um auf die frühere Bedeutung des Ausdruckes zurückzukommen, den erhaltenen Ausdruck durch $1.2....\mu.1.2....\nu.1.2....\varrho$ etc. zu dividiren. Kommen nun unter den Zahlen a_0, a_1, a_2, ... a_{p-1}, $p-n$ Zahlen vor, die mit p aufgehen, und bezeichnen wir die übrigen durch a_1, a_2, ... a_n, so wird $\Sigma\alpha^{0a_0+1a_1+....p-1.a_{p-1}} = 1.2.3....n\Sigma\alpha^{\xi_1 a_1+\xi_2 a_2+....\xi_n a_n}$ werden, so dafs man den Ausdruck auf der rechten Seite erhält, wenn man sämmtliche Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ zu n combinirt, dann permutirt und sie an die Stelle der ξ setzt. Denn es ist klar, dafs man auch $\Sigma\alpha^{0a_0+1a_1+2a_2+....p-1.a_{p-1}}$ erhalten werde, wenn man die Zahlen a_0, a_1, a_2, ... a_{p-1} als fest betrachtet und die Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ permutirt, da durch beide Operationen derselbe Effect erreicht wird, nämlich alle die Verbindungen aufzustellen, die man erhält, wenn man immer eine der Zahlen a_0, a_1, ... a_{p-1} mit einer der Zahlen 0, 1, ... $p-1$ verbindet. Dafs die zweite Bildungsweise aber auf den Ausdruck $1.2.3....n\Sigma\alpha^{\xi_1 a_1+\xi_2 a_2+....\xi_n a_n}$ führt, ist einleuchtend, und zugleich auch hieraus, dafs in jedem einzelnen Ausdrucke $\alpha^{\xi_1 a_1+\xi_2 a_2+....\xi_n a_n}$ alle Zahlen ξ verschieden sein müssen.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun, dafs $\Sigma\alpha^{\xi_1 a_1+\xi_2 a_2+....+\xi_n a_n}$ 0 sein werde, wenn $a_1+a_2+a_3+....+a_n$ nicht mit p aufgeht. Geht $a_1+a_2+....+a_n$ mit p auf, so sei $a_1+a_2+....+a_n = mp$, oder $a_n = mp-a_1-a_2-....-a_{n-1}$, folglich

$$\alpha^{\xi_1 a_1+\xi_2 a_2+....\xi_n a_n} = \alpha^{a_1(\xi_1-\xi_n)+a_2(\xi_2-\xi_n)+....a_{n-1}(\xi_{n-1}-\xi_n)}.$$

Bezeichnen wir nun $\xi_1-\xi_n$ durch z_1, $\xi_2-\xi_n$ durch z_2, ... $\xi_{n-1}-\xi_n$ durch z_{n-1}, so wird keine der Zahlen z mit p aufgehen können, weil sämmtliche Zahlen ξ kleiner als p und unter einander verschieden sind.

Aus dem letzten Grunde werden auch sämmtliche Zahlen z unter einander verschieden sein; denn wäre $z_\nu - z_\mu = 0$, so wäre auch $\xi_\nu - \xi_\mu = 0$. Liegt nun irgend ein Ausdruck $a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots . a_{n-1} z_{n-1}$ vor, wo die Zahlen z alle unter einander verschieden und der Reihe 1, 2, ... $p-1$ entnommen sind, so kann man aus solchem Ausdrucke p verschiedene Ausdrücke von der Form $\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots . + \xi_n a_n$ bilden, für welche sich die Werthe von ξ aus den unbestimmten Gleichungen

$$z_1 = \xi_n - \xi_1, \quad z_2 = \xi_n - \xi_2, \quad z_3 = \xi_n - \xi_3, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = \xi_n - \xi_{n-1}$$

ergeben, die offenbar p Systeme von Lösungen haben, welche man erhält, wenn man statt ξ_n der Reihe nach 0, 1, 2, ... $p-1$ setzt. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dafs man für die Werthe von ξ, die hiernach einen negativen Werth erhalten, die positiven Zahlen setzen kann, welche man erhält, wenn man zu ihnen p addirt. Ferner ist klar, dafs aus zwei verschiedenen Ausdrücken in z durchaus auch verschiedene Ausdrücke in ξ entstehen müssen. Woraus denn folgt, dafs man aus sämmtlichen Ausdrücken $a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots . + a_{n-1} z_{n-1}$ nach obiger Weise sämmtliche Ausdrücke $a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots . + a_n \xi_n$ einfach bilden kann. Hieraus schliefsen wir nun, dafs $\Sigma \alpha^{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots . \xi_n a_n} = p \Sigma \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2 + \ldots . z_{n-1} a_{n-1}}$ sein werde. Denn damit die durch z ausgedrückte Summe in die durch ξ ausgedrückte übergehe, mufs jeder Ausdruck in ihr mit p vervielfacht werden. Die Aufgabe besteht also jetzt darin, $\Sigma \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2 + \ldots . z_{n-1} a_{n-1}}$ zu entwickeln; wo für z nur die Werthe 1, 2, 3, ... $p-1$ eintreten dürfen. Um dies auszuführen, wollen wir im Allgemeinen die Summe $\Sigma \alpha^{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots . \xi_m a_m}$ durch C_m und die Summe $\Sigma \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2 + \ldots . z_m a_m}$ durch C'_m bezeichnen; wir bezeichnen ferner die Summe der Ausdrücke, die man erhält, wenn man in C_m der Reihe nach eine der Gröfsen a verschwinden läfst, durch SC_{m-1}, die Summe der Ausdrücke, die man erhält wenn man je zwei Gröfsen a in C_m verschwinden läfst, durch SC_{m-2}, und allgemein die Summe der Ausdrücke, die man erhält wenn man in C_m je n Gröfsen a verschwinden läfst, durch SC_{m-n}. Eben so bezeichnen wir die Summe der Ausdrücke, die man erhält, wenn man je n Zahlen a in C'_m verschwinden läfst, durch SC'_{m-n}. So ist z. B.

$$C'_3 = \Sigma \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3},$$

$$SC'_{3-1} = \Sigma \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2} + \Sigma \alpha^{z_1 a_1 + z_3 a_3} + \Sigma \alpha^{z_1 a_2 + z_2 a_3} \text{ und}$$

$$SC'_{3-2} = \Sigma \alpha^{z_1 a_1} + \Sigma \alpha^{z_1 a_2} + \Sigma \alpha^{z_1 a_3}.$$

Zuerst findet man nun leicht aus der Bedeutung der Ausdrücke $C'_m = C_m - SC'_{m-1}$. SC'_{m-1} besteht aber aus m einzelnen Ausdrücken von der Form ${}'C'_{m-1}$, wo durch den Index links angedeutet werden soll, dafs eine bestimmte Zahl α, unter denen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$, in C_m gleich 0 gesetzt sei. Man findet aber wie vorher ${}'C'_{m-1} = {}'C_{m-1} - S'C'_{m-2}$. Es besteht aber $S'C'_{m-2}$ aus $m-1$ Ausdrücken. Läfst man diesen Ausdruck $S'C'_{m-2}$ aus C'_m auf $m$fache Weise entstehen, indem man nämlich der Reihe nach α_1, dann α_2 etc. gleich 0 setzt, und addirt diese sämmtlichen $m.m-1$ Ausdrücke, so ist klar, dafs in jedem einzelnen Ausdrucke zwei Zahlen α fehlen und dafs ferner diese Ausdrücke zusammen in Bezug auf die Gröfsen α symmetrisch sind. Hieraus schliefst man, dafs jene $m.m-1$ Ausdrücke ein Vielfaches von SC'_{m-1} sein müssen, und man findet leicht, da SC'_{m-2} nur aus $\frac{m.m-1}{2}$ Ausdrücken besteht, dafs die Summe jener $m.m-1$ Ausdrücke $2SC'_{m-2}$ ist. Setzt man nun die Gleichung ${}'C'_{m-1} = {}'C_{m-1} - S'C'_{m-2}$ auf alle mögliche Weise zusammen, indem man ${}'C'_{m-1}$ aus C'_m auf alle Arten entstehen läfst, und addirt diese Ausdrücke sämmtlich, so wird man offenbar $SC'_{m-1} = SC_{m-1} - 1.2SC'_{m-2}$ erhalten.

Betrachten wir nun im Allgemeinen $SC'_{m\ n}$, so wird dies aus $\frac{m.m-1.m-2....m-n+1}{1.2.3....n}$ Ausdrücken von der Form ${}'C'_{m-n}$ bestehen. Jeder dieser Ausdrücke nach der angegebenen Art zerlegt, giebt eine Gleichung von der Form ${}'C'_{m-n} = {}'C_{m-n} - S'C'_{m-n-1}$. Addirt man alle diese Gleichungen, so mag das Resultat der Operation durch $\Sigma'C'_{m-n} = \Sigma'C_{m-n} - \Sigma'C'_{m-n-1}$ bezeichnet werden. Es ist aber offenbar $\Sigma'C'_{m-n} = SC'_{m-n}$, $\Sigma'C_{m-n} = SC_{m-n}$ und $\Sigma'C'_{m-n-1}$ ist ein Vielfaches von SC'_{m-n-1}; denn in jedem einzelnen Ausdrucke kommen nur $m-n-1$ Elemente α vor, und die Summe aller Ausdrücke ist auch in Bezug auf die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_m$ symmetrisch. $\Sigma'C'_{m-u-1}$ wird aus $\frac{m.m-1....m-n+1}{1.23....n}.m-n$ Ausdrücken von der Form ${}'C'_{m-n-1}$ bestehen, SC'_{m-u-1} hingegen nur aus $\frac{m.m-1....m-n}{1.2.3....n+1}$ Ausdrücken, woraus in Verbindung mit dem Vorhergehenden

$$\Sigma'C'_{m-n-1} = \frac{m.m-1.m-2....m-n}{1.2.3.....n} \cdot \frac{1.2.....n+1}{m.m-1....m-n} SC'_{m-n-1} = (n+1)SC'_{m-n-1}$$

folgt. Setzen wir diesen Ausdruck in die obige Gleichung, so erhal-

ten wir ganz allgemein $SC'_{m-n} = SC_{m-n} - (n+1)SC'_{m-n-1}$. Giebt man nun dem n der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, ... $m-1$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$C'_m = C_m - SC'_{m-1},$$
$$SC'_{m-1} = SC_{m-1} - 2SC'_{m-2},$$
$$2.SC'_{m-2} = 2SC_{m-2} - 2.3SC'_{m-3},$$
$$2.3SC'_{m-3} = 2.3SC_{m-3} - 2.3.4SC'_{m-4},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$2.3.....m-2.SC'_{m-(m-2)} = 2.3....m-2SC_{m-(m-2)} - 2.3....m-1.SC'_{m-(m-1)}.$$

Substituirt man diese Werthe nach einander in die erste Gleichung, so erhält man

$$C'_m = C_m - SC_{m-1} + 2SC_{m-2} - 2.3SC_{m-3} + 2.3.4SC_{m-4} - ....$$
$$.... (-1)^{m-1} 2.3....m-1\,SC'_1.$$

SC'_1 besteht aus m Ausdrücken von der Form $\Sigma\alpha^{az}$; jeden solchen Ausdruck kann man aber in $\Sigma\alpha^{a\xi}-1$ transformiren, woraus dann schliefslich

$$C'_m = C_m - SC_{m-1} + 2SC_{m-2} - 2.3SC_{m-3} + ...$$
$$....(-1)^{m-1} 2.3....m-1\,SC_1 + (-1)^m 2.3....m$$

folgt.

So hätten wir nun jede durch die z ausgedrückte Summe auf einen durch die ξ bestimmten Ausdruck reducirt. Sind nun die Zahlen a_1, a_2, a_3, ... a_n von der Beschaffenheit, dafs nicht etwa eine gewisse Anzahl von ihnen, die kleiner als n ist, mit p aufgehen kann, so werden die $\frac{m.m-1....m-n+1}{1.2....n}$ Ausdrücke, aus denen SC_{m-n} besteht und die sämmtlich von der Form $\Sigma\alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + ... a_{m-n}\xi_{m-n}}$ sind, dem Früheren zufolge, verschwinden. Da nun hierdurch auf der rechten Seite alle Ausdrücke aufser dem letzten verschwinden, so erhält man für diesen Fall $C'_m = (-1)^m 2.3...., m$.

Ist aber $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ durch p theilbar, so folgte $\Sigma\alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + ... + a_n\xi_n} = pC'_{n-1}$; mithin für den zuletzt erwähnten Fall $\Sigma\alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + ... + a_n\xi_n} = (-1)^{n-1} p.1.2.3....n-1$. Sind indessen die Zahlen a_1, a_2, ..., a_n von der Beschaffenheit, dafs eine kleinere Anzahl von ihnen, als n, mit p aufgehen kann, so werden nicht wie vorhin alle Ausdrücke der Entwicklung von $C'_{(n-1)}$ verschwinden, wohl aber gewifs der erste $C_{(n-1)}$, weil $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$ nicht mit p aufgehen

kann, da $a_1+a_2+\ldots+a_n$ durch p aufgeht und a_n nicht durch p aufgeht. Aus letzterem Grunde wird auch C_1, also auch immer das vorletzte Glied der Entwicklung verschwinden. Es wäre nun möglich, dafs einige Ausdrücke in $SC_{(n-1)-1}$ nicht verschwänden, wenn nämlich die Summe zweier Zahlen a mit p aufginge; alsdann könnte man aber auf jeden dieser Ausdrücke die Entwicklung $C_{(n-2)} = pC'_{(n-3)} = p[C_{(n-3)} - C_{(n-3)-1} + 2C_{(n-3)-2} - \text{etc.}]$ anwenden. $C_{(n-3)}$ müfste nun wieder verschwinden, und es ist überhaupt ersichtlich, dafs, wenn man den Gang der Operation gleichmäfsig fortsetzt, die Bestimmung von $C_{(n-2)}$ zuletzt nothwendigerweise auf solche Ausdrücke $\Sigma\alpha^{a_1\xi_1+a_2\xi_2+\ldots}$ wird reducirt werden, in welchen keine kleinere Anzahl Elemente a als unter dem Summenzeichen vorkommt, durch p aufgehen und folglich nach dem Vorhergehenden berechnet werden kann. Aehnlich kann man bei den folgenden Ausdrücken verfahren. Zweckmäfsiger würde es aber sein, die Rechnung umgekehrt zu ordnen und mit der Bestimmung der letzten Glieder der Entwicklung anzufangen. Die so erhaltenen Ausdrücke könnten dann auch zugleich zur Bestimmung der vorhergehenden dienen.

Zur Erläuterung des Gesagten diene folgendes Beispiel. Es sei $p=7$ und es handle sich um die Bestimmung von $\Sigma\alpha^{1\xi_1+2\xi_2+3\xi_3+4\xi_4+5\xi_5+6\xi_6}$; so wird dieser Ausdruck $=7\Sigma\alpha^{1z_1+2z_2+3z_3+4z_4+5z_5}$ sein. Es ist übrigens nach dem Vorhergehenden ganz gleichgültig, welche der Zahlen a, also hier der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, die in der durch die ξ ausgedrückten Summe vorkommen, man in der durch die z ausgedrückten Summe ausläfst. Es wird daher $\Sigma\alpha^{1\xi_1+2\xi_2+3\xi_3+4\xi_4+5\xi_5} = 7\Sigma\alpha^{1z_1+2z_2+3z_3+4z_4+5z_5}$ $= 7\Sigma\alpha^{1z_1+2z_2+3z_3+4z_4+6z_5} = \text{etc.}$ sein.

Es ist aber $\Sigma\alpha^{1z_1+2z_2+3z_3+4z_4+5z_5} = C'_5$ und

$$C'_5 = C_5 - SC_4 + 1.2\,SC_3 - 1.2.3\,SC_2 + 1.2.3.4\,SC_1 - 1.2.3.4.5.$$

Nun ist $SC_1 = 0$, $SC_2 = \Sigma\alpha^{2\xi_1+5\xi_2} + \Sigma\alpha^{3\xi_1+4\xi_2} = 2.7\,[C_1-1] = -2.7$, und jede dieser Summen ist einzeln gleich -7. $SC_3 = \Sigma\alpha^{1\xi_1+2\xi_2+4\xi_4} =$ $7C'_2 = 7(C_2 - C_1 + 1.2)$ also $SC_3 = 7.2$.

Ferner ist $SC_4 = \Sigma\alpha^{2\xi_1+3\xi_2+4\xi_3+5\xi_4} = 7C'_3 = 7(C_3 - SC_2 + 2SC_1 - 2.3)$. Es ist aber hier $SC_1 = 0$, $SC_2 = \Sigma\alpha^{3\xi_1+4\xi_2} = -7$, nach dem Obigen: folglich $SC_4 = 7[7.-2.3]$; C_5 aber ist 0. Mithin geben diese Werthe, in die obige Formel substituirt,

$$C'_5 = -[7(7-2.3)] + 1.2(7.2) - 1.2.3(-2.7) - 1.2.3.4.5;$$

und folglich

$$\Sigma\alpha^{1\xi_1+2\xi_2+3\xi_3+4\xi_4+5\xi_5+6\xi_6} = 7[-7(7-2.3)+1.2.7.2+1.2.3.2.7-1.2.3.4.5]$$
$$= -35.$$

Bei der Bestimmung der Coefficienten der Gleichung für die $p$ten Potenzen der Wurzeln der ursprünglichen, hat der Coefficient der $(n-1)$ten Potenz der Unbekannten z, oder, nach obiger Entwicklung, der Coefficient von $x^{(n-1)p}$, ein besonderes Interesse. Dieser drückt nämlich bekanntlich die negative Summe der $p$ten Potenzen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung aus, und die einzelnen Glieder desselben lassen sich allgemein bestimmen. Der allgemeine Ausdruck eines solchen Gliedes ist nach dem Vorigen $a_{\mathfrak{a}_0}\, a_{\mathfrak{a}_1}\, a_{\mathfrak{a}_2} \ldots . a_{\mathfrak{a}_{p-1}} \Sigma\alpha^{0\mathfrak{a}_0+1\mathfrak{a}_1+\ldots .p-1.\mathfrak{a}_{p-1}}$, wo $\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2 \ldots . \mathfrak{a}_{p-1} = p$ ist. Da alle Zahlen $\mathfrak{a}$ positiv sind, so müssen mehrere gleich 0 werden, wenn nicht jede $= 1$ ist. Werden nun $p-m$ Zahlen $\mathfrak{a}$ gleich 0, und bezeichnet man die übrigen durch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, ... $\mathfrak{a}_m$, so wird der obige Ausdruck folgende Gestalt annehmen:

$$a_{\mathfrak{a}_1}\, a_{\mathfrak{a}_2} \ldots . a_{\mathfrak{a}_m} \Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+\mathfrak{a}_2\xi_2+\ldots .\mathfrak{a}_m\xi_m}.$$

Macht man unter den Gröfsen ξ sämmtliche Variationen, ganz abgesehen davon, ob mehrere der Zahlen $\mathfrak{a}$ gleich werden, so ist

$$\Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+\mathfrak{a}_2\xi_2+\ldots .\mathfrak{a}_m\xi_m} = p[C_{m-1} - SC_{m-2} \ldots . (-1)^{m-1} 2.3 \ldots . m-1].$$

Da aber $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\ldots .\mathfrak{a}_m = p$ ist, so ist klar, dafs die Summe einer geringeren Anzahl von Elementen $\mathfrak{a}$, als p anzeigt, nicht durch p aufgehen kann; folglich sind alle in den Klammern befindlichen Ausdrücke, aufser dem letzten, gleich 0 und es ist

$$\Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+\mathfrak{a}_2\xi_2+\ldots .+\mathfrak{a}_m\xi_m} = (-1)^{m-1} p.2.3 \ldots . m-1.$$

Sollen nun blofs die Variationen unter den Gröfsen ξ vorgenommen werden, welche verschiedene Verbindungen mit den Elementen $\mathfrak{a}$ hervorbringen, so ist noch zu unterscheiden, wie viele unter einander gleiche Elemente in $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ... $\mathfrak{a}_m$ enthalten sind. Nennt man diese Anzahlen μ, ν, ϱ etc., so wird der obige Werth für $\Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+\mathfrak{a}_2\xi_2+\ldots .+\mathfrak{a}_m\xi_m}$ noch durch $1.2.3 \ldots . \mu . 1.2 \ldots . \nu . 1.2 \ldots . \varrho$ zu dividiren sein, um den der jetzigen Voraussetzung entsprechenden Werth von $\Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+\mathfrak{a}\xi_2+\ldots .+\mathfrak{a}_m\xi_m}$ zu geben. Demnach wird der Coefficient von $a_{\mathfrak{a}_1}\, a_{\mathfrak{a}_2} \ldots . a_{\mathfrak{a}_m}$ gleich

$p \dfrac{1.2.3 \ldots . m-1}{1.2 \ldots . \mu . 1.2 \ldots . \nu . 1.2 \ldots . \varrho} (-1)^{m-1}$ sein. Ist aber $\mathfrak{a}_1 = p$ und die übrigen Elemente sind 0, so wird der Coefficient von a_p offenbar $\Sigma\alpha^{p\xi} = p$.

Sollte also z. B. die Summe der 6ten Potenzen der Wurzeln einer vorliegenden Gleichung, deren Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. sind, bestimmt werden, so würde man für dieselbe folgende Entwicklung erhalten:

$$-\Big[a_1^6 6.\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4.5.6}(-1)^5+a_1^4a_2 6.\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}(-1)^4+a_1^2a_2^2 6.\frac{1.2.3}{1.2.1.2}(-1)^3$$
$$+a_2^3 6.\frac{1.2}{1.2.3}(-1)^2+a_4^3a_3 6.\frac{1.2.3}{1.2.3}(-1)^3+a_1a_2a_3 6.1.2(-1)^2+a_3^2 6.\frac{1}{1.2}(-1)$$
$$+a_1^2a_4 6.\frac{1.2}{1.2}(-1)^2+a_2a_4 6.\frac{1.2}{1.2}(-1)^2+a_2a_4 6(-1)+a_1a_5 6(-1)+a_6 6\Big]$$
$$=a_1^6-6a_1^4a_2+9a_1^2a_2^2-2a_2^3+6a_1^3a_3-12a_1a_2a_4+3a_3^2-6a_1^2a_4+6a_2a_4$$
$$+6a_1a_5-6a_6.$$

(Der Schluſs im nächsten Hefte.)

12.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten, No. 10. im 2ten, No. 15. im 3ten, No. 21. im 4ten Hefte des vorigen und No. 2. im 1sten, No. 8. im 2ten Hefte dieses Bandes.)

Dreizehnter Abschnitt.

Von der Vervielfachung des Argumentes der Modular-Functionen.

§. 149.

Formen der Ausdrücke für $\mathrm{sn}(nu)$, $\mathrm{cn}(nu)$, $\mathrm{dn}(nu)$.

In §. 117. ist von der Verdoppelung des Argumentes der Modular-Functionen gehandelt worden. In den Formeln

$$\mathrm{sn}\,2u = \frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\,u},$$

$$\mathrm{cn}\,2u = \frac{\mathrm{cn}^2\,u-\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{cn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\,u},$$

$$\mathrm{dn}\,2u = \frac{\mathrm{dn}^2\,u-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{cn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\,u}$$

sind die Nenner einander gleich und rationale Functionen von $\mathrm{sn}\,u$ oder von sn^2u; der Zähler des ersten Bruches $2\,\mathrm{sn}\,u\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2u)}\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2u)}$ ist keine rationale Function von $\mathrm{sn}\,u$; die Zähler der beiden anderen Brüche sind aber rationale Functionen von sn^2u, da $\mathrm{cn}^2u = 1-\mathrm{sn}^2u$ und $\mathrm{dn}^2u = 1-k^2\,\mathrm{sn}^2u$ ist.

Man kann Recursions-Formeln entwickeln, welchen gemäfs man leicht Ausdrücke der Modular-Functionen der Argumente $3u$, $4u$, $5u$, $6u$ etc. durch Functionen des Argumentes u herleiten kann. Setzt man in den Formeln

$$\operatorname{sn}(a+b)+\operatorname{sn}(a-b)=\frac{2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

$$\operatorname{cn}(a+b)+\operatorname{cn}(a-b)=\frac{2\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

$$\operatorname{dn}(a+b)+\operatorname{dn}(a-b)=\frac{2\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

$b=u$ und $a=nu$, so verwandeln sie sich in

$$\operatorname{sn}((n+1)u)=\frac{2\operatorname{cn}u.\operatorname{dn}u.\operatorname{sn}(nu)}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2(nu)}-\operatorname{sn}((n-1)u),$$

$$\operatorname{cn}((n+1)u)=\frac{2\operatorname{cn}u.\operatorname{cn}(nu)}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2(nu)}-\operatorname{cn}((n-1)u),$$

$$\operatorname{dn}((n+1)u)=\frac{2\operatorname{dn}u.\operatorname{dn}(nu)}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2(nu)}-\operatorname{dn}((n-1)u),$$

Aus diesen Recursionsformeln erkennt man zuerst, dafs die Brüche für $\operatorname{sn}(nu)$, $\operatorname{cn}(nu)$ und $\operatorname{dn}(nu)$, welche man durch wiederholte Anwendungen derselben herleitet, dieselben Nenner haben. Setzt man aber

$$1.\quad\begin{cases}\operatorname{sn}(nu)=\frac{U_n}{R_n}, & \operatorname{cn}(nu)=\frac{V_n}{R_n}, & \operatorname{dn}(nu)=\frac{W_n}{R_n},\\ \operatorname{sn}((n-1)u)=\frac{U_{n-1}}{R_{n-1}}, & \operatorname{cn}((n-1)u)=\frac{V_{n-1}}{R_{n-1}}, & \operatorname{dn}((n+1)u)=\frac{W_{n-1}}{R_{n-1}},\\ \operatorname{sn}((n+1)u)=\frac{U_{n+1}}{R_{n+1}}, & \operatorname{cn}((n+1)u)=\frac{V_{n+1}}{R_{n+1}}, & \operatorname{dn}((n+1)u)=\frac{W_{n+1}}{R_{n+1}};\end{cases}$$

ferner $\operatorname{sn}u=x$, $\operatorname{cn}u=y$, $\operatorname{dn}u=z$, und substituirt diese Brüche, so erhält man

$$\frac{U_{n+1}}{R_{n+1}}=\frac{2yz.U_n.R_n}{R_n^2-k^2x^2.U_n^2}-\frac{U_{n-1}}{R_{n-1}},$$

$$\frac{V_{n+1}}{R_{n+1}}=\frac{2y.V_n.R_n}{R_n^2-k^2x^2.U_n^2}-\frac{V_{n-1}}{R_{n-1}},$$

$$\frac{W_{n+1}}{R_{n+1}}=\frac{2z.W_n.R_n}{R_n^2-k^2x^2.U_n^2}-\frac{W_{n-1}}{R_{n-1}}.$$

Setzt man also

$$2.\quad\begin{cases}T_n=R_n^2-k^2x^2.U_n^2, & \text{so ist}\\ R_{n+1}=T_n.R_{n-1},\\ U_{n+1}=2yz.U_n.R_n.R_{n-1}-T_n.U_{n-1},\\ V_{n+1}=2y.V_n.R_n.R_{n-1}-T_n.V_{n-1},\\ W_{n+1}=2z.W_n.R_n.R_{n-1}-T_n.W_{n-1}.\end{cases}$$

Diesen Formeln gemäfs kann man aus

$U_1=x$, $V_1=y$, $W_1=z$, $R_1=1$ und

$$U_2 = 2xyz, \quad V_2 = \mathrm{cn}^2 u - \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u, \quad W_2 = \mathrm{dn}^2 u - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 u,$$
$$R_2 = 1 - k^2 x^4,$$

U_3, V_3, W_3, R_3 herleiten; ferner U_4, V_4, W_4, R_4, u. s. w.

Es werden diese Ausdrücke immer mehr zusammengesetzt, je weiter die recurrirende Rechnung fortschreitet. Einige derselben werden rational in Ansehung von x^2, und da $y^2 = 1 - x^2$, $z^2 = 1 - k^2 x^2$ ist, so sind auch diese rational in Ansehung von y^2 und z^2; andere Ausdrücke werden aber irrational in Ansehung von x, y, z, und es bleibt noch zu ermitteln, welche Ausdrücke von jener oder dieser Beschaffenheit sind. Bezeichnet man durch $\lambda(x^2)$ eine rationale ganze Function von x_2, so ist zunächst $T_2 = R_2^2 - k^2 x^2 . U_2^2$, oder $T_2 = \lambda(x^2)$; daher ist, den Formeln (2.) gemäfs,

$$R_3 = \lambda(x^2), \quad U_3 = x\lambda(x^2), \quad V_3 = y\lambda(y^2), \quad W_3 = z\lambda(z^2).$$

Hieraus folgt zunächst $T_3 = \lambda(x^2)$, also

$$R_4 = \lambda(x^2), \quad U_4 = xyz\lambda(x^2), \quad V_4 = \lambda(y^2), \quad W_4 = \lambda(z^2);$$

mithin ist $T_4 = \lambda(x^2)$, und folglich

$$R_5 = \lambda(x^2), \quad U_5 = x\lambda(x^2). \quad V_5 = y\lambda(y^2), \quad W_5 = z\lambda(z^2).$$

So kann man immer weiter zu schliefsen fortfahren, und sieht dabei, dafs zwei Fälle unterschieden werden müssen, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Ist n eine *gerade* Zahl, so ist

$$U_n = xyz\lambda(x^2), \quad V_n = \lambda(x^2), \quad W_n = \lambda(x^2). \quad R_n = \lambda(x^2);$$

und ist n eine *ungerade* Zahl, so ist

$$U_n = x\lambda(x^2), \quad V_n = y\lambda(x^2), \quad W_n = z\lambda(x^2), \quad R_n = \lambda(x^2).$$

Durch diese Formeln wird die Form der Zähler und Nenner in den Ausdrücken (1.) bestimmt.

§. 150.

Ausdruck von $\mathrm{sn}(nu)$ durch $\mathrm{sn}\,u$ in der Form eines Productes.

Nachdem die Form des Ausdrucks von $\mathrm{sn}(nu)$ bestimmt ist, hält es nicht schwer, diesen Ausdruck selbst zu finden. Ist n eine *gerade* Zahl, so darf gesetzt werden:

$$\mathrm{sn}(nu) = g.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\,\frac{\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{a^2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{b}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{c}\right)\ldots.}{\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{a'^2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{b'^2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{c'^2}\right)\ldots.},$$

wo g einen noch zu bestimmenden constanten Factor bezeichnet; $\pm a$,

$\pm b$, $\pm c$ etc. sind die Werthe von $\mathrm{sn}\,u$, für welche der Zähler des dem Producte $g\,\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u.\,\mathrm{dn}\,u$ beigefügten Bruches $= 0$ wird, und eben so sind $\pm a'$, $\pm b'$, $\pm c'$ etc. die Werthe von $\mathrm{sn}\,u$, für welche der Nenner eben dieses Bruches $= 0$ wird.

Setzen wir $\mathrm{sn}(nu) = 0$, so ist $\pm nu = 2\alpha K \pm 2\beta i K'$, wenn unter α und β unbestimmte ganze Zahlen verstanden werden, also $\pm u = \frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}$, folglich

$$\mathrm{sn}\,u = \pm\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}\right), \qquad \mathrm{cn}\,u = \mathrm{cn}\left(\frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}\right),$$

$$\mathrm{dn}\,u = \mathrm{dn}\left(\frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}\right).$$

Giebt man in dem Ausdrucke $\mathrm{sn}\,u = \pm\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}\right)$ den Gröfsen α und β verschiedene Werthe, immer aber ganze Zahlen, so erhält man eine Reihe von Werthen für $\mathrm{sn}\,u$ und es werden sich unter denselben auch die Werthe $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ etc. befinden. Setzt man aber $\mathrm{sn}(nu) = \frac{1}{0}$, so erhält man $\pm nu = 2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'$; also $\pm u = \frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}$; folglich

$$\mathrm{sn}\,u = \pm\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right), \quad \mathrm{cn}\,u = \mathrm{cn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right) \text{ und}$$

$$\mathrm{dn}\,u = \mathrm{dn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right).$$

Giebt man auch in dem Ausdrucke $\mathrm{sn}\,u = \pm\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right)$ den Zahlen α und β verschiedene Werthe, so erhält $\mathrm{sn}\,u$ Werthe, unter welchen sich auch $\pm a'$, $\pm b'$, $\pm c'$ etc. befinden werden. Setzen wir

$$\overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n} \quad \text{und} \quad \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n},$$

so erhalten wir

$$\mathrm{sn}(nu) = g.\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\,\frac{\mathrm{P}\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)}{\mathrm{P}\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)},$$

wo das Zeichen P dieselbe Bedeutung hat, wie im §. 60. des ersten Theiles, nur dafs es sich jetzt auf zwei veränderliche ganze Zahlen α und β bezieht, und auch noch näher zu bestimmen ist, welche Werthe von α und β zu nehmen und mit einander zu verbinden sind. Die Gröfse

$\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ nennen wir den ersten, und $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ den vierten Regulator. Das Product $\mathrm{sn}\,u.\mathrm{cn}\,u.\mathrm{dn}\,u$ wird schon $=0$, wenn $u=0$ ist, weil dann auch $\mathrm{sn}\,u=0$ ist; daher sind die Werthe $\alpha=0$ und $\beta=0$ in ihrer Verbindung mit einander bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ auszuschliefsen. Ferner wird jenes Product $=0$, wenn $u=\pm K$ ist, weil dann $\mathrm{cn}\,u=0$ ist; daher sind die Verbindungen von $2\alpha=\pm n$ mit $2\beta=0$ bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ in dem obigen Ausdrucke auszuschliefsen. Das Product $\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$ ist endlich auch $=0$, wenn $\pm u=K\pm iK'$ ist, weil dann $\mathrm{dn}\,u=0$ ist; daher sind endlich auch die Verbindungen von $2\alpha=\pm n$ mit $2\beta=\pm n$ bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ auszuschliefsen. Endlich ist die Verbindung von $2\alpha=0$ mit $2\beta=\pm n$ bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ auszuschliefsen, weil dann der Factor $\mathrm{sn}\,u=\frac{1}{0}$ wird.

Bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ in der vorigen Formel sind endlich alle die Werthe von 2α und 2β auszuschliefsen, für welche $\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ frühere Werthe wieder erhält, weil a^2, b^2, c^2 etc. verschieden sein müssen.

Sind 2α und 2β einzeln $>n$, so kann man $\frac{2\alpha}{n}=2p\pm\frac{2\alpha'}{n}$ und $\frac{2\beta}{n}=2q\pm\frac{2\beta'}{n}$ setzen und die ganzen Zahlen p und q so einrichten, dafs $2\alpha'<n$ und auch $2\beta'<n$ ist. Die gröfsten Werthe von $2\alpha'$ und $2\beta'$ also sind $2\alpha'=n-2$ und $2\beta'=n-2$. Da dann aber $2\alpha=2pn\pm2\alpha'$ und $2\beta=2nq\pm2\beta'$ ist, so ist

$$\frac{2\alpha K\pm2\beta iK'}{n}=2pK\pm2qiK'+\frac{\pm2\alpha'K\pm2\beta'iK'}{n},$$

also

$$\mathrm{sn}\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)=(-1)^p\,\mathrm{sn}\overset{1}{\varrho}(\pm\alpha',\pm\beta')\quad\text{und}$$
$$\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)=\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\pm\alpha',\pm\beta')=\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha',\pm\beta').$$

Man mufs daher solche Werthe von 2α und 2β ausschliefsen, welche $>n-2$ sind und nur positive Werthe von 2α anwenden. Die einzigen zulässigen Verbindungen bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ sind also, wenn n eine gerade Zahl ist:

1. $\begin{cases}(2\alpha)=+2,+4,+6,\ldots.+(n-2)\text{ mit }(2\beta)=\pm2,\pm4,\pm6,\ldots.\pm(n-2),\\(2\alpha)=0\text{ und }=n\text{ mit }2\beta=+2,+4,+6,\ldots.+(n-2),\\(2\beta)=0\text{ und }=n\text{ mit }2\alpha=+2,+4,+6,\ldots.+(n-2).\end{cases}$

In den zuletzt genannten Verbindungen müssen also die Werthe von 2β positiv sein, weil

$\mathrm{sn}^2\left(\frac{-2\beta iK'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)$ und $\mathrm{sn}^2\left(K-\frac{2\beta iK'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(K+\frac{2\beta iK'}{n}\right)$ ist,

ferner $\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha K}{n}+iK'\right) = \mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha K}{n}-iK'\right)$. Die Zahl der Verbindungen und also auch der verschiedenen Werthe von $\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ ist also $= \frac{n-2}{2}.(n-2)+4.\left(\frac{n-2}{2}\right) = \frac{n^2-4}{2}$. Deuten wir die Einschränkung auf diese Verbindungen durch das Zeichen P′ im Gegensatze von P an, so ist

$$\mathrm{sn}(nu) = g.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

und es bleibt also nur noch der Nenner sammt dem Factor g zu bestimmen übrig.

Bei der Specialisirung des Regulators $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ sind nur die folgenden Verbindungen zulässig, wenn n eine gerade Zahl ist:

2. $\begin{cases}(2\alpha) = +2,+4,+6,\ldots.+(n-2) \text{ mit } (2\beta+1) = \pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots.\pm(n-1) \text{ und}\\ (2\alpha) = 0 \text{ und } = +n \text{ mit } (2\beta+1) = +1,+3,+5,\ldots.+(n-1),\end{cases}$

und zwar aus denselben Gründen, welche oben angegeben wurden. Aendern wir also auch im Nenner P ab in P′, um auf die so eben angegebenen Verbindungen den Divisor einzuschränken, so ist

$$\frac{\mathrm{sn}(nu)}{\mathrm{sn}\,u} = g.\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

In §. 113. wurde für $\mathrm{sn}\,u$ eine Reihe von der Form $\mathrm{sn}\,u = u-au^3+bu^5-$ etc. gefunden, also ist $\frac{\mathrm{sn}(nu)}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{n-\mathrm{an}^3u^2+\mathrm{bn}^5u^4-\mathrm{etc.}}{1-au^2+bu^4-\mathrm{etc.}}$, und setzt man $u=0$, so ist $\frac{\mathrm{sn}(nu)}{\mathrm{sn}\,u}=n$; setzt man aber auch in der vorigen Gleichung $u=0$, so erhält man $n=g$, und es ist also, wenn n eine *gerade* Zahl ist,

3. $$\mathrm{sn}(nu) = n.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Da die Anzahl der Verbindungen bei der Specialisirung des Regulators $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$, $\frac{n-2}{2}.n+2.\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$ ist, so ist der Ausdruck von $\mathrm{sn}(nu)$ von der Form

$$\mathrm{sn}(nu)=n.\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{sn}\,u+\overset{1}{A}\mathrm{sn}^3u+\overset{2}{A}\mathrm{sn}^5u\ldots.+\overset{\frac{1}{2}(nn-4)}{A}.\mathrm{sn}^{nn-3}u}{1+\overset{1}{D}\mathrm{sn}^2u+\overset{2}{D}\mathrm{sn}^4u\ldots.+\overset{\frac{1}{2}nn}{D}.\mathrm{sn}^{nn}u},$$

wenn Zähler und Nenner als entwickelte arithmetische Formen dargestellt werden, welche nach Potenzen von $\mathrm{sn}\,u$ fortschreiten. Die imaginären Factoren im Ausdrucke (3.) geben sowohl im Zähler als im Nenner reelle arithmetische Formen, da die Coefficienten $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ etc. und $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$ etc. nach §. 149. nicht imaginär sind.

Ist aber n eine *ungerade* Zahl, so findet man auf ähnliche Weise, und mit Beachtung des §. 149.,

$$\mathrm{sn}(nu)=g.\mathrm{sn}\,u.\frac{\mathrm{P}\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2u}{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2u}{\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Aufserdem müssen die in diesem Ausdrucke vorkommenden beiden Regulatoren $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)=\frac{2\alpha\pm 2\beta iK}{n}$ und $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)=\frac{2\alpha\pm(2\beta+1)iK'}{n}$ auf eine andere Art specialisirt werden, als vorhin. Bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ sind nur zulässig die Verbindungen von

$$4.\begin{cases}(2\alpha)=+2,+4,+6,\ldots.(n-1) \text{ mit } (2\beta)=\pm 2,\pm 4,\pm 6,\ldots.\pm(n-1),\\ 2\alpha=0 \text{ mit } 2\beta=+2,+4,+6,\ldots.+(n-1) \text{ und}\\ 2\beta=0 \text{ mit } 2\alpha=+2,+4,+6,\ldots.+(n-1),\end{cases}$$

so dafs die Anzahl der Verbindungen $=\frac{n-1}{2}.(n-1)+n-1=\frac{nn-1}{2}$ ist. Ausgeschlossen bleibt die Verbindung von $2\alpha=0$ mit $2\beta=0$, weil dann $\mathrm{sn}(nu)$ wegen des Factors $\mathrm{sn}\,u$ gleich Null wird; ausgeschlossen bleiben ferner wegen der Formel $\mathrm{sn}^2\left(-\frac{2\beta iK'}{n}\right)=\mathrm{sn}^2\left(+\frac{2\beta iK'}{n}\right)$ die Verbindungen von $2\alpha=0$ mit negativen Werthen von 2β, weil dadurch dieselben Werthe von $\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ entstehen, als durch die Verbindungen von $2\alpha=0$ mit positiven Werthen von 2β; ferner bleiben ausgeschlossen die Verbindungen von $2\beta=0$ mit negativen Werthen von 2α, so wie über-

haupt alle Werthe von 2β nur mit positiven Werthen von 2α verbunden werden, weil

$$\mathrm{sn}^2\left(\frac{-2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(\frac{+2\alpha K-2\beta iK'}{n}\right) \text{ und}$$

$$\mathrm{sn}^2\left(\frac{-2\alpha K-2\beta iK'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(\frac{+2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right) \text{ ist.}$$

Bei der Specialisirung des Regulators $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ sind nun blofs die Verbindungen von

$$5.\quad \begin{cases} 2\alpha = +2,+4,+6,\ldots.+(n-1) \text{ mit } (2\beta+1) = \pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots.\pm(n-2), \\ 2\alpha = 0 \text{ mit } (2\beta+1) = +1,+3,+5,\ldots.+(n-2), \\ (2\beta+1) = n \text{ mit } 2\alpha = +2,+4,+6,\ldots.+(n-1) \end{cases}$$

zulässig, so dafs die Anzahl aller Verbindungen, wodurch wirklich verschiedene Werthe von $\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ entstehen, nun $= \frac{n-1}{2}.n-1+\frac{2(n-1)}{2}$ $= \frac{nn-1}{2}$ ist. Alle übrigen möglichen Verbindungen müssen ausgeschlossen werden, weil dadurch solche Werthe von $\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ entstehen, welche unter den genannten Werthen bereits enthalten sind. Aendern wir die Zeichen P in P′ ab, um dadurch auf die Befolgung der so eben angegebenen Vorschriften beim Specialisiren aufmerksam zu machen, und beachten wir, dafs sich, wie vorhin, $g = n$ findet, so haben wir die Formel

$$6.\qquad \mathrm{sn}(nu) = n.\mathrm{sn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Entwickelt man den Zähler und Nenner nach Potenzen von $\mathrm{sn}\,u$, so erhält der Ausdruck die folgende Form:

$$\mathrm{sn}(nu) = n.\frac{\mathrm{sn}\,u+\overset{1}{A}\mathrm{sn}^3 u+\overset{2}{A}\mathrm{sn}^5 u\ldots.+\overset{\frac{1}{2}(nn-1)}{A}.\mathrm{sn}^{nn} u}{1+\overset{1}{D}\mathrm{sn}^2 u+\overset{2}{D}\mathrm{sn}^4 u\ldots.+\overset{\frac{1}{2}(nn-1)}{D}.\mathrm{sn}^{nn-1} u}.$$

§. 151.

Beweis der Gleichung $\overset{1}{D} = 0$ für jede ganze Zahl n.

Setzen wir nun in Anwendung der Bezeichnung des §. 149. den Nenner des Ausdrucks von $\mathrm{sn}\,u$

$$R_n = 1+\overset{1}{D}\mathrm{sn}^2 u+\overset{2}{D}\mathrm{sn}^4 u\ldots.+\overset{m}{D}\mathrm{sn}^{2m} u,$$

so dafs für ein gerades n, $m = \frac{nn}{2}$ ist, für ein ungerades aber $m = \frac{nn-1}{2}$,

so ist in Beziehung auf die aus den vorigen Formeln zu ziehenden Folgerungen der Beweis nöthig, dafs der Coefficient $\overset{1}{D}$ immer gleich Null sei, es mag n eine gerade oder ungerade ganze Zahl sein. Wäre der genannte Coefficient $=0$, so hätte der Nenner von $\mathrm{sn}(nu)$ die Form

$$R_{(n)} = 1+\mathrm{sn}^4 u\,(\overset{2}{D}+\overset{3}{D}\,\mathrm{sn}^2 u+\overset{4}{D}\,\mathrm{sn}^4 u\,....)$$

und könnte also vorgestellt werden durch

$$R_{(n)} = 1+x^4.\lambda(x^2),$$

wenn wieder, wie im §. 149. gesetzt wird, $x=\mathrm{sn}\,u$ und unter $\lambda(x^2)$ eine rationale ganze Function von x^2 verstanden wird. Für $n=1$ ist $R_{(n)}=1$, also $\lambda(x^2)=0$; für $n=2$ ist $R_n=1-k^2x^4$, also $\lambda(x^2)=-k^2$ und also noch unabhängig von x. In beiden Fällen ist also $\overset{1}{D}=0$, und um zu beweisen, dafs immer $\overset{1}{D}=0$ sei, ist zu zeigen, dafs $R_{(n)}$ die Form $1+x^4\lambda(x^2)$ habe. Nach §. 149. ist immer

$$R_{(n+1)} = R_n^2-k^2x^2.U_n^2).R_{(n-1)}.$$

Nehmen wir nun an, dafs R_n und $R_{(n-1)}$ die obige Form haben, so hat R_n^2 die Form $(1+x^4\lambda(x^2))^2=1+2x^4\lambda(x^2)+x^8(\lambda(x^2))^2=1+x^4\lambda(x^2)$. Ferner ist $U_n=xyz\lambda(x^2)$, wenn n gerade, und $=x\lambda(x^2)$, wenn n ungerade ist. Im ersten Falle haben wir also

$$R_{(n+1)} = (1+x^4\lambda(x^2)-k^2x^4(1-x^2)(1-k^2x^2)\lambda(x^2))(1+x^4\lambda(x^2))$$

oder

$$R_{(n+1)} = (1+x^4\lambda(x^2))(1+x^4\lambda(x^2)),$$

und also auch

$$R_{(n+1)} = 1+x^4\lambda(x^2).$$

Im zweiten Falle haben wir

$$R_{(n+1)} = (1+x^4\lambda(x^2)-k^2x^4(\lambda(x^2))^2)(1+x^4\lambda(x^2)),$$

also

$$R_{(n+1)} = (1+x^4\lambda(x^2))(1+x^4\lambda(x^2)),$$

oder ebenfalls

$$R_{(n+1)} = 1+x^4\lambda(x^2).$$

In beiden Fällen also hat $R_{(n+1)}$ die Form $1+x^4\lambda(x^2)$, wenn R_n und $R_{(n-1)}$ diese Form haben, und in beiden Fällen ist also $\overset{1}{D}=0$, wenn diese Gleichung für die beiden vorhergehenden Werthe von n richtig ist. Da nun für $n=1$ und $n=2$, $\overset{1}{D}=0$ ist, so ist auch $\overset{1}{D}=0$ für $n=3$, also auch für $n=4$, u. s. w.

Wird das Product

$$R_n = \mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)$$

nach Potenzen von $\mathrm{sn}^2 u$ entwickelt, so wird der Coefficient $\overset{1}{D}$ von $\mathrm{sn}^2 u$ zu der Summe aller einzelnen Brüche, welche aus dem allgemeinen Gliede $-\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}$ dadurch hergeleitet werden, dafs man sich auf solche Verbindungen der Werthe von 2α mit den Werthen von $(2\beta+1)$ beschränkt, welche für ein gerades n unter (2.) und für ein ungerades n unter (5.) im §. 150. angegeben sind. Bezieht sich das Summenzeichen S' auf die angegebenen Verbindungen, so ist die Gleichung $\overset{1}{D} = 0$ einerlei mit

$$\textbf{1.} \qquad S'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right] = 0,$$

und es gilt also auch diese Gleichung, die Zahl n des Regulators $\overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha K + (2\beta+1) i K'}{n}$ mag gerade oder ungerade sein.

Wir stellen diese Gleichung auch noch anders dar. Ist n eine gerade Zahl, so ist, weil $\mathrm{sn}(u + iK') = \frac{1}{k \,\mathrm{sn}\, u}$, auch

$$\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha + (2\beta+1) i K'}{n} + iK'\right) = \frac{1}{k \,\mathrm{sn}\, \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}.$$

Setzt man nun $(2\beta+1) + (2\beta'+1) = n$, so ist

$$\frac{(2\beta+1) i K'}{n} + iK' = 2iK' - \frac{(2\beta'+1)}{n} iK',$$

also

$$\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha - (2\beta'+1) i K'}{n}\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}.$$

Summirt man diese Gleichung mit Rücksicht auf (2.) im §. 150., so erhält man für ein gerades n

$$S'\left[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)\right] = \frac{1}{k} \cdot S'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$$

und der Gleichung (1.) gemäfs ist also für

2. *ein gerades* n auch $S'\left[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)\right] = 0$.

Ist n aber eine ungerade Zahl, so mufs $(2\beta+1) + 2\beta' = n$ gesetzt werden; dann folgt

$$\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha \mp 2\beta' i K'}{n}\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right)},$$

und hieraus erhält man durch Summation und wegen der Gleichung (1.) für

3. *ein ungerades n* die Formel $S'[\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)] = 0$.

§. 152.

Relationen unter den Coefficienten im Zähler und Nenner des entwickelten Ausdrucks von $\mathrm{sn}(nu)$.

Setzen wir wieder für *ein gerades n*, wie in §. 150.,

$$1.\quad \mathrm{sn}(nu) = n.\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{sn}\,u+\overset{1}{A}.\mathrm{sn}^3u+\overset{2}{A}.\mathrm{sn}^5u\ldots.+\overset{m-2}{A}.\mathrm{sn}^{2m-3}u}{1+\overset{1}{D}.\mathrm{sn}^2u+\overset{2}{D}.\mathrm{sn}^4u\ldots.+\overset{m}{D}.\mathrm{sn}^{2m}u},$$

indem der Kürze wegen $m = \frac{nn}{2}$ genommen wird, und hierin $u+iK'$ für u, so verwandelt sich $\mathrm{sn}\,u$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}$, $\mathrm{cn}\,u$ in $\frac{-i\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}$, $\mathrm{dn}\,u$ in $-\frac{i\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$, also $\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$ in $-\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}^2u}$; ferner verwandelt sich der Zähler des beigefügten Bruches in

$$\frac{\overset{m-2}{A}\,k\,\mathrm{sn}\,u+\overset{m-3}{A}\,(k\,\mathrm{sn}\,u)^3+\overset{m-4}{A}\,(k\,\mathrm{sn}\,u)^5\ldots.+(k\,\mathrm{sn}\,u)^{2m-3}}{(k\,\mathrm{sn}\,u)^{2m-2}},$$

der Nenner aber in

$$\frac{\overset{m}{D}+\overset{m-1}{D}\,(k\,\mathrm{sn}\,u)^2+\overset{m-2}{D}\,(k\,\mathrm{sn}\,u)^4\ldots.+(k\,\mathrm{sn}\,u)^{2m}}{(k\,\mathrm{sn}\,u)^{2m}},$$

nu in $nu+niK'$, also $\mathrm{sn}(nu)$ wieder in $\mathrm{sn}(nu)$, da n eine gerade Zahl ist; es ist mithin auch

$$\mathrm{sn}(nu) = n\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{-\overset{m-2}{A}\,k^2\,\mathrm{sn}\,u-\overset{m-3}{A}\,k^4\,\mathrm{sn}^3u-\overset{m-4}{A}\,k^6\,\mathrm{sn}^5u\ldots.-k^{2m-2}\,\mathrm{sn}^{2m-3}u}{\overset{m}{D}+\overset{m-1}{D}\,k^2\,\mathrm{sn}^2u+\overset{m-2}{D}\,k^4\,\mathrm{sn}^4u\ldots.+k^{2m}.\mathrm{sn}^{2m}u}.$$

Wird dieser Ausdruck wieder mit dem vorigen identificirt, so erhält man

$$\begin{aligned}
-\overset{m-2}{A}.k^2 &= \overset{m}{D} && \text{und} && \overset{m-1}{D} = \overset{1}{D} = 0,\\
-\overset{m-3}{A}.k^4 &= \overset{1}{A}.\overset{m}{D} && - && \overset{m-2}{D}.k^4 = \overset{2}{D}.\overset{m}{D},\\
-\overset{m-4}{A}.k^6 &= \overset{2}{A}.\overset{m}{D} && - && \overset{m-3}{D}.k^6 = \overset{3}{D}.\overset{m}{D},\\
-\overset{m-5}{A}.k^8 &= \overset{3}{A}.\overset{m}{D} && - && \overset{m-4}{D}.k^8 = \overset{4}{D}.\overset{m}{D},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-k^{2m-2} &= \overset{m-2}{A}.\overset{m}{D} && - && k^{2m} = \overset{m}{D}.\overset{m}{D}.
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar $\overset{m}{D} = \pm k^m$, und es bleibt nur noch das Vorzeichen sorgfältiger zu bestimmen. Aus der Gleichung

$\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{sn}\,(u+iK') = \frac{1}{k}$ folgt

$$\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K \mp (2\beta+1)iK'}{n}\right).\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta'+1)iK'}{n}\right) = \frac{1}{k} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{sn}\left(\frac{(2\beta+1)iK'}{n}\right).\,\mathrm{sn}\left(\frac{(2\beta'+1)iK'}{n}\right) = -\frac{1}{k}.$$

Werden diese Gleichungen nach der Vorschrift (2.) für den Regulator $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ im §. 150. specialisirt und mit einander multiplicirt, so kommt die zweite Gleichung nur $\frac{n}{2}$ mal zur Anwendung, und es ist also

$$\mathrm{P}'\left[\mathrm{sn}\,\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\right].\mathrm{P}'\left[\mathrm{sn}\,\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\right] = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{k^{\frac{nn}{2}}} \quad \text{oder} \quad \mathrm{P}'\left[\mathrm{sn}^2\,\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\right] = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{k^m}.$$

Da aber auch durch die wirkliche Multiplication gefunden wird

$$\overset{m}{D} = (-1)^m.\,\mathrm{P}'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2\,\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right],$$

so ist $\overset{m}{D} = (-1)^m.(-1)^{\frac{n}{2}}.k^m = (-1)^{\frac{n}{2}}.k^m$, da $m = \frac{n^2}{2}$ eine gerade Zahl ist. Ferner ist auch $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ ungerade oder gerade, jenachdem $\frac{n}{2}$ ungerade oder gerade ist, daher ist $(-1)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{nn}{4}} = (-1)^{\frac{m}{2}}$, und also endlich

$$\overset{m}{D} = (-1)^{\frac{m}{2}}.k^m,$$

folglich

$$2.\quad \begin{cases} \overset{m-2}{A} = (-1)^{\frac{m}{2}-1}.k^{m-2} & \text{und} \quad \overset{m-1}{D} = \overset{1}{D} = 0, \\ \overset{m-3}{A} = (-1)^{\frac{m}{2}-1}.k^{m-4}.\overset{1}{A} & \text{-} \quad \overset{m-2}{D} = (-1)^{\frac{m}{2}}.k^{m-4}.\overset{2}{D}, \\ \overset{m-4}{A} = (-1)^{\frac{m}{2}-1}.k^{m-6}.\overset{2}{A} & \text{-} \quad \overset{m-3}{D} = (-1)^{\frac{m}{2}}.k^{m-6}.\overset{3}{D}, \\ \overset{m-5}{A} = (-1)^{\frac{m}{2}-1}.k^{m-8}.\overset{3}{A} & \text{-} \quad \overset{m-4}{D} = (-1)^{\frac{m}{2}}.k^{m-8}.\overset{4}{D} \\ \text{u. s. w.} & \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzt man aber für ein *ungerades* n, wie in §. 150.,

$$3.\quad \mathrm{sn}(nu) = n.\,\frac{\mathrm{sn}\,u + \overset{1}{A}\,\mathrm{sn}^3\,u + \overset{2}{A}\,\mathrm{sn}^5\,u \ldots + \overset{m}{A}\,\mathrm{sn}^{2m+1}\,u}{1 + \overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2\,u + \overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4\,u \ldots + \overset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{2m}\,u},$$

indem der Kürze wegen $m = \frac{nn-1}{2}$ genommen wird, und $u+iK'$ für u, wodurch sich $\mathrm{sn}\,u$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}$ und $\mathrm{sn}(nu)$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(nu)}$ verwandelt, so verwandelt sich der Nenner in

$$\frac{\overset{m}{D}+\overset{m-1}{D}\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,u+\overset{m-2}{D}\,k^4\,\mathrm{sn}^4\,u\ldots.+k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m}\,u}{k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m}\,u},$$

und der Zähler in

$$\frac{\overset{m}{A}+\overset{m-1}{A}\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,u+\overset{m-2}{A}\,k^4\,\mathrm{sn}^4\,u\ldots.+k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m}\,u}{k^{2m+1}.\,\mathrm{sn}^{2m+1}\,u};$$

daher erhält man

$$\mathrm{sn}\,(nu)=\frac{1}{n}.\frac{\overset{m}{D}\,\mathrm{sn}\,u+\overset{m-1}{D}\,k^2\,\mathrm{sn}^3\,u+\overset{m-2}{D}\,k^4\,\mathrm{sn}^5\,u\ldots.+k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m+1}\,u}{\overset{m}{A}+\overset{m-1}{A}\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,u+\overset{m-2}{A}\,k^4\,\mathrm{sn}^4\,u\ldots.+k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m}\,u},$$

und weil dieser Ausdruck mit dem Ausdrucke (3.) einerlei sein muſs, so findet man die folgenden Gleichungen:

$$\overset{m}{D}=n^2.\overset{m}{A}\qquad\text{und}\qquad\overset{m-1}{A}=\overset{1}{D}=0,$$

$$k^2.\overset{m-1}{D}=n^2.\overset{1}{A}.\overset{m}{A}\quad-\quad\overset{m-2}{A}.k^4=\overset{2}{D}.\overset{m}{A},$$

$$k^4.\overset{m-2}{D}=n^2.\overset{2}{A}.\overset{m}{A}\quad-\quad\overset{m-3}{A}.k^6=\overset{3}{D}.\overset{m}{A},$$

$$k^6.\overset{m-3}{D}=n^2.\overset{3}{A}.\overset{m}{A}\quad-\quad\overset{m-4}{A}.k^8=\overset{4}{D}.\overset{m}{A},$$

u. s. w. u. s. w.

$$k^{2m}=n^2.\overset{m}{A}^2\quad-\quad k^{2m}=\overset{m}{A}.\overset{m}{D}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt $\overset{m}{A}=\pm\frac{k^m}{n}$, und es bleibt nur blofs noch das Vorzeichen zu bestimmen. Durch die wirkliche Multiplication erhält man nach Formel (6.) des §. 150. die Bestimmung

$$\overset{m}{A}=(-1)^m.\,\mathrm{P}'\left[\frac{1}{\sin^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right],$$

und da, wenn $n=2r+1$ gesetzt wird, $\frac{n^2-1}{2}=2r+2r^2=m$ eine gerade Zahl ist, so ist $(-1)^m=+1$, also zunächst $\overset{m}{A}=\mathrm{P}'\left[\frac{1}{\sin^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right]$. Ist nun α nicht Null, so gehört zu einem Modular-Sinus $\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right)=F+Gi$, allemal ein Modular-Sinus $\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K-2\beta iK'}{n}\right)=F-Gi$, und das Product beider F^2+G^2 ist also immer positiv: um so mehr also das Product ihrer Quadrate. Da es nur noch auf die Bestimmung ankommt, ob $\overset{m}{A}$ positiv oder negativ sei, so können wir alle die Modular-Sinus sogleich weglassen, welche $\frac{2\alpha K}{n}$ als reellen Theil ihres Argumentes haben. Hiernach hat also $\overset{m}{A}$ einerlei Vorzeichen mit dem Producte

$$\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}\cdot\sin^2\frac{4iK'}{n}\cdot\mathrm{sn}^2\frac{6iK'}{n}\cdots\cdot\mathrm{sn}^2\frac{(n-1)iK'}{n}$$

oder mit

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\mathfrak{Sn}^2\frac{2K'}{n}\cdot\mathfrak{Sn}^2\frac{4K'}{3}\cdot\mathfrak{Sn}^2\frac{6K'}{n}\cdots\cdot\mathfrak{Sn}^2\frac{n-1}{n}K',$$

und da die hier vorkommenden hyperbolischen Modular-Sinus sämmtlich positiv sind, so ist

$$\overset{m}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{k^m}{n},\quad\text{und folglich}\quad\overset{m}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot nk^m,$$

Durch die Substitution dieser Werthe verwandeln sich die vorigen Formeln in

$$\overset{m-1}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot nk^{m-2}\cdot\overset{1}{A}\quad\text{und}\quad\overset{m-1}{A}=\overset{1}{D}=0,$$

$$\overset{m-2}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot nk^{m-4}\cdot\overset{2}{A}\quad\text{-}\quad\overset{m-2}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{k^{m-4}}{n}\cdot\overset{2}{D},$$

$$\overset{m-3}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot nk^{m-6}\cdot\overset{3}{A}\quad\text{-}\quad\overset{m-3}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{k^{m-6}}{n}\cdot\overset{3}{D},$$

$$\overset{m-4}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot nk^{m-8}\cdot\overset{4}{A}\quad\text{-}\quad\overset{m-4}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{k^{m-8}}{n}\cdot\overset{4}{D}$$

u. s. w. u. s. w.

§. 153.

Mehrgliederiger Ausdruck für $\mathrm{sn}^2(nu)$ für ein gerades n, desgleichen für $\mathrm{cn}^2(nu)$ und $\mathrm{dn}^2(nu)$.

Die in §. 150. gefundene Formel kann auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{sn}(nu)=n.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}\cdot\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]},$$

da die Anzahl der Factoren eines jeden Productes P' eine gerade Zahl ist. Ferner ist

$$\overset{m-2}{A}=(-1)^{m-2}.\mathrm{P}'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right]\quad\text{und}\quad\overset{m}{D}=(-1)^m.\mathrm{P}'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right];$$

also ist

$$\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}=\frac{\overset{m-2}{A}}{\overset{m}{D}}=-\frac{1}{k^2},$$

und mithin

$$\frac{k\,\mathrm{sn}(nu)}{n}=-\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{k}\cdot\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.$$

Setzt man nun $\frac{k\,\mathrm{sn}(nu)}{n} = \lambda$ und $\mathrm{sn}\,u = x$, so erhält man, wenn man diese Gleichung zum Quadrate erhebt, um sie rational zu machen:

$$\lambda^2 . \mathrm{P}'[x^2 - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]^2 = \frac{x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)}{k^2} . \mathrm{P}'[x^2 - \mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]^2, \text{ oder}$$

$$\mathbf{1.}\quad \mathrm{P}'[x^2 - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]^2 - \frac{1}{\lambda^2}x^2(x^2-1)\left(x^2 - \frac{1}{k^2}\right).\mathrm{P}'[x^2 - \mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)^2]^2 = 0.$$

Die höchste Potenz von x in dieser Gleichung ist x^{2nn}, da das Product $\mathrm{P}'[x^2 - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]^2$ nach §. 150. eine durch $\frac{nn}{2}$ ausgedrückte Menge von Factoren des vierten Grades hat; der Coefficient dieser Potenz ist $= 1$; die nächst niedrige Potenz x^{2nn-2} hat zum Coefficienten $\frac{-1}{\lambda^2} - 2\mathrm{S}'\,\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ und überhaupt erhält die Gleichung die Form

$$x^{2nn} - \overset{1}{g}\,x^{2nn-2} + \overset{2}{g}\,x^{2nn-4} - \overset{3}{g}\,x^{2nn-6} \ldots . \pm \overset{nn}{g} = 0.$$

Sie dient zur Herleitung von $x = \mathrm{sn}\,u$ aus $\lambda = \frac{k\,\mathrm{sn}(nu)}{n}$. Da keine Potenzen von x mit einem ungeraden Exponenten in dieser Gleichung vorkommen, so hat sie $\frac{nn}{2}$ Paare gleicher, aber entgegengesetzter Wurzeln. $x = +\mathrm{sn}\,u$ und $x = -\mathrm{sn}\,u$ sind zwei solche Wurzeln und der Ausdruck auf der linken Seite ist also theilbar durch $x^2 - \mathrm{sn}^2 u$. Sollen $x = +\mathrm{sn}\,u'$ und $x = -\mathrm{sn}\,u'$ zwei andere Wurzeln der Gleichung (1.) sein, so müssen sie so beschaffen sein, dafs $\mathrm{sn}(nu') = \mathrm{sn}(nu)$ ist. Da nun aber überhaupt $\mathrm{sn}[(-1)^\alpha(nu + 2\alpha K + 2\beta i K')] = \mathrm{sn}\,u$ ist, so schliefst man, dafs überhaupt $nu' = (-1)^\alpha(nu + 2\alpha K + 2\beta i K')$ ist, oder einfacher

$$u' = (-1)^\alpha\left(n + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right).$$

Nimmt man auf beiden Seiten den Modular-Sinus mit dem Modul k, so ist $x = (-1)^\alpha\,\mathrm{sn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)$ und $x = -(-1)^\alpha\,\mathrm{sn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)$ die allgemeine Darstellung eines Paares gleicher und entgegengesetzter Wurzeln; also ist

$$x^2 - \mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)$$

die allgemeine Form der Factoren der Gleichung (1.). Nehmen wir die Zahlen α und β positiv und kleiner als n, also

$$\alpha = 0,\ +2,\ +4,\ +6,\ \ldots .\ +(n-1),$$
$$\beta = 0,\ +2,\ +4,\ +6,\ \ldots .\ +(n-1),$$

und verbinden alle Werthe von α mit allen Werthen von β, so erhalten wir nn Verbindungen; und bezeichnen wir das aus dem allgemeinen Factor gebildete Product mit $\overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}$, so ist

$$2. \quad \overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}\left[x^2 - \mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right] = 0$$

eine Gleichung, welche mit der Gleichung (1.) die gleichen Wurzeln hat. Die höchste Potenz von x in dieser Gleichung ist x^{3nn} und ihr Coefficient ist $= 1$; wie in der Gleichung (1.). Um zu zeigen, dafs die Wurzeln dieser Gleichung, welche auch der Gleichung (1.) Genüge leisten, wirklich verschieden sind, nehme man an, dafs

$$\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha' K + 2\beta' i K'}{n}\right)$$

sei; dann folgt, dafs $u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n} = u + \frac{2\alpha' K + 2\beta' i K'}{n} + 2pK + 2qiK'$ sei, wenn p und q ganze Zahlen vorstellen; dafs also

$$(2\alpha - 2\alpha' - 2pn)K + (2\beta - 2\beta' - 2qn)iK',$$

folglich $\alpha = \alpha' + pn$ und $\beta = \beta' + qn$ sei; was ungereimt ist, da jede der Zahlen α, β, α', β' kleiner als n sein soll.

Wird die Gleichung (2.) entwickelt, so findet sich, als Coefficient der Potenz x^{2nn-2} in ihr,

$$-\overset{n-1}{\underset{0}{S}}\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

und da der Coefficient eben dieser Potenz in der Gleichung (1.) $= -\overset{1}{g}$ ist, so ist

$$\overset{n-1}{\underset{0}{S}}\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right] = \frac{1}{\lambda^2} + 2S'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)].$$

Da aber der Formel (2.) im §. 151. gemäfs $S'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)] = 0$ für ein gerades n ist, so haben wir

$$3. \quad \frac{n^2}{k^2 \mathrm{sn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}}\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

und das Summationszeichen $\overset{n-1}{\underset{0}{S}}$ in dieser Formel giebt zu erkennen, dafs für α und β alle vorhin angegebenen Werthe gesetzt werden sollen. Die Summe auf der rechten Seite begreift also nn einzelne Glieder.

Setzt man $u + iK'$ für u, so bleibt $\mathrm{sn}(nu)$ ungeändert, da n eine gerade Zahl ist, und man erhält also

$$4. \quad \frac{n^2}{\mathrm{sn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}}\left\{\frac{1}{\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)}\right\}.$$

Subtrahirt man von jedem Gliede auf der rechten Seite Eins, so mufs man auf der linken Seite n^2 subtrahiren. Dadurch erhält man

$$5. \quad \frac{n^2}{\mathrm{tn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left\{ \frac{1}{\mathrm{tn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)} \right\}.$$

Subtrahirt man jedes Glied der Gleichung (3) auf der rechten Seite von Eins, so erhält man

$$6. \quad -\frac{n^2 \,\mathrm{dn}^2(nu)}{k^2 \,\mathrm{sn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\mathrm{cn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right) \right] = -\frac{k'^2}{k^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{cn}^2(nu)}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $u + \frac{K}{n}$ für u, so erhält man

$$7. \quad -\frac{k'^2}{k^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{cn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\mathrm{cn}^2\left(u + \frac{(2\alpha+1)K + 2\beta i K'}{n}\right) \right].$$

Multiplicirt man die Gleichung (3.) mit k^2, und subtrahirt auf der rechten Seite jedes Glied von Eins, so erhält man

$$8. \quad -\frac{n^2}{\mathrm{tn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\mathrm{dn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right) \right]$$

Setzt man in der Gleichung (3.) $u + \frac{iK'}{n}$ für u, so wird sie

$$9. \quad n^2 . \mathrm{sn}^2(nu) = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + (2\beta+1) i K'}{n}\right) \right].$$

Subtrahirt man jedes Glied auf der rechten Seite von Eins, so entsteht

$$10. \quad n^2 . \mathrm{cn}^2(nu) = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\mathrm{cn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + (2\beta+1) i K'}{n}\right) \right].$$

Multiplicirt man aber die Gleichung (9.) zuvor mit k^2, so erhält man

$$11. \quad n^2 . \mathrm{dn}^2(nu) = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\mathrm{dn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + (2\beta+1) i K'}{n}\right) \right].$$

Zusatz. In Formel (9.) wird 2α höchstens $= 2n-2$ und $2\beta+1$ höchstens $= 2n-1$. Sind nun $2\alpha'$ und $2\beta'+1$ gröfser als n, so kann man sie durch $2\alpha' = 2n - 2\alpha$ und $2\beta'+1 = 2n-(2\beta+1)$ darstellen, und dann sind 2α und $2\beta'+1$ ganze positive Zahlen, welche $< n$ sind. Da nun

$$\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha' K + (2\beta'+1) i K'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha' K - (2\beta+1) i K'}{n}\right)$$

$$= \mathrm{sn}^2\left(u + \frac{-2\alpha K + (2\beta'+1) i K'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(u + \frac{-2\alpha K - (2\beta+1) i K'}{n}\right)$$

ist, so kann man die Gleichung (9.), mit Anwendung der Bezeichnung des §. 150., auch also darstellen:

$n^2 . \mathrm{sn}^2(nu) = S' [\mathrm{sn}^2(u + \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \mathrm{sn}^2(u - \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta))]$. Eben so ist

$n^2 . \mathrm{cn}^2(nu) = S' [\mathrm{cn}^2(u + \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \mathrm{cn}^2(u - \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta))]$,

$n^2 . \mathrm{dn}^2(nu) = S' [\mathrm{dn}^2(u + \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \mathrm{dn}^2(u - \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta))]$.

Bei Beachtung des Schemas (2.) (in §. 150.) der Specialisirung des Regulators $\varrho(\alpha, \beta)$ erhält man $\frac{nn}{2}$ Glieder aus den allgemeinen hinter S' stehenden Gliedern, und da jedes aus zwei Gliedern besteht, so erhält man nn Glieder zu summiren; wie vorhin.

§. 154.

Vielgliederiger Ausdruck von $\mathrm{sn}(nu)$ für ein ungerades n; ferner für $\mathrm{sn}^2(nu)$, $\mathrm{cn}^2(nu)$ und $\mathrm{dn}^2(nu)$.

Nach §. 152. ist für ein ungerades n, wenn wieder $m = \frac{nn-1}{2}$ und $\mathrm{sn}\,u = x$ gesetzt wird,

$$\frac{\mathrm{sn}(nu)}{n}\left(x^{2m} + \frac{D}{D}^{m-1}_{m} x^{2m-2} \ldots + \frac{1}{D}^{}_{m}\right) = \frac{A}{D}^{m}_{m}\left(x^{2m+1} + \frac{A}{D}^{m-1}_{m} x^{2m-1} \ldots + \frac{1}{D}^{}_{m} . x\right),$$

oder, da $\frac{A}{D}^{m}_{m} = \frac{1}{nn}$ ist,

$$1.\quad x^{2m+1} + \frac{A}{D}^{m-1}_{m} x^{2m-1} + \frac{A}{D}^{m-2}_{m} x^{2m-3} \ldots \frac{x}{D}^{}_{m} - n\,\mathrm{sn}(nu)\left(x^{2m} + \frac{D}{D}^{m-1}_{m} x^{2m-2} \ldots + \frac{1}{D}^{}_{m}\right) =$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = \mathrm{sn}\,u$, und soll $\mathrm{sn}\,u'$ eine zweite sein, so mufs $\mathrm{sn}(nu') = \mathrm{sn}(nu)$ sein, und hieraus findet man, wie vorher, $u = (-1)^{\alpha}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)$; also ist

$$x = (-1)^{\alpha} . \mathrm{sn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)$$

die allgemeine Form aller Wurzeln der Gleichung (1.). Nimmt man

$$\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \frac{n-1}{2},$$

$$\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \frac{n-1}{2}$$

und verbindet alle Werthe von α mit allen Werthen von β, so erhält man nn Verbindungen. Der Grad der Gleichung (1.) ist aber ebenfalls $2m+1 = nn$; und da alle aus der genannten Specialisirung hervorgehenden Werthe von x von einander verschieden sind, so sind sie gerade die nn Wurzeln der Gleichung (1.), die wir durch x, x', x'', x''' etc. vorstellen. Da der Coefficient der höchsten Potenz von x in der Gleichung (1.) Eins ist, so ist der Coefficient von x^{2m} die negative Summe der Wurzeln, also

$$n\,\mathrm{sn}(nu) = x + x' + x'' + x''' + \text{etc.}$$

oder

$$2.\qquad n\,\mathrm{sn}(nu) = S(-1)^{\alpha}\,\mathrm{sn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right).$$

Bezeichnet man die Summe der Quadrate der Wurzeln mit s und die Summe ihrer Binionen mit t, so ist

$$n^2\,\mathrm{sn}^2(nu) = (x + x' + x'' + x''' + \text{etc.})^2 = s + 2t.$$

Die Summe der Binionen der Wurzeln der Gleichung (1.) ist der positive Coefficient von x^{2m-1}; also ist $t = \frac{A}{D}^{m}_{m} = 0$, nach §. 152., da n eine ungerade Zahl ist. Es ist folglich $n^2\,\mathrm{sn}^2(nu) = s$, oder

$$3.\qquad \begin{cases} n^2\,\mathrm{sn}^2(nu) = S\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right], \text{ also} \\ n^2\,\mathrm{cn}^2(nu) = S\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right], \\ n^2\,\mathrm{dn}^2(nu) = S\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right], \end{cases}$$

und in den Formeln (2.) und (3.) sind die Werthe $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ $\pm\frac{n-1}{2}$ mit den Werthen $\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm\frac{n-1}{2}$ zu verbinden.

Nehmen wir Rücksicht auf das Schema der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)$ unter (4.) im §. 150., weil n eine ungerade Zahl ist, so können die vorigen Formeln auch also dargestellt werden:

$$4.\qquad \begin{cases} n\ \mathrm{sn}\ (nu) = \mathrm{sn}\ u + S'\{(-1)^{\alpha}[\mathrm{sn}(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \mathrm{sn}\ (u - \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta))]\}, \\ n^2\,\mathrm{sn}^2(nu) = \mathrm{sn}^2 u + S'[\mathrm{sn}^2(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \mathrm{sn}^2(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta))], \\ n^2\,\mathrm{cn}^2(nu) = \mathrm{cn}^2 u + S'[\mathrm{cn}^2(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \mathrm{cn}^2(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta))], \\ n^2\,\mathrm{dn}^2(nu) = \mathrm{dn}^2 u + S'[\mathrm{dn}^2(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \mathrm{dn}^2(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta))]. \end{cases}$$

§. 155.

Ausdruck von $\mathrm{cn}(nu)$ durch $\mathrm{sn}\,u$ und $\mathrm{cn}\,u$ in der Form eines Products.

Nach §. 149. hat der Ausdruck von $\mathrm{cn}(nu)$ immer denselben Nenner als der von $\mathrm{sn}(nu)$, es mag n eine gerade oder eine ungerade Zahl sein. Nehmen wir zuerst an, dafs n eine *gerade* Zahl sei, so hat der Ausdruck von $\mathrm{cn}(nu)$ zum Zähler eine rationale ganze Function von x^2 oder $\mathrm{sn}^2 u$; daher können wir für ein gerades n setzen:

$$\operatorname{cn}(nu) = g.\frac{\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{a^2}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{b^2}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{c^2}\right)\ldots.}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

und $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ etc. sind nun die Werthe von $\operatorname{sn} u$, für welche $\operatorname{cn}(nu) = 0$ wird, und welche sammt dem constanten Factor g nun allein noch zu ermitteln sind. Soll $\operatorname{cn}(nu) = 0$ sein, so muſs $nu = (2\alpha+1)K + 2\beta i K'$, also $u = \frac{(2\alpha+1)K+2\beta i K'}{n}$ und $x = \operatorname{sn}\left(\frac{(2\alpha+1)K+2\beta i K'}{n}\right)$ sein. Nehmen wir also als zweiten Regulator $\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K+2\beta i K'}{n}$, so erhalten wir

$$\operatorname{cn}(nu) = g.\frac{\mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Da die Ausdrücke von a^2, b^2, c^2 etc. verschieden sein sollen, so specialisirt man den Regulator $\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)$ durch die Verbindungen

1. $\begin{cases}\text{Von } (2\alpha+1) = +1,+3,+5,\ldots.+(n-1) \text{ mit } (2\beta) = \pm 2,\pm 4,\pm 6,\ldots.\pm(n-2) \text{ und}\\ \text{Von } \quad 2\beta = 0 \text{ und } = +n \text{ mit } (2\alpha+1) = +1,+3,+5,\ldots.+(n-1).\end{cases}$

Die Anzahl dieser Verbindungen ist $= \frac{n}{2}.(n-2) + 2.\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$. Wir verwandeln P in P′, um auf diese Vorschrift bei der Specialisirung aufmerksam zu machen. Die Verbindungen aller übrigen Werthe von $2\alpha+1$ und 2β mit einander geben Werthe von $\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)$, welche unter den angegebenen bereits vorkommen, und unter ihnen giebt es keine gleichen Werthe von $\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)$. Setzt man $u = 0$, so erhält man $g = 1$, und es ist also für ein *gerades n:*

$$2. \quad \operatorname{cn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Setzt man in dieser Formel $u = K$, so hat man, da n eine gerade Zahl ist, $\operatorname{cn}(nu) = (-1)^{\frac{n}{2}}$; daher ist

$$(-1)^{\frac{n}{2}} = \frac{\mathrm{P}'[\operatorname{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\operatorname{tn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.$$

Ferner läfst sich die Formel (2.) auch also darstellen:

$$\operatorname{cn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'(\operatorname{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) - \operatorname{cn}^2 u)}{\mathrm{P}'(\operatorname{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) - \operatorname{cn}^2 u)} \cdot \frac{\mathrm{P}'[\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)]},$$

und dividirt man diese Gleichung durch die vorige, so erhält man

$$3. \quad (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{cn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'\left(1 - \dfrac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \dfrac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

Ist n eine *ungerade* ganze Zahl, so findet man, wie vorhin,

$$\operatorname{cn}(nu) = \operatorname{cn} u \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Aber die Regulatoren $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ und $\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)$ müssen nun anders specialisirt werden. In Beziehung auf den Regulator $\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) = \dfrac{(2\alpha+1)K + 2\beta i K'}{n}$ hat man die Werthe

$$4. \begin{cases} (2\alpha+1) = +1, +3, +5, +7, \ldots + (n-2) \text{ mit } 2\beta = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-1), \\ 2\alpha+1 = n \text{ mit } \quad 2\beta = +2, +4, +5, \ldots + (n-1), \\ \quad 2\beta = 0 \text{ mit } 2\alpha+1 = +1, +3, +5, \ldots + (n-2) \end{cases}$$

zu verbinden, so dafs die Anzahl der Verbindungen, und also auch die der quadratischen Factoren im Zähler des Ausdrucks von $\operatorname{cn}(nu)$

$$= \frac{n-1}{2} \cdot (n-1) + 2 \cdot \frac{(n-1)}{2} = \frac{nn-1}{2} \text{ ist.}$$

Verwandeln wir, mit Hinweisung auf die so eben angegebene Art der Specialisirung des Regulators $\varrho(\alpha,\beta)$, das Zeichen P wieder in P′, so haben wir für ein *ungerades* n:

$$5. \quad \operatorname{cn}(nu) = \operatorname{cn} u \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Setzen wir nun $u = K$, so wird $\dfrac{\operatorname{cn}(nu)}{\operatorname{cn} u} = \dfrac{0}{0}$, und nach einer bekannten Regel findet man das wahre Verhältnifs:

$$= \frac{\partial \operatorname{cn}(nu)}{\partial \operatorname{cn} u} = \frac{n \operatorname{sn}(nu) \operatorname{dn}(nu)}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n;$$

daher ist für ein *ungerades n:*

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} . n = \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha, \beta)]}.$$

Giebt man nun der Gleichung (5.) zuerst die Gestalt

$$\mathrm{cn}(nu) = \mathrm{cn}\, u . \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha, \beta) - \mathrm{cn}^2 u]}{\mathrm{P}'[\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta) - \mathrm{cn}^2 u]} . \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha, \beta)]}$$

und dividirt sie dann durch die vorige Gleichung, so findet man

$$6. \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \mathrm{cn}(nu) = n . \mathrm{cn}\, u . \frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)}.$$

Z u s a t z. Setzt man in der Gleichung (3. §. 150.) ebenfalls $u = K$, so wird $\frac{\mathrm{sn}(nu)}{\mathrm{cn}\, u} = \frac{0}{0}$. Der Werth dieses Verhältnisses ist $\frac{\partial \mathrm{sn}(nu)}{\partial \mathrm{cn}\, u} = \frac{n \mathrm{cn}(nu) \mathrm{dn}(nu)}{-\mathrm{sn}\, u \mathrm{dn}\, u} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} . \frac{n}{k'}$. Im Uebrigen reducirt sich der Ausdruck auf der rechten Seite auf $\frac{nk' . \mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]}$; daher ist für ein *gerades n;*

$$\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{k'^2}.$$

Da nun aber $\overset{m-2}{A} = \mathrm{P}'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$ und $\overset{m}{D} = \mathrm{P}'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$, also $\frac{\overset{m}{D}}{\overset{m-2}{A}} = \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]} = -k^2$ ist, so erhält man, wenn hiermit die vorige Gleichung multiplicirt wird, für ein gerades n,

$$\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{cn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]} = (-1)^{\frac{n}{2}} . \frac{k^2}{k'^2}.$$

Setzt man aber in der Formel (6. §. 150.) auch $u = K$, so erhält man für ein *ungerades n:*

$$\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \frac{1}{n}.$$

Ferner ist $\overset{m}{A} = \mathrm{P}'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$ und $\overset{m}{D} = \mathrm{P}'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$, also

$$\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]} = \frac{\overset{m}{D}}{\overset{m}{A}} = n^2 \text{ (nach §. 152.);}$$

und wird die vorige Gleichung hiermit multiplicirt, so entsteht für ein *ungerades n:*

$$\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{cn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n.$$

§. 156.

Ausdruck von $\mathrm{dn}(nu)$ durch $\mathrm{sn}\,u$ und $\mathrm{dn}\,u$ in der Form eines Productes.

Auch der Ausdruck von $\mathrm{dn}(nu)$ hat mit dem von $\mathrm{sn}(nu)$ denselben Nenner; und da der Zähler für ein gerades n eine rationale Function von $\mathrm{sn}^2 u$ ist, so kann der Ausdruck von $\mathrm{dn}(nu)$ vorgestellt werden durch

$$\mathrm{dn}(nu) = g.\frac{\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{a^2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{b^2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{c^2}\right)\ldots.}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

und a^2, b^2, c^2 etc. sind nun alle von einander verschiedene Werthe von $\mathrm{sn}^2 u$, für welche $\mathrm{dn}(nu) = 0$ ist. Da überhaupt $\mathrm{dn}((2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK') = 0$ ist, so ist $\mathrm{dn}(nu) = 0$, wenn $nu = (2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'$, also $u = \frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}$ und $\mathrm{sn}^2 u = \mathrm{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}\right)$ ist. Nimmt man zum Regulator $\overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}$, so hat man

$$\mathrm{dn}(nu) = \frac{\mathrm{P}\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)};$$

indem sich $g = 1$ findet, wenn man $u = 0$ setzt. Sollen alle Werthe von $\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)$ verschieden werden, so hat man sich bei der Specialisirung des Regulators $\overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)$ auf folgende Verbindungen zu beschränken:

1. $(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots. +(n-1)$ mit $(2\beta+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots. \pm(n-1)$, deren Anzahl $= \frac{n}{2}.n = \frac{nn}{2}$ ist. Und verwandeln wir, um dieses anzudeuten, wieder P in P′, so erhalten wir für ein *gerades n:*

$$2.\quad \mathrm{dn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Da $1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)} = \frac{k^2 \mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) - k^2 \mathrm{sn}^2 u}{k^2 \mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)} = \frac{\mathrm{dn}^2 u - \mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}{k^2 \mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}$, so erhält man

$$\mathrm{dn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'(\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) - \mathrm{dn}^2 u)}{\mathrm{P}'(\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) - \mathrm{dn}^2 u)} \cdot \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $u = K \pm iK'$, so ist $\mathrm{dn}\, u = 0$ und $\mathrm{dn}(nK \pm niK') = (-1)^{\frac{n}{2}}$, da n eine gerade Zahl ist; daher ist

$$(-1)^{\frac{n}{2}} = \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]} \cdot \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]};$$

und wird die vorige Gleichung hierdurch dividirt, so entsteht für ein gerades n:

$$3. \quad (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{dn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Denselben Ausdruck erhält man kürzer, wenn man in der Formel 3. §. 155. ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt.

Ist aber n eine ungerade Zahl, so findet man auf ähnliche Weise, wie vorhin, den Ausdruck

$$\mathrm{dn}(nu) = \mathrm{dn}\, u \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Damit alle Werthe von $\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)$ verschieden von einander sind, hat man sich bei der Specialisirung des Regulators $\overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)$ für ein ungerades n zu beschränken auf die Verbindungen von

$$4. \begin{cases} (2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2) \text{ mit } (2\beta+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (n-2), \\ (2\alpha+1) = n \text{ mit } (2\beta+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2), \\ (2\beta+1) = n \text{ mit } (2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2), \end{cases}$$

deren Anzahl $= \frac{n-1}{2} \cdot (n-1) + 2 \cdot \frac{(n-1)}{2} = \frac{nn-1}{2}$ ist. Verwandelt man, mit Hinweisung auf diese Specialisirung, P in P′, so hat man

$$5. \quad \mathrm{dn}(nu) = \mathrm{dn}\, u \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Stellt man diese Gleichung zuerst also dar:

$$\mathrm{dn}(nu) = \mathrm{dn}\,u \cdot \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) - \mathrm{dn}^2 u]}{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) - \mathrm{dn}^2 u]} \cdot \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]},$$

und setzt $u = K \pm iK'$, also $\mathrm{dn}\,u = 0$, so verwandelt sich das Verhältnifs $\frac{\mathrm{dn}(nu)}{\mathrm{dn}\,u}$ in $\frac{0}{0}$. Nimmt man aber $\frac{\partial\,\mathrm{dn}(nu)}{\partial\,\mathrm{dn}\,u} = \frac{n\,\mathrm{sn}(nu)\,\mathrm{cn}(nu)}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}$ und setzt hierin $u = K \pm iK$, so ist $\mathrm{sn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{k}$, $\mathrm{cn}(nu) = \pm\frac{k'}{ik}$, $\mathrm{sn}\,u = \frac{1}{k}$ und $\mathrm{cn}\,u = \pm\frac{k'}{ik}$; daher erhält man

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n = \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]} \cdot \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]};$$

und wird die vorige Gleichung hierdurch dividirt, so entsteht

$$6. \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \mathrm{dn}(nu) = n \cdot \mathrm{dn}\,u \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

§. 157.

Uebersicht der Specialisirung der vier Regulatoren und der Ausdrücke für $\mathrm{sn}(nu)$, $\mathrm{cn}(nu)$, $\mathrm{dn}(nu)$.

Wir stellen nun die vorigen Resultate übersichtlich zusammen, mit Angabe der Specialisirungen der Regulatoren.

I. Ist n eine *gerade* Zahl.

$$\textit{Regulator}\ \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{2K\alpha + 2\beta i K'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha) = +2, +4, +6, \ldots + (n-2)$ mit $2\beta = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-2)$,
$2\alpha = 0, n$ mit $2\beta = +2, +4, +6, \ldots + (n-2)$,
$2\beta = 0, n$ mit $2\alpha = +2, +4, +6, \ldots + (n-2)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{n^2-4}{2} = \frac{nn}{2} - 2$.

$$\textit{Regulator}\ \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K + 2\beta i K'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1)$ mit $(2\beta) = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-2)$,
$(2\beta) = 0$ mit $(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1)$,
$(2\beta) = n$ mit $(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn}{2}$.

$$\textit{Regulator}\ \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots +(n-1)$ mit $(2\beta+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm(n-1)$,

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn}{2}$.

$$\textit{Regulator}\ \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha K+(2\beta+1)iK'}{n}.$$

Verbindungen:

$2\alpha = +2, +4, +6, \ldots +(n-2)$ mit $2\beta+1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm(n-1)$,
$2\alpha = 0, n$ mit $(2\beta+1) = +1, +3, +5, \ldots +(n-1)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn}{2}$.

1. $$\operatorname{sn}(nu) = n \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

2. $$\operatorname{cn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

3. $$\operatorname{dn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

oder auch, wenn $m = \frac{nn}{2}$ **gesetzt wird,**

4. $$\operatorname{sn}(nu) = n \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \cdot \frac{\operatorname{sn} u + \overset{1}{A} \operatorname{sn}^3 u + \overset{2}{A} \operatorname{sn}^5 u \ldots + \overset{m-2}{A} \cdot \operatorname{sn}^{2m-3} u}{1 + \overset{1}{D} \operatorname{sn}^2 u + \overset{2}{D} \operatorname{sn}^4 u \ldots + \overset{m}{D} \cdot \operatorname{sn}^{2m} u};$$

5. $$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{cn}(nu) = \frac{1 + \overset{1}{B} \operatorname{cn}^2 u + \overset{2}{B} \operatorname{cn}^4 u \ldots + \overset{m}{B} \operatorname{cn}^{2m} u}{1 + \overset{1}{D'} \operatorname{cn}^2 u + \overset{2}{D'} \operatorname{cn}^4 u \ldots + \overset{m}{D'} \operatorname{cn}^{2m} u},$$

6. $$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{dn}(nu) = \frac{1 + \overset{1}{C} \operatorname{dn}^2 u + \overset{2}{C} \operatorname{dn}^4 u \ldots + \overset{m}{C} \operatorname{dn}^{2m} u}{1 + \overset{1}{D''} \operatorname{dn}^2 u + \overset{2}{D''} \operatorname{dn}^4 u \ldots + \overset{m}{D''} \operatorname{dn}^{2m} u}.$$

II. Ist n eine ungerade Zahl.

$$\textit{Regulator } \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha) = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$ **mit** $2\beta = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-1)$,
$2\alpha = 0$ **mit** $2\beta = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$,
$2\beta = 0$ **mit** $2\alpha = +2, +4, +6, \ldots, + (n-1)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn-1}{2}$.

$$\textit{Regulator } \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K + 2\beta i K'}{u}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$ **mit** $(2\beta) = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-1)$,
$(2\alpha+1) = n$ **mit** $(2\beta) = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$,
$(2\beta) = 0$ **mit** $(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn-1}{2}$.

$$\textit{Regulator } \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1) + (2\beta+1) i K'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$ **mit** $(2\beta+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (n-2)$,
$2\alpha+1 = n$ **mit** $2\beta+1 = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$,
$2\beta+1 = n$ **mit** $2\alpha+1 = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn-1}{2}$.

$$\textit{Regulator } \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha) = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$ **mit** $2\beta+1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (n-2)$,
$2\alpha = 0$ **mit** $2\beta+1 = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$,
$2\beta+1 = n$ **mit** $2\alpha = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn-1}{2}$.

Setzt man zur Abkürzung $m = \frac{nn-1}{2}$, **so ist** $2m+1 = nn$,

$$7.\quad \operatorname{sn}(nu) = n \operatorname{sn} u \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

$$8.\quad \operatorname{cn}(nu) = \operatorname{cn} u.\frac{P'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n\operatorname{cn} u.\frac{P'\left(1-\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

$$9.\quad \operatorname{dn}(nu) = \operatorname{dn} u.\frac{P'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n\operatorname{dn} u.\frac{P'\left(1-\frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

oder auch

$$10.\quad \operatorname{sn}(nu) = n.\frac{\operatorname{sn} u+\overset{1}{A}\operatorname{sn}^3 u+\overset{2}{A}\operatorname{sn}^5 u\ldots.+\overset{m}{A}\operatorname{sn}^{2m+1} u}{1+\overset{1}{D}\operatorname{sn}^2 u+\overset{2}{D}\operatorname{sn}^4 u\ldots.+\overset{m}{D}\operatorname{sn}^{2m} u},$$

$$11.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\operatorname{cn}(nu) = n.\frac{\operatorname{cn} u+\overset{1}{B}\operatorname{cn}^3 u+\overset{2}{B}\operatorname{cn}^5 u\ldots.+\overset{m}{B}\operatorname{cn}^{2m+1} u}{1+\overset{1}{D'}\operatorname{cn}^2 u+\overset{2}{D'}\operatorname{cn}^4 u\ldots.+\overset{m}{D'}\operatorname{cn}^{2m} u},$$

$$12.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\operatorname{dn}(nu) = n.\frac{\operatorname{dn} u+\overset{1}{C}\operatorname{dn}^3 u+\overset{2}{C}\operatorname{dn}^5 u\ldots.+\overset{m}{C}\operatorname{dn}^{2m+1} u}{1+\overset{1}{D''}\operatorname{dn}^2 u+\overset{2}{D''}\operatorname{dn}^4 u\ldots.+\overset{m}{D''}\operatorname{dn}^{2m} u},$$

§. 158.

Relationen unter den Coefficienten in dem entwickelten Zähler und Nenner der Ausdrücke von $\operatorname{cn}(nu)$ und $\operatorname{dn}(nu)$.

Setzt man in der Formel (6. §. 157.) $K-u$ statt u, so verwandelt sich $\operatorname{dn} u$ in $\frac{k'}{\operatorname{dn} u}$ und $\operatorname{dn}(nu)$ wieder in $\operatorname{dn}(nu)$, da n eine gerade Zahl ist. Wir erhalten also

$$(-1)^{\frac{n}{2}}.\operatorname{dn}(nu) = \frac{\overset{m}{C}k'^{2m}+\overset{m}{C}k'^{2m-2}\operatorname{dn}^2 u\ldots.+\operatorname{dn}^{2m} u}{\overset{m}{D''}k'^{2m}+\overset{m-1}{D''}k'^{2m-2}\operatorname{dn}^2 u\ldots.+\operatorname{dn}^{2m} u},$$

und da dieser Ausdruck mit dem Ausdrucke (6.) in §. 157. derselbe sein mufs, so hat man

$$\overset{m}{C} = \overset{m}{D''},$$

$$\overset{m-1}{C} = k'^2.\overset{1}{C}\overset{m}{D''} \quad \text{und} \quad \overset{m-1}{D''} = k'^2.\overset{1}{D''}.\overset{m}{D''},$$

$$\overset{m-2}{C} = k'^4.\overset{2}{C}\overset{m}{D''} \quad - \quad \overset{m-2}{D''} = k'^4.\overset{2}{D''}.\overset{m}{D''},$$

$$\overset{m-3}{C} = k'^6.\overset{3}{C}\overset{m}{D''} \quad - \quad \overset{m-3}{D''} = k'^6.\overset{3}{D''}.\overset{m}{D''},$$

u. s. w. u. s. w.

$$1 = k'^{2m}.\overset{m}{C}\overset{m}{D'} \quad - \quad 1 = k'^{2m}.(\overset{m}{D''})^2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst $\overset{m}{D'} = \overset{m}{C} = \pm\frac{1}{k'^m}$ und es bleibt nur noch das Vorzeichen zu bestimmen übrig. Die wirkliche Multiplication giebt $\overset{m}{C} = \mathrm{P}'\left[\frac{1}{\mathrm{dn}^2\,\overset{s}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right]$.

Zu einem Factor von der Form $\mathrm{dn}\left(\frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}\right)$ gehört immer ein Factor von der Form $\mathrm{dn}\left(\frac{(2\alpha+1)K-(2\beta+1)iK'}{n}\right)$ und das Product eines solchen Paares ist immer positiv, da, wenn der erste Factor $= P \pm Qi$ ist, der andere $= P \mp Qi$, also das Product $= P^2 + Q^2$ ist. Factoren anderer Art erhält man aber bei der Specialisirung des Regulators $\overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)$ nicht, wenn n eine gerade Zahl ist; daher ist für $m = \frac{nn}{2}$:

1.
$$\begin{cases} \overset{m}{C} = \frac{1}{k'^m} & \text{und} \quad \overset{m}{D''} = \frac{1}{k'^m}, \\ \overset{m-1}{C} = \frac{\overset{1}{C}}{k'^{m-2}} & \text{-} \quad \overset{m-1}{D''} = \frac{\overset{1}{D''}}{k'^{m-2}}, \\ \overset{m-2}{C} = \frac{\overset{2}{C}}{k'^{m-4}} & \text{-} \quad \overset{m-2}{D''} = \frac{\overset{2}{D''}}{k'^{m-4}}, \\ \overset{m-3}{C} = \frac{\overset{3}{C}}{k'^{m-6}} & \text{-} \quad \overset{m-3}{D''} = \frac{\overset{3}{D''}}{k'^{m-6}} \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ist aber n eine ungerade Zahl, so verwandelt sich $\mathrm{dn}(nu)$ in $\frac{k'}{\mathrm{dn}(nu)}$, wenn man $K-u$ für u setzt. Die Formel (12.) im §. 157. verwandelt sich nun in

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathrm{dn}(nu) = \frac{1}{n}.\frac{\overset{m}{D''}k'^{2m}\,\mathrm{dn}\,u + \overset{m-1}{D''}k'^{2m-2}\,\mathrm{dn}^3\,u \ldots + \mathrm{dn}^{2m+1}u}{\overset{m}{C}k'^{2m} + \overset{m-1}{C}k'^{2m-2}\,\mathrm{dn}^2\,u \ldots + \mathrm{dn}^{2m}u},$$

und wird sie mit der früheren Formel identificirt, so hat man

$$\begin{aligned} \overset{m}{D''} &= n^2.\overset{m}{C} && \text{und} && \overset{m-1}{C} &= k'^2.\overset{1}{D''}.\overset{m}{C}, \\ \overset{m-1}{D''} &= n^2k'^2.\overset{1}{C}\overset{m}{C} && \text{-} && \overset{m-2}{C} &= k'^4.\overset{2}{D''}.\overset{m}{C}, \\ \overset{m-2}{D''} &= n^2k'^4.\overset{2}{C}\overset{m}{C} && \text{-} && \overset{m-3}{C} &= k'^6.\overset{3}{D''}.\overset{m}{C}, \\ &\cdots\cdots && && &\cdots\cdots\cdots \\ 1 &= n^2k'^{2m}.\overset{m}{C}^2 && \text{-} && 1 &= k'^{2m}.\overset{m}{D''}.\overset{m}{C}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber für $m = \frac{nn-1}{2}$:

$$2.\quad \begin{cases} \overset{m}{D}'' = \frac{n}{k'^m} & \text{und} \quad \overset{m}{C} = \frac{1}{n\,k'^m}, \\ \overset{m-1}{D}'' = \frac{n}{k'^{m-2}}.\overset{1}{C} & - \quad \overset{m-1}{C} = \frac{1}{n\,k'^{m-2}}.\overset{1}{D}'', \\ \overset{m-2}{D}'' = \frac{n}{k'^{m-4}}.\overset{2}{C} & - \quad \overset{m-2}{C} = \frac{1}{n\,k'^{m-4}}.\overset{2}{D}'', \\ \overset{m-3}{D}'' = \frac{n}{k'^{m-6}}.\overset{3}{C} & - \quad \overset{m-3}{C} = \frac{1}{n\,k'^{m-6}}.\overset{3}{D}'' \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Da sich in §. 157. die Formel (6.) in (5.) verwandelt, wenn man ku statt u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt, so erhält man für ein gerades n aus den vorigen Formeln, wenn $m = \frac{nn}{2}$ gesetzt wird,

$$3.\quad \begin{cases} \overset{m}{B} = (-1)^{\frac{m}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^m & \text{und} \quad \overset{m}{D}' = (-1)^{\frac{m}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^m, \\ \overset{m-1}{B} = (-1)^{\frac{m-2}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-2}.\overset{1}{B} & - \quad \overset{m-1}{D}' = (-1)^{\frac{m-2}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-2}.\overset{1}{D}, \\ \overset{m-2}{B} = (-1)^{\frac{m-4}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-4}.\overset{2}{B} & - \quad \overset{m-2}{D}' = (-1)^{\frac{m-4}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-4}.\overset{2}{D}, \\ \overset{m-3}{B} = (-1)^{\frac{m-6}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-6}.\overset{3}{B} & - \quad \overset{m-3}{D}' = (-1)^{\frac{m-6}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-6}.\overset{3}{D} \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

und die Formeln (2.) verwandeln sich für ein ungerades n in

$$4.\quad \begin{cases} \overset{m}{D}' = (-1)^{\frac{m}{2}}.n.\left(\frac{k}{k'}\right)^m & \text{und} \quad \overset{m}{B} = (-1)^{\frac{m}{2}}.\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{k'}\right)^m, \\ \overset{m-1}{D}' = (-1)^{\frac{m-2}{2}}.n.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-2}.\overset{1}{B} & - \quad \overset{m-1}{B} = (-1)^{\frac{m-2}{2}}.\frac{1}{n}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-2}.\overset{1}{D}', \\ \overset{m-2}{D}' = (-1)^{\frac{m-4}{2}}.n.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-4}.\overset{2}{B} & - \quad \overset{m-2}{B} = (-1)^{\frac{m-4}{4}}.\frac{1}{n}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-4}.\overset{2}{D}', \\ \overset{m-3}{D}' = (-1)^{\frac{m-6}{2}}.n.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-6}.\overset{3}{B} & - \quad \overset{m-3}{B} = (-1)^{\frac{m-6}{2}}.\frac{1}{n}.\left(\frac{h}{k'}\right)^{m-6}.\overset{3}{D}' \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

in welchen wieder $m = \frac{nn-1}{2}$ ist. Zu denselben Resultaten gelangt man auch, wenn man in den Formeln (5.) und (11.) §. 157. $u+K+iK'$ statt u setzt, wodurch sich $\mathrm{cn}\,u$ in $\frac{k'}{ik}.\frac{1}{\mathrm{cn}\,u}$ verwandelt, und wenn man die hier-

durch entstehenden neuen Ausdrücke für $\mathrm{cn}(nu)$ mit den vorigen wieder identificirt.

§. 159.

Vielgliedrige Ausdrücke für $\mathrm{cn}(nu)$ und $\mathrm{dn}(nu)$, $\mathrm{am}(nu)$ und $\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(nu)$, worin n eine ungerade Zahl ist.

Setzt man der Kürze wegen für den Augenblick $(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathrm{cn}(nu)=\lambda$ und $\mathrm{cn}\,u=y$, so hat man die Gleichung

$$\frac{\lambda}{n}(\overset{m}{D'}.y^{2m}+\overset{m-1}{D'}.y^{2m-2}....+1)=\overset{m}{B}y^{2m+1}+\overset{m-1}{B}y^{2m-1}+....+y \text{ oder}$$

$$\left(y^{2m+1}+\frac{\overset{m-1}{B}}{\overset{m}{B}}y^{2m-1}....+\frac{y}{\overset{m}{B}}\right)-\frac{\lambda}{n}\left(\frac{\overset{m}{D'}}{\overset{m}{B}}y^{2m}+\frac{\overset{m-1}{D'}}{\overset{m}{B}}y^{2m-2}....+\frac{1}{\overset{m}{B}}\right)=0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $y=\mathrm{cn}\,u$, und ist $\mathrm{cn}\,u'$ eine andere Wurzel, so mufs $\mathrm{cn}(nu')=\mathrm{cn}(nu)$ sein. Eine Folge hiervon ist, dafs nu' von nu um einen Ausdruck von der Form $4\alpha K+4\beta iK'$ verschieden ist. Man kann aber auch, da $2\alpha(n+1)$ und $2\beta(n+1)$ durch 4 theilbar sind,

$$nu'=nu+2\alpha(n+1)K+2\beta(n+1)iK$$

setzen, und hieraus folgt

$$u'=u+2\alpha K+2\beta iK'+\frac{2\alpha K+2\beta iK'}{n}.$$

Also ist

$$\mathrm{cn}\,u'=(-1)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{cn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right)$$

der allgemeine Ausdruck der Wurzeln der obigen Gleichung. Verbindet man nun die Werthe $\alpha=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ ....\pm\frac{n-1}{2}$ mit $\beta=0,\ \pm1,\ \pm3,\ ....\ \pm\frac{n-1}{2}$, so erhält man nn Verbindungen, und die ihnen entsprechenden Werthe von $\mathrm{cn}\,u'$ sind sämmtlich von einander verschieden. Da nun auch $2m+1=nn$ der Grad der obigen Gleichung ist, so sind die genannten Werthe von $\mathrm{cn}\,u'$ gerade die Wurzeln der obigen Gleichung; die negative Summe dieser Wurzeln ist der Coefficient der Potenz y^{2m} in der obigen Gleichung, und also $=-\frac{\lambda}{n}.\frac{\overset{m}{D'}}{\overset{m}{B}}$. Da nun aber $\frac{\overset{m}{D'}}{\overset{m}{B}}=n^2$ nach §. 158. ist, so ist

1. $$n\,\mathrm{cn}(nu)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.S\left[(-1)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{cn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right)\right]$$

und es kann diese Formel auch also dargestellt werden:

$$2.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n\,\mathrm{cn}(nu) = \mathrm{cn}\,u + S'\{(-1)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{cn}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{cn}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]\}.$$

Auf gleiche Weise erhält man die Formel

$$3.\quad n\,\mathrm{dn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.S\left[(-1)^{\beta}\,\mathrm{dn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

in welcher, wie in der Formel (1.), die Werthe $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \ldots \pm \frac{n-1}{2}$ mit den Werthen $\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots . \pm \frac{n-1}{2}$ zu verbinden sind. Es läſst sich diese Formel übrigens auch also darstellen:

$$4.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n.\mathrm{dn}(nu) = \mathrm{dn}\,u + S'\{(-1)^{\beta}[\mathrm{dn}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{dn}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]\}.$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit ∂u und integrirt jedes Glied, so erhält man

$$5.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathrm{am}(nu) = \mathrm{am}\,u + S'(-1)^{\beta}[\mathrm{am}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{am}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

Vertauscht man in dieser Gleichung α mit β und zugleich den Modul k mit k', also auch K mit K', und multiplicirt die Gleichung mit i, so verwandelt sie sich in

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(nui)$$
$$= \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(ui) + S'(-1)^{\alpha}[\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(ui+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(ui-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))],$$

oder, wenn man $\frac{u}{i}$ statt u setzt, in

$$6.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(nu)$$
$$= \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u + S'(-1)^{\alpha}[\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

§. 160.

Zweite Darstellung von $\mathrm{sn}(nu)$, $\mathrm{cn}(nu)$ und $\mathrm{dn}(nu)$ für ein ungerades n, in der Form von Producten.

In §. 154. sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^{2m+1} + \frac{\overset{m-1}{A}}{\overset{m}{D}}x^{2m-1}\ldots + \frac{x}{\overset{m}{D}} - n\,\mathrm{sn}(nu)\left(x^{2m} + \frac{\overset{m-1}{D}}{\overset{m}{D}}x^{2m-2}\ldots + \frac{1}{\overset{m}{D}}\right) = 0$$

gefunden worden, in welcher $m = \frac{nn-1}{2}$ und n eine ungerade Zahl ist. Das von x unabhängige Glied in dieser Gleichung ist $-\frac{n\,\mathrm{sn}(nu)}{\overset{m}{D}}$; oder,

da $\overset{m}{D} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . nk^m$ ist, so ist dieses Glied $= -(-1)^{\frac{n-1}{2}} . \frac{\mathrm{sn}(nu)}{k^m}$. Dasselbe Glied ist aber auch das negative Product aller Wurzeln der Gleichung; daher haben wir

$$\mathrm{sn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{n}} . k^{\frac{nn-1}{2}} . \mathrm{P}\left[(-1)^{\alpha} \mathrm{sn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

wenn in dem allgemeinen Factor des Productes die Werthe $\alpha = 0, \pm 1, \pm 3, \ldots \pm \left(\frac{n-1}{2}\right)$ mit den Werthen $2\beta = 0, \pm 1, \pm 3, \ldots \pm \left(\frac{n-1}{2}\right)$ verbunden werden. Das Product aller aus $(-1)^{\alpha}$ durch Specialisirung entstehenden Factoren ist $= +1$; daher ist

$$1. \quad \mathrm{sn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . k^{\frac{nn-1}{2}} . \mathrm{P}\left[\mathrm{sn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right].$$

In §. 154. sind auch die Wurzeln der Gleichung

$$y^{2m+1} + \frac{\overset{m-1}{B}}{\overset{m}{B}} y^{2m-1} \ldots + \frac{y}{\overset{m}{B}} - \frac{\lambda}{n}\left(\frac{\overset{m}{D'}}{\overset{m}{B}} y^{2m} \ldots + \frac{1}{\overset{m}{B}}\right)$$

gefunden worden. Das von x unabhängige Glied in dieser Gleichung ist $-\frac{\lambda}{n} . \frac{1}{\overset{m}{B}}$, welches sich, da $\lambda = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{cn}(nu)$ und $\frac{1}{\overset{m}{B}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . n\left(\frac{k'}{k}\right)^m$ ist, auf $-\left(\frac{k'}{k}\right)^m \mathrm{cn}(nu)$ reducirt. Daher ist

$$2. \quad \mathrm{cn}(nu) = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}} . \mathrm{P}\left[\mathrm{cn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right].$$

Eben so findet sich

$$3. \quad \mathrm{dn}(nu) = \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}} . \mathrm{P}\left[\mathrm{dn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

und in diesen Formeln sind für α und β dieselben Werthe zu setzen, wie in der vorigen Formel (1.).

Da $\frac{nn-1}{2}$ immer durch 4 theilbar ist, weil $\frac{nn-1}{2} = 2(r+1)r$ ist, wenn $n = 2r+1$ gesetzt wird, so kann man die letzte Formel auch dadurch aus der vorigen herleiten, dafs man ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt, wodurch sich $\left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}}$ in $\left(\frac{1}{ik'}\right)^{\frac{nn-1}{2}} = \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}}$ verwandelt.

Es können die so eben hergeleiteten Formeln auch also dargestellt werden:

$$4. \quad \mathrm{sn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . k^{\frac{nn-1}{2}} . \mathrm{sn}u . \mathrm{P}'\left[\mathrm{sn}\left(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\right) . \mathrm{sn}\left(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\right)\right],$$

5. $\mathrm{cn}(nu) = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}} . \mathrm{cn}\,u . \mathrm{P}'[\mathrm{cn}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) . \mathrm{cn}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]$,

6. $\mathrm{dn}(nu) = \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}} . \mathrm{dn}\,u . \mathrm{P}'[\mathrm{dn}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) . \mathrm{dn}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]$,

wenn sich P′ zugleich auf die vorigen Vorschriften in Betreff der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ beziehet.

§. 161.

Ausdrücke von $\mathrm{el}(nu)$ für ein gerades und ungerades n.

Nach §. 153. ist $n^2 . \mathrm{dn}^2(nu) = S'[\mathrm{dn}^2(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{dn}^2(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))]$ für ein gerades n. Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂u und integrirt, so erhält man für ein *gerades n:*

1. $n . \mathrm{el}(nu) = S'[\mathrm{el}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{el}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))]$

und eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil beide Seiten der Gleichung für $u = 0$ verschwinden. Entwickelt man das allgemeine Glied dieses vielgliedrigen Ausdrucks, in Anwendung der Formel

$$\mathrm{el}(u+a) + \mathrm{el}(u-a) = 2\,\mathrm{el}\,u - \frac{2k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u . \mathrm{sn}^2 a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}\ (\text{§. 65.}),$$

so erhält man, da die Menge der also gefundenen Ausdrücke $= \frac{nn}{2}$ ist, für ein *gerades n* auch die Formel

2. $n . \mathrm{el}(nu) = n^2 . \mathrm{el}\,u - 2k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u . S'\left[\frac{\mathrm{sn}^2\,\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) . \mathrm{sn}^2\,u}\right]$.

Es kann übrigens die Formel (1.) auch also entwickelt werden, dafs jedes Glied des Ausdrucks in einer reellen Form erscheint.

Ist n eine *ungerade* Zahl, so folgt aus der Gleichung

$$n^2\,\mathrm{dn}^2(nu) = \mathrm{dn}^2 u + S'[\mathrm{dn}^2(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{dn}^2(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]$$

auf ähnliche Art die Formel

3. $n . \mathrm{el}(nu) = \mathrm{el}\,u + S'[\mathrm{el}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{el}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]$.

Die Anzahl der einzelnen Doppelglieder, welche aus dem allgemeinen Gliede hinter S' hergeleitet werden, ist $= \frac{n^2-1}{2}$ und durch die Entwicklung dieser Glieder erhält man

4. $n . \mathrm{el}(nu) = n^2 . \mathrm{el}\,u - 2k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u . S'\left[\frac{\mathrm{sn}^2\,\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2\,u}\right]$.

§. 162.

Ausdrücke für $\mathrm{lm}(nu)$, wenn n eine gerade oder eine ungerade ganze Zahl ist.

Multiplicirt man die Gleichung (1.) §. 161. mit ∂u und integrirt, so entsteht

$$\mathrm{lm}(nu) = S'[\mathrm{lm}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{lm}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))] + \text{const.}$$

Setzt man, um die Constante zu finden, $u = 0$ und erwägt, dafs $\mathrm{lm}(-a) = \mathrm{lm}(+a)$ ist, so verwandelt sich die Formel für ein *gerades* n in

$$1.\quad \mathrm{lm}(nu) = S'[\mathrm{lm}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{lm}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) - 2.S'[\mathrm{lm}\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)].$$

Da $\mathrm{lm}(u+a)+\mathrm{lm}(u-a) = 2\,\mathrm{lm}\,u + 2\,\mathrm{lm}\,a + \log(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)$ nach §. 73. ist und diese Formel $\frac{nn}{2}$ mal angewandt werden mufs, so erhält man auch für ein *gerades n:*

$$2.\quad \mathrm{lm}(nu) = n^2.\mathrm{lm}\,u + \log \mathrm{P}'[1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta).\mathrm{sn}^2 u].$$

Mit dieser Formel vergleichen wir die in §. 150. für $\mathrm{sn}(nu)$ gefundene Formel. Setzen wir darin zunächst $u+iK$ statt u, wodurch $\mathrm{sn}(nu)$ nicht verändert wird, da n eine gerade Zahl, ist, so verwandelt sich $n\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$ in $\frac{n}{k\,\mathrm{sn}\,u}.\frac{-i\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}.\frac{-i\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} = -\frac{n\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{k^2\,\mathrm{sn}^3 u}$; ferner verwandelt sich der Zähler $\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)$, welcher $\frac{nn}{2}-2$ Factoren hat, in

$$\mathrm{P}'\left(1-\frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 u}\right) = \frac{\mathrm{P}'[1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 u]}{k^{nn-4}.\,\mathrm{sn}^{nn-4}u\,\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]},$$

und der Nenner $\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)$ verwandelt sich in

$$\frac{\mathrm{P}'[1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 u]}{k^{nn}.\,\mathrm{sn}^{nn}u.\,\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}:$$

also erhält man

$$\mathrm{sn}(nu) = -nk^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'[1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 u]}{\mathrm{P}'[1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 u]}.\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.$$

Da ferner $\overset{m-2}{A} = \mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]^{-1}$ und $D = \mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]^{-1}$, also $\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]} = \frac{\overset{m-2}{A}}{D} = -\frac{1}{k^2}$ ist, so verwandelt sich die Formel in

$$\mathrm{sn}(nu) = n\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'[1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta).\mathrm{sn}^2 u]}{\mathrm{P}'[1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta).\mathrm{sn}^2 u]}.$$

Der Nenner dieser Formel ist nach §. 157. gleich $1+\overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2 u+\overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4 u\ldots$ $\ldots+\overset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{nn} u$ für ein gerades n; daher kann die Formel (2.) auch also dargestellt werden:

3. $$\mathrm{lm}(nu)=n^2.\mathrm{lm}\,u+\log(1+\overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2 u+\overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4 u\ldots.+\overset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{2m} u),$$

wo $m=\frac{nn}{2}$ und n eine gerade Zahl ist.

Ist n eine *ungerade* Zahl, und multiplicirt man die Formel (3.) §. 160. mit ∂u, so erhält man durch Integriren,

4. $$\mathrm{lm}(nu)=\mathrm{lm}\,u+S'[\mathrm{lm}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathrm{lm}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]-2\,\mathrm{lm}[\varrho(\alpha,\beta)],$$

und diese Formel verwandelt sich leicht in

5. $$\mathrm{lm}(nu)=n^2.\mathrm{lm}\,u+\log \mathrm{P}'[1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 u].$$

Da für ein ungerades n, $k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha\mp 2\beta' iK'}{n}\right)=\frac{1}{\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha\pm(2\beta)iK'}{n}\right)}$ ist, wenn $(2\beta+1)+2\beta'=n$ gesetzt wird, so kann die vorige Formel auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{lm}(nu)=n^2\,\mathrm{lm}\,u+\log \mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right);$$

und da das hier vorkommende, durch P′ bezeichnete Product gerade der Nenner des Ausdrucks von $\mathrm{sn}(nu)$ in Formel (7.) oder in Formel (10.) §. 157. ist, so ist

6. $$\mathrm{lm}(nu)=n^2.\mathrm{lm}\,u+\log(1+\overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2 u+\overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4 u\ldots.+\overset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{2m} u),$$

wenn in dieser Formel $m=\frac{nn-1}{2}$ und n eine ungerade Zahl ist. Diese Formel hat also mit derjenigen (3.) für ein gerades n, eine grofse Uebereinstimmung.

§. 163.

Ausdrücke für die Modular-Integrale mit dem Argumente nu und dem Parameter na, durch andere mit dem Argumente u und dem Parameter a.

Ist zuerst n eine gerade Zahl, so ist, der Formel (1.) in §. 162. gemäfs, der Unterschied

$$\frac{\mathrm{lm}(nu+na)-\mathrm{lm}(nu-na)}{2}=$$

$$S'\left[\frac{\mathrm{lm}(u+a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2}-\frac{\mathrm{lm}(u-a+\overset{4}{\varrho}(\alpha\,\beta)}{2}+\frac{\mathrm{lm}(u+a-\overset{4}{\varrho}(\alpha\,\beta))}{2}-\frac{\mathrm{lm}(u-a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2}\right].$$

Ferner ist nach §. 116. $\frac{\mathrm{lm}(nu+na)-\mathrm{lm}(nu-na)}{2} = nu.\mathrm{el}(na)-\mathfrak{S}(nu,na)$; sodann

$$\frac{\mathrm{lm}(u+a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2}-\frac{\mathrm{lm}(u-a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2}=(u\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))\,\mathrm{el}\,a-\mathfrak{S}(u\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a).$$

Werden diese Werthe substituirt, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$nu.\mathrm{el}(na)-\mathfrak{S}(nu,na)=$$

$$\mathrm{el}\,a[S'(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+S'(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))]-S'[\mathfrak{S}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a)+\mathfrak{S}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a)].$$

Der Factor von $\mathrm{el}\,a$ in dieser Gleichung ist $=\frac{nn}{2}.2u=nnu$, indem jede Summe S', $\frac{nn}{2}$ Summanden hat; daher entsteht die Gleichung

$$1.\quad \mathfrak{S}(nu,na)$$

$$=nu.\mathrm{el}(na)-nnu.\mathrm{el}\,a+S'[\mathfrak{S}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a)+\mathfrak{S}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a)].$$

Substituirt man aber

$$\frac{\mathrm{lm}(a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)+u)}{2}-\frac{\mathrm{lm}(-a\mp\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)+u)}{2}$$

$$=u.\mathrm{el}(a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))-\mathfrak{S}(u,a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)),$$

so erhält man

$$nu.\mathrm{el}(na)-\mathfrak{S}(nu,na)=$$

$$u.S'[\mathrm{el}(a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathrm{el}(a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))]-S'[\mathfrak{S}(u,a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathfrak{S}(u,a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

Aufserdem ist, der Formel (1.) §. 161. gemäfs,

$$nu.\mathrm{el}(na)=u.S'[\mathrm{el}(a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathrm{el}(a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))],$$

und wird hiervon die vorige Gleichung subtrahirt, so entsteht:

$$2.\quad \mathfrak{S}(nu,na)=S'[\mathfrak{S}(u,a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathfrak{S}(u,a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

In Anwendung der Gleichung (4.) oder (5.) §. 138. auf (1.) oder (2.) erhält man noch:

$$\mathfrak{S}(nu,na)=n^2.\mathfrak{S}(u,a)-2uk^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a.S'\frac{\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2\,a}$$

$$+\log\mathrm{P}'\left[\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2(u+a)}}\right],$$

und da $k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha\pm(2\beta+1)iK'}{n}\right)=\frac{1}{\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha\pm(2\beta'+1)iK'}{n}\right)}$ ist, wenn

$(2\beta+1)+(2\beta'+1)=n$ gesetzt wird, so kann die Gleichung noch etwas

einfacher also dargestellt werden:

$$3. \quad \mathfrak{S}(nu, na)$$

$$= n^2.\mathfrak{S}(u,a) + u.S'\left[\frac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right] - \log \mathrm{P}'\left[\sqrt{\frac{\mathrm{sn}^2(u+a) - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}{\mathrm{sn}^2(u-a) - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}}\right].$$

Ist aber n eine *ungerade* Zahl, so ist, der Gleichung (4.) des §. 162. gemäfs,

$$\frac{\mathrm{lm}(nu+na) - \mathrm{lm}(nu-na)}{2} = \frac{\mathrm{lm}(u+a) - \mathrm{lm}(u-a)}{2} +$$

$$S'\left[\frac{\mathrm{lm}(u+a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2} - \frac{\mathrm{lm}(u-a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}{2} + \frac{\mathrm{lm}(u+a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2} - \frac{\mathrm{lm}(u-a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2}\right].$$

Macht man hierin dieselben Substitutionen wie vorhin, so erhält man

$$nu.\mathrm{el}(na) - \mathfrak{S}(nu, na) = u.\mathrm{el}\,a - \mathfrak{S}(u,a) +$$

$$\mathrm{el}\,a\,[S'(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + S'(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))] - S'[\mathfrak{S}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta),a) + \mathfrak{S}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta),a)].$$

Es ist aber $S'(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + S'(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) = (nn-1)\,u$, da jede Summe aus $\frac{nn-1}{2}$ Theilen besteht. Daher erhält man

$$4. \quad \mathfrak{S}(nu, na) =$$

$$nu.\mathrm{el}(na) - n^2 u.\mathrm{el}\,a + \mathfrak{S}(u,a) + S'[\mathfrak{S}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta),a) + \mathfrak{S}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta),a)].$$

Auf eine ähnliche Weise erhält man noch

$$nu.\mathrm{el}(na) - \mathfrak{S}(nu, na)$$

$$= u.\mathrm{el}\,a - \mathfrak{S}(u,a) + u.S'[\mathrm{el}(a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{el}(a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]$$

$$- S'[\mathfrak{S}(u, a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathfrak{S}(u, a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

Multiplicirt man aber die Gleichung (3.) des §. 161. mit u und subtrahirt davon die vorige Gleichung, so entsteht

$$5. \quad \mathfrak{S}(nu, na) = \mathfrak{S}(u,a) + S'[\mathfrak{S}(u, a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathfrak{S}(u, a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

Wendet man wieder die Formel

$$\mathfrak{S}(u, a+b) + \mathfrak{S}(u, a-b)$$

$$= 2\,\mathfrak{S}(u,a) - \frac{2uk^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b} - \log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{sn}^2(u+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{sn}^2(u-a)}}$$ des §. 138.

und dieselbe $\frac{nn-1}{2}$ mal an, so erhält man

$$\mathfrak{S}(nu, na) = n^2.\mathfrak{S}(u,a) - 2uk^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.S'\frac{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 a}$$

$$- \log \mathrm{P}'\left[\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2(u+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2(u-a)}}\right].$$

Und da für ein ungerades n, $k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha \pm 2\beta i K'}{n}\right) = \frac{1}{\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha \mp (2\beta'+1) i K'}{n}\right)}$ ist,

wenn $(2\beta+1)+2\beta' = n$ gesetzt wird, so erhält man, noch etwas einfacher:

$$6. \quad \Theta(nu, na)$$
$$= n^2.\Theta(u,a) + u.S'\left[\frac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right] - \log \Pi'\left[\frac{\mathrm{sn}^2(u+a) - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}\,\alpha\,\beta)}{\mathrm{sn}^2(u-a) - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right].$$

Diese Formel, in welcher n eine ungerade Zahl ist, ist der Formel (3.) für ein gerades n wieder sehr ähnlich; nur dafs jetzt der Regulator $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$, dem §. 157. gemäfs, anders specialisirt werden mufs.

§. 164.

Differenzial-Gleichungen zur Bestimmung des Zählers und Nenners des Ausdrucks von $\mathrm{sn}(nu)$ für ein ungerades n.

Setzt man $x = \sqrt{k}.\,\mathrm{sn}\,u$ und $X = \sqrt{k}.\,\mathrm{sn}(nu)$, so verwandelt sich, wenn n eine ungerade Zahl ist, x in $\frac{1}{x}$ und gleichzeitig X in $\frac{1}{X}$, wenn man $u + iK'$ statt u setzt. Nimmt man wieder $m = \frac{nn-1}{2}$, setzt

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.X = \frac{\overset{0}{c}x + \overset{1}{c}x^3 + \overset{2}{c}x^5 \ldots + \overset{m}{c}x^{2m+1}}{\underset{0}{a} + \underset{1}{a}x^2 + \underset{2}{a}x^4 \ldots + \underset{m}{a}x^m},$$

und verwandelt gleichzeitig x in $\frac{1}{x}$ und X in $\frac{1}{X}$, so erhält man

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.X = \frac{\overset{m}{a}x + \overset{m-1}{a}x^3 \ldots + \overset{0}{a}x^{2m+1}}{\underset{m}{c} + \underset{m-1}{c}x^2 \ldots + \underset{0}{c}x^{2m}};$$

und dieser Ausdruck wird derselbe mit dem vorigen, wenn man $\overset{n}{c} = \overset{0}{a}$, $\overset{n-1}{c} = \overset{1}{a}$ u. s. w. setzt. Dann ist aber

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.X = \frac{\overset{m}{a}x + \overset{m-1}{a}x^3 + \overset{m-2}{a}x^5 \ldots + \overset{0}{a}x^{2m+1}}{\underset{0}{a} + \underset{1}{a}x^3 + \underset{2}{a}x^4 \ldots + \underset{m}{a}x^{2m}}.$$

Da nun nach §. 157. (Formel 10.)

$$X = \frac{x\sqrt{k}\,(\mathrm{sn}\,u + \overset{1}{A}\,\mathrm{sn}^3 u + \overset{2}{A}\,\mathrm{sn}^5 u \ldots + \overset{m}{A}\,\mathrm{sn}^{2m+1})}{1 + \underset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2 u + \underset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4 u \ldots + \underset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{2m} u}$$

ist, oder auch

$$X = \frac{n\left(x + \frac{\overset{1}{A}}{k}x^3 + \frac{\overset{2}{A}}{k^2}x^5 \ldots + \frac{\overset{m}{A}}{k^m}x^{2m+1}\right)}{1 + \frac{\overset{1}{D}}{k}x^2 + \frac{\overset{2}{D}}{k^2}x^4 \ldots + \frac{\overset{m}{D}}{k^m}x^{2m}},$$

so hat man unter anderen:

$$\frac{\overset{m}{a}}{\overset{0}{a}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n; \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{n\overset{m}{A}}{k^m} \text{ und } \frac{\overset{m}{a}}{\overset{0}{a}} = \frac{\overset{m}{D}}{k^m}.$$

Der mittleren Gleichung gemäfs ist $\overset{m}{A} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{k^m}{n}$, wie in §. 152., und die beiden Werthe von $\frac{\overset{m}{a}}{\overset{0}{a}}$ stimmen überein, wenn man $\overset{m}{D} = n^2.\overset{m}{A}$ nimmt; wie in §. 152.

Der Coefficient $\overset{0}{a}$ kann noch willkürlich gewählt und $= 1$ gesetzt werden. Dann ist

$$1. \quad X = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{\overset{m}{a}x + \overset{m-1}{a}x^3 + \overset{m-2}{a}x^5 \ldots + x^{2m+1}}{1 + \overset{1}{a}x^2 + \overset{2}{a}x^4 \ldots + \overset{m}{a}x^{2m}},$$

Setzen wir also

$$U = \overset{m}{a}x + \overset{m-1}{a}x^3 + \overset{m-2}{a}x^5 \ldots + x^{2m+1},$$

$$V = 1 + \overset{1}{a}x^2 + \overset{2}{a}x^4 \ldots + \overset{m}{a}x^{2m},$$

so ist $X = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{U}{V}$. Setzen wir $\frac{1}{x}$ statt x, so verwandelt sich

$$U \text{ in } \frac{\overset{m}{a}}{x} + \frac{\overset{m-1}{a}}{x^3} \ldots + \frac{1}{x^{2m+1}} = \frac{V}{x^{2m+1}} \text{ und}$$

$$V \text{ in } 1 + \frac{\overset{1}{a}}{x} \ldots + \frac{\overset{m}{a}}{x^{2m}} = \frac{U}{x^{2m+1}}.$$

Aus der Gleichung $x = \sqrt{k}.\operatorname{sn} u$ folgt $\partial x = \sqrt{k}.\operatorname{cn} u.\operatorname{dn} u.\partial u = \sqrt{k}.\sqrt{\left[\left(1-\frac{x^2}{k}\right)(1-kx^2)\right]}.\partial u$, also $\partial u = \frac{\partial x}{\sqrt{k}\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}$, wenn $\alpha = \frac{k+k^{-1}}{2}$ gesetzt wird.

Der Nenner $1 + \overset{1}{a}x^2 + \overset{2}{a}x^4 \ldots + \overset{m}{a}x^{2m} = V$ ist einerlei mit $1 + \overset{1}{D}\operatorname{sn}^2 u + \overset{2}{D}\operatorname{sn}^4 u \ldots + \overset{m}{D}\operatorname{sn}^{2m} u$ und also nach Formel (3.) §. 162.

$$\operatorname{lm}(nu) - n^2 \operatorname{lm} u = \log V.$$

Differenziiren wir diese Gleichung zweimal nach einander, so erhalten wir

$n^2(\mathrm{dn}^2(nu)-\mathrm{dn}^2 u)=\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u}$, oder $n^2k^2(\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2(na))=\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u}$, also

$$2.\quad n^2k(x^2-X^2)=\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u}=n^2k\left(x^2-\frac{U^2}{V^2}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung $u+iK'$ statt u, so bleibt ∂u ungeändert, aber $\log V$ verwandelt sich in $\log U-(2m+1)\log x$; daher verwandelt sich die Gleichung (2.) in

$$n^2k\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{X^2}\right)=\frac{\partial\left(\frac{\partial \log U}{\partial u}\right)}{\partial u}-(2m+1).\frac{\partial\left(\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)}{\partial u}, \text{ oder}$$

$$3.\quad n^2k\left(\frac{1}{x^2}-\frac{V^2}{U^2}\right)=\frac{\partial\left(\frac{\partial \log U}{\partial u}\right)}{\partial u}-(2m+1).\frac{\partial\left(\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)}{\partial u}.$$

Entwickeln wir nun noch die in diesen Gleichungen vorkommenden Differenzial-Verhältnisse.

Es ist $\partial \log V=\frac{\partial V}{V}$, also $\frac{\partial \log V}{\partial u}=\frac{\partial V}{V.\partial u}=\sqrt{k}.\frac{\partial V}{\partial x}.\frac{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}{V}$, also

$$\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)=$$

$$\sqrt{k}.\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x}.\frac{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}{V}+\frac{\partial V}{\partial x V^2}\left(\frac{V(-2\alpha x+2x^3)\partial x}{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}-\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}\partial V\right)\right\}$$

oder

$$\frac{1}{k}.\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u}=$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\frac{1-2\alpha x^2+x^4}{V}+\frac{\partial V}{\partial x}.\frac{(-2\alpha x+2x^3)}{V}-\frac{\partial^2 V^2}{\partial x^2}.\frac{1-2\alpha x^2+x^4}{V^2}.$$

Wird dieser Werth in der Gleichung (2.) substituirt, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\frac{1-2\alpha x^2+x^4}{V}+\frac{\partial V}{\partial x}.\frac{(-2\alpha x+2x^3)}{V}-\frac{\partial V^2}{\partial x^2}.\frac{1-2\alpha x^2+x^4}{V^2}=n^2\left(x^2-\frac{U^2}{V^2}\right)$$

oder auch in

$$4.\quad \left(V.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial V}{\partial x}.\frac{\partial V}{\partial x}\right)(1-2\alpha x^2+x^4)+2V.\frac{\partial V}{\partial x}(-\alpha x+x^3)=n^2(V^2x^2-U^2).$$

Ferner ist $\frac{\partial \log x}{\partial u}=\frac{\partial x}{x.\partial u}=\frac{\sqrt{k}.\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}{x}$; also ist

$$\partial\left(\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)=\frac{\sqrt{k}}{x^2}.\left[\frac{x(-2\alpha x+2x^3)\partial x}{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}-\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}\partial x\right] \text{ und}$$

$$\frac{1}{k}.\frac{\partial\left(\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)}{\partial u}=\frac{1}{x^2}(2x^2(-\alpha+x^2)-(1-2\alpha x^2+x^4))=x^2-\frac{1}{x^2}$$

und wie vorher findet man

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial \log U}{\partial u}\right)}{\partial u}=\frac{\left(U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{U^2}(1-2\alpha x^2+x^4)+\frac{2U.\frac{\partial U}{\partial x}(-\alpha x+x^3)}{U^2}.$$

Werden diese Werthe in der Gleichung (3.) substituirt, und beachtet man, dafs $2m+1=n^2$ ist, so hat man

$$\frac{n^2}{x^2}-\frac{n^2.V^2}{U^2}=\left(U.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial x}.\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{(1-2\alpha x^2+x^4)}{U^2}-n^2x^2+\frac{n^2}{x^2}+2U.\frac{\partial U}{\partial x}.\frac{(-\alpha x+x^3)}{U^2},$$

oder

$$5.\quad \left(U.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial x}.\frac{\partial U}{\partial x}\right)(1-2\alpha x^2+x^4)+2U.\frac{\partial U}{\partial x}(-\alpha x+x^3)=n^2(U^2x^2-V^2).$$

Vertauscht man in dieser Gleichung U mit V, so erhält man eine Gleichung, welche mit der Gleichung (4.) ganz dieselbe ist; wie es im Voraus zu erwarten war.

Aus der Gleichung $X=\sqrt{k}.\mathrm{sn}(nu)$ folgt $\partial X=n.\partial u\sqrt{k}.\mathrm{cn}(nu)\,\mathrm{dn}(nu)$,

oder $\frac{\partial X}{\partial x}=n.\frac{\sqrt{\left[\left(1-\frac{X^2}{k}\right)(1-kX^2)\right]}}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{x^2}{k}\right)(1-kx^2)\right]}}$, und da $X=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{U}{V}$, also

$\partial X=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{V\partial U-U\partial V}{V^2}$ ist, so erhält man

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{V\partial U-U\partial V}{\partial x}=n.\frac{\sqrt{\left[\left(V^2-\frac{U^2}{k}\right)(V^2-kU^2)\right]}}{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}\quad\text{oder}$$

$$4.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\left(V.\frac{\partial U}{\partial x}-U.\frac{\partial V}{\partial x}\right)=n.\sqrt{\frac{V^4-2\alpha U^2V^2+U^4}{1-2\alpha x^2+x^4}}.$$

Man kann aus den nun entwickelten Gleichungen einmal V und dann U eliminiren und erhält dadurch eine Differenzial-Gleichung zur Bestimmung von U und eine zur Bestimmung von V; indessen ist die combinirte Anwendung der Gleichungen (4.) und (5.) zweckmäfsiger, wenn es sich darum handelt, die Coefficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots \overset{m}{a}$ in den Ausdrücken V und W zu berechnen. Es hält nicht schwer, die dazu dienenden Recursionsformeln aus den Gleichungen (4.) und (5.) herzuleiten, indem man für U und V die arithmetischen Formen selbst substituirt. Da die Ausdrücke der unbekannten Coefficienten aber im Fortgange sehr zusammengesetzt werden und die Anwendung der zu findenden Resultate selten oder gar nicht nöthig ist, so wird es hinreichend sein, hier den Weg gezeigt zu haben, auf welchem die allgemeinen Ausdrücke von $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc. gefunden werden können.

(Die Fortsetzung folgt.)

13.

Note sur lintégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y$ par des intégrales définies.

(Par *E. E. Kummer*, Dr. en phil. à Liegnitz.)

Dans un mémoire de ce Journal tome XVII. page 371 *M. Lobatto* a proposé cette équation différentielle comme un objet de recherches utiles aux progrès de l'analyse. C'est par cette raison, que j'exposerai ici en peu de mots un résultat qui servira à intégrer cette équation par des intégrales définies, toutes-les-fois que l'exposant m est un nombre entier positif.

Soit $z = \psi(x)$ l'intégrale complète de l'équation

$$1. \quad \frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}} = x^{m-1} . z,$$

je dis qu'on aura l'intégrale complète de l'équation semblable

$$2. \quad \frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y$$

exprimée par l'intégrale définie

$$3. \quad y = \int_0^\infty u^{m-1} . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi(xu)\, du,$$

en établissant une équation de condition convenable entre les $n+1$ constantes arbitraires de l'équation (1.).

Pour démontrer cela je différencie l'équation (2.), ce qui donne

$$4. \quad \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = x^m . \frac{dy}{dx} + m x^{m-1} . y.$$

Substituant dans cette équation les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}$, tirées de l'équation (3.) et observant que l'équation (1.) donne

$$\frac{d^{n+1} \psi(xu)}{dx^{n+1}} = x^{m-1} . u^{m+n} \psi(x.u),$$

on a

$$5. \quad x^{m-1} \int_0^\infty u^{2m+n-1} . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi(x.u)\, du$$

$$= x^m \int_0^\infty u^m . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi'(xu)\, du + m x^{m-1} \int_0^\infty u^{m-1} . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi(x.u)\, du.$$

La legitimité de cette équation se démontre facilement au moyen d'une simple différentiation de la quantité $u^m . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi(xu)$ par rapport à la variable u, d'où l'on tire

$$d\left(u^m . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi(xu)\right) = mu^{m-1} . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi(xu)\, du$$
$$- u^{2m+n-1} . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi(xu)\, du + x . u^m . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi'(xu)\, du.$$

Cette équation, étant multipliée par x^{m-1} et intégrée entre les limites 0 et ∞, donne précisement l'équation (5.). De là suit que la valeur donnée de y est l'intégrale complète de l'équation (4.) et par conséquent elle exprimera aussi l'intégrale complète de l'équation (2.), si les $n+1$ constantes arbitraires qu'elle contient, satisfont à une certaine équation de condition, qu'on trouvera facilement dans chaque cas particulier.

L'application répétée du théorème que nous venons de démontrer donne successivement les intégrales de l'équation proposée pour les cas $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ etc., au moyen de l'intégrale connue de l'équation $\frac{d^n z}{dx^n} = z$. Si l'on désigne cette intégrale par $\psi(n,x)$, ainsi que

$$\psi(n,x) = Ce^x + C_1 e^{x.e^{\frac{2\pi i}{n}}} + C_2 e^{x.e^{\frac{4\pi i}{n}}} + \ldots + C_{n-1} e^{x.e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}};$$

on aura l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = xy:$$

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \psi(n+1, xu)\, du,$$

et observant qu'on doit avoir $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ pour $x = 0$, on trouve l'équation de condition

$$C + e^{-\frac{2\pi i}{n+1}} C_1 + e^{-\frac{4\pi i}{n+1}} C_2 + \ldots + e^{-\frac{2n\pi i}{n+1}} C_n = 0,$$

ce qui s'accorde avec le résultat que Mr. *Jacobi* a donné dans ce journal tome X. page 279.

Pour le cas $m = 2$ on aura l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^2 . y:$$

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty v . e^{-\frac{u^{n+2} + v^{n+2}}{n+2}} . \psi(n+2, xuv)\, du . dv,$$

et parcequ'on doit avoir $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ et $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = 0$ pour $x = 0$, on aura dans ce cas les deux équations de condition

$$C + e^{-\frac{2\pi i}{n+2}} C_1 + e^{-\frac{4\pi i}{n+2}} C_2 + \ldots + e^{-\frac{2(n+1)\pi i}{n+2}} C_{n+1} = 0,$$
$$C + e^{-\frac{4\pi i}{n+2}} C_1 + e^{-\frac{8\pi i}{n+2}} C_2 + \ldots + e^{-\frac{4(n+)\pi i}{n+2}} C_{n+1} = 0.$$

De la même manière on trouve l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^3 . y:$$

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty v . w^2 . e^{-\frac{u^{n+3} + v^{n+3} + w^{n+3}}{n+3}} . \psi(n+3, xuvw)\, du\, dv\, dw$$

avec les trois équations de condition

$$C + e^{-\frac{2\pi i}{n+3}} C_1 + e^{-\frac{4\pi i}{n+3}} C_2 + \ldots + e^{-\frac{2(n+2)\pi i}{n+3}} C_{n+2} = 0,$$
$$C + e^{-\frac{4\pi i}{n+3}} C_1 + e^{-\frac{8\pi i}{n+3}} C_2 + \ldots + e^{-\frac{4(n+2)\pi i}{n+3}} C_{n+2} = 0,$$
$$C + e^{-\frac{6\pi i}{n+3}} C_1 + e^{-\frac{12\pi i}{n+3}} C_2 + \ldots + e^{-\frac{6(n+2)\pi i}{n+3}} C_{n+2} = 0.$$

En continuant ainsi, on trouvera les intégrales de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y$ pour toutes les valeurs entières et positives de l'exposant m.

14.

Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen nebst einigen Anwendungen derselben.

(Von *Theodor Schönemann* zu Berlin.)

(Schlufs der Abhandlung No. 11. im vorigen Heft.)

Anwendung des Vorhergehenden auf die Zahlen-Theorie.

Wir fanden so eben den Coefficienten von $a_{a_1}\, a_{a_2}\, \ldots\, a_{a_m}$ gleich $p\,\frac{1.2.3,\ldots m-1}{1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu.1.2\ldots\varrho}(-1)^{m-1}$. Da dieser Ausdruck eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung $x^p-1=0$ ist, so mufs er nach §. 2. eine ganze Zahl sein. Hiervon kann man sich nun auch leicht auf anderem Wege überführen. Es ist nämlich $\mu+\nu+\varrho+\ldots$ entweder kleiner als m oder gleich m; für den ersten Fall ist aus der Lehre der Combinationen bekannt, dafs $\frac{1.2\ldots m-1}{1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu.1.2\ldots\varrho}$ eine ganze Zahl sei. Für den zweiten Fall mögen x Elemente a, gleich a_1, y Elemente a, gleich a_2, z Elemente a, gleich a_3 etc. werden, so wird $p=\mu x+\nu y+\varrho z+\ldots$ werden, also auch durch den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler von μ, ν, ϱ etc, der durch δ bezeichnet werden mag, theilbar sein. Ich behaupte nun $\delta\,\frac{1.2\ldots\mu+\nu+\varrho-1}{1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu.1.2\ldots\varrho}$ werde eine ganze Zahl sein. Um dies zu beweisen setze man $\frac{1.2\ldots\mu+\nu+\varrho-1}{1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu.1.2\ldots\varrho}$, nachdem man es auf seinen kleinsten Nenner gebracht, gleich $\frac{I}{K}$. Es folgt nun leicht, dafs $\mu\,\frac{I}{K}$, $\nu\,\frac{I}{K}$, $\varrho\,\frac{I}{K}$ etc. ganze Zahlen sein werden. Es mufs folglich K ein Theiler von μ, ν, ϱ etc. sein. Da aber der gröfste gemeinschaftliche Theiler

dieser Zahlen δ ist, so mufs K ein Theiler von δ, demnach $\delta\frac{I}{K}$ und daher auch $p\frac{1.2....\mu+\nu+\varrho-1}{1.2....\mu.1.2....\nu.1.2....\varrho}$ ebenfalls eine ganze Zahl sein.

Kehren wir uns jetzt wieder zur Betrachtung des Coefficienten von $x^{p(n-k)}$ in der Entwicklung des §. 4. Wir fanden das allgemeine Glied dieser Coefficienten gleich $a_{\mathfrak{a}_1}a_{\mathfrak{a}_2}....a_{\mathfrak{a}_p}\Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+\mathfrak{a}_2\xi_2+....+\mathfrak{a}_p\xi_p}$, wo $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+....+\mathfrak{a}_m$ gleich kp war. Wurden nun $p-m$ Elemente $\mathfrak{a}$, die mit $\mathfrak{a}_{p-m+1}$, $\mathfrak{a}_{p-m+2}$, ... $\mathfrak{a}_p$ bezeichnet werden mögen, gleich 0, oder Vielfache von p, so ging $\Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+\mathfrak{a}_2\xi_2+....+\mathfrak{a}_p\xi_p}$ in ein bestimmtes Vielfaches von $\Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+\mathfrak{a}_2\xi_2+....+\mathfrak{a}_m\xi_m}$ über. Dieser Ausdruck war aber nach seiner jetzigen Bedeutung gleich

$$p\,[C_{(m-1)}-SC_{(m-1)-1}+....(-1)^{m-1}2.3....m-1]\,\frac{1}{1.2....\mu.1.2....\nu.1.2....\varrho},$$

wo μ, ν, ϱ etc. andeuten wie viele unter den Elementen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ... $\mathfrak{a}_m$ als gleich zu achten sind. Da der in Klammern eingeschlossene Ausdruck als symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung $x^p-1=0$, eine ganze Zahl sein mufs, so wird offenbar $\Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+\mathfrak{a}_2\xi_2+....+\mathfrak{a}_m\xi_m}$ ein Vielfaches von p sein, wenn nicht $1.2....\mu.1.2....\nu.1.2....\varrho$ in $1.2.3....p$ übergeht. Für diesen Fall, wo $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_3....\mathfrak{a}_p$ werden müfste, findet man den Werth von $\Sigma\alpha^{\mathfrak{a}_1\xi_1+....+\mathfrak{a}_p\xi_p}=1$. Setzen wir nun voraus, die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung a_1, a_2, ... a_n seien ganze Zahlen, und bezeichnen wir die Gleichung für die p^{ten} Potenzen der Wurzeln dieser Gleichung durch $z^n+b_1z^{n-1}+....b_n=0$, so folgt dafs b_1, b_2, ... b_n, nach dem Theiler p, dieselben Reste wie a_1^p, a_2^p, ... a_n^p lassen werden, oder dafs im Allgemeinen $a_m^p\equiv b_m\pmod p$ sei. — Wäre die vorliegende Gleichung $(x+1)^a=x^a+ax^{a-1}+....+1=0$, wo a eine ganze positive Zahl bedeutet, so müfste die Gleichung für die p^{ten} Potenzen der Wurzeln dieser Gleichung von der Form $z^a+(a^p+pA)z^{a-1}+....=0$ sein. Man sieht aber auch unmittelbar ein, jene Gleichung werde $(z+1)^a=z^a+az^{a-1}+....+1=0$ sein, wenn p eine ungerade Primzahl bedeutet. Aus der Vergleichung der ersten Coefficienten beider Gleichungen findet man $a=a^p+pA$; oder, da A eine ganze Zahl bedeutet, $a\equiv a^p\pmod p$. Der *Fermat*sche Satz: dafs $a^{p-1}\equiv 1\pmod p$ sei, wenn a nicht $\equiv 0\pmod p$ ist, folgt unmittelbar aus jener Congruenz.

Wendet man nun das erhaltene Resultat auf die obige Congruenz $b_m \equiv a_m^p \pmod{p}$ an, so erhält man $b_m \equiv a_m \pmod{p}$. Wir können demnach folgenden ganz allgemeinen Satz aufstellen:

Die Gleichung für die p^{ten} Potenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, ist in ihren entsprechenden Coefficienten, denen der gegebenen Gleichung nach dem Modul p congruent, wenn p eine Primzahl ist.

Um aus dem Werthe von $\Sigma \alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m}$ einige für die Lehre der Congruenzen interessante Folgerungen zu ziehen, wollen wir diesem Ausdruck eine andere Form geben. Bedeutet also p eine Primzahl, so bemerken wir zuerst, dafs $\Sigma \alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m}$ seinen Werth nicht ändern werde, wenn man statt α irgend eine ganze Potenz dieses Ausdrucks setzt, wenn der zugehörige Exponent nicht durch p aufgeht; denn auch diese wird eine primitive Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$ sein. Setzt man also nach der Reihe in jedes einzelne Glied jener Summe für α auch α^2, α^3, α^4, ... α^{p-1} und addirt alle diese Ausdrücke, so wird man $(p-1)\Sigma \alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m}$ erhalten. Jeder einzelne Ausdruck $\alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m}$ aber wird zu den übrigen $(p-2)$ Ausdrücken $\alpha^{2(a_1\xi_1 + \ldots + a_m\xi_m)} + \alpha^{3(a_1\xi_1 + \ldots + a_m\xi_m)} + \ldots + \alpha^{p-1(a_1\xi_1 + \ldots + a_m\xi_m)}$ addirt, gleich -1 werden, wenn $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m$ nicht durch p aufgeht, und gleich $p-1$, wenn dieser Ausdruck durch p aufgeht. Nennt man jetzt q die Zahl, welche anzeigt wie oft $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m$ durch p aufgehen kann, indem man für die Zahlen ξ verschiedene Werthe aus der Zahlenreihe 0, 1, 2, ... $p-1$ einsetzt, so erhält man

$$(p-1)\Sigma \alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m} = -(p.p-1.p-2\ldots p-m+1) + q + (p-1)q$$
$$= -(p.p-1.p-2\ldots,p-m+1) + pq.$$

Es giebt nämlich so viele verschiedene Ausdrücke von der Form $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m$, als man p Elemente, nämlich 0, 1, 2, ... $p-1$, zu m combiniren und dann permutiren kann. Diese Zahl ist aber bekanntlich $p.p-1.p-2\ldots p-m+1$. Alle jene Zahlen als Exponenten zu α^1, α^2, α^3, ... α^{p-1} gesetzt geben die Summe jener Ausdrücke nun offenbar gleich $-(p.p-1.p-2\ldots p-m+1) + pq$. Setzt man nun für $\Sigma \alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m}$ seinen früher gefundenen Werth, so kann man also leicht q bestimmen. Bezeichnen wir mit Q die Zahl der Fälle, in denen

$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + \ldots + a_m\xi_m$ durch p theilbar werden kann, unter der Voraussetzung, dafs die Lösungen der unbestimmten Congruenz $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots a_m\xi_m \equiv 0 \pmod{p}$, die durch Vertauschung der gleichen Elemente a hervorgebracht werden, nur für eine zählen, so wird q offenbar $1.2\ldots.\mu.1.2\ldots.\nu.1.2\ldots.\varrho Q$, wo μ, ν, ϱ etc. andeuten, wie viele unter den Elementen a als gleich zu achten sind. Geht nun $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$ nicht durch p auf, so wird nach dem Obigen $\Sigma\alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m}$ gleich 0; wir erhalten demnach $0 = -(p.p-1.p-2\ldots p-m+1) + pq$, oder $q = p-1.p-2.p-3\ldots p-m+1$ und $Q = \frac{p-1.p-2\ldots p-m+1}{1.2\ldots.\mu.1.2\ldots.\nu.1.2\ldots.\varrho}$, das heifst also, die Anzahl der verschiedenen Lösungen der Congruenz $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m \pmod{p}$ ist gleich $\frac{p-1.p-2\ldots p-m+1}{1.2\ldots.\mu.1.2\ldots.\nu.1.2\ldots.\varrho}$, wenn $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ und m nicht gröfser als p ist, ferner in jeder einzelnen Lösung die Zahlen ξ unter einander verschieden sein sollen, und μ, ν, ϱ etc. die Anzahl der unter einander gleichen Elemente a andeuten. Geht $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ durch p auf, aber keine kleinere Anzahl dieser Elemente, so fanden wir oben $\Sigma\alpha^{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m} = p.1.2.3\ldots\ldots m-1(-1)^{m-1}$, wir erhalten folglich für diesen Fall $p.p-1.1.2.3\ldots.m-1(-1)^{m-1} = -(p.p-1\ldots.p-m+1) + pq$ oder $q = (p-1.p-2\ldots.p-m+1) + 1.2.3\ldots.m-1(-1)^{m-1}.p-1$ und $Q = \frac{p-1.p-2\ldots.p-m+1}{1.2\ldots.\mu.1.2\ldots.\nu.1.2\ldots.\varrho} + \frac{1.2.3\ldots.m-1.p-1}{1.2\ldots.\mu.1.2\ldots.\nu.1.2\ldots.\varrho}(-1)^{m-1}$. Die Anzahl der verschiedenen Lösungen der Congruenz $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m$ beträgt also $\frac{p-1.p-2\ldots.p-m+1}{1.2\ldots.\mu.1.2\ldots.\nu.1.2\ldots.\varrho} + \frac{1.2.3\ldots.m-1.p-1}{1.2\ldots.\mu.1.2\ldots.\nu.1.2\ldots.\varrho}(-1)^{m-1}$ wenn $a_1 + a_2 + \ldots + a_m \equiv 0 \pmod{p}$ ist, aber die Summe einer kleineren Anzahl von den Zahlen a nicht durch p aufgeht.

Diese Sätze sind um so merkwürdiger, da sie wesentlich mit der Natur der Primzahlen zusammenhängen und zu gleicher Zeit auf die eigentlichen Elemente einer Untersuchung über unbestimmte Congruenzen des ersten Grades hinweisen. Da uns indessen ein tieferes Eingehen in dieselbe hier zu weit führen würde, so gehen wir sogleich zu dem folgenden Hauptsatz dieser Untersuchung über.

§. 5.

Lehrsatz. Wenn eine Gleichung vom n^{ten} Grade

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

deren Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ alle ganze Zahlen sind, die Summe der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenzen ihrer Wurzeln, die Summe der $2(p-1)^{\text{ten}}$ Potenzen ihrer Wurzeln, ..., bis endlich die Summe der $n(p-1)^{\text{ten}}$ Potenzen ihrer Wurzeln, jede einzeln congruent n (mod. p) ergiebt, und p ist eine Primzahl, von der wir zuerst voraussetzen, dafs sie gröfser als n sei, so hat die Gleichung, als Congruenz nach dem Modul p aufgefafst, n reelle Wurzeln.

Beweis. Bezeichnet man die n Wurzeln obiger Gleichung mit $x_1, x_2, \ldots x_n$, so erhält man nach der Annahme

$$\begin{aligned}
x_1^{p-1} + x_2^{p-1} + \ldots + x_n^{p-1} &= n + y_1 p,\\
x_1^{2(p-1)} + x_2^{2(p-1)} + \ldots + x_n^{2(p-1)} &= n + y_2 p,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \

erscheint, in dessen Nenner auch p als Factor eintritt, der kleinste Rest dieses Bruchs nach dem Modul p nicht ungeändert bleibt, wenn man die Zahlen im Zähler um beliebige Vielfache von p verringert oder vermehrt. Da wir jedoch $p > n$ angenommen haben, so folgt aus dem Vorigen

$$\Phi(x^{p-1}) = (x^{p-1}-1)^n + p(b_n + b_{n-1}x + b_{n-2}x^{2(p-1)} + \ldots + b_0 x^{n(p-1)}),$$

wo b_n, b_{n-1}, $\ldots$ b_0 ganze Zahlen oder 0 bedeuten.

Bezeichnen wir nun die $p-2$ Wurzeln der Gleichung $\frac{x^{p-1}-1}{x-1} = 0$, durch β_1, β_2, $\ldots$ β_{p-2}, so folgt aus §. 3. folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\Phi(x^{p-1}) = {} & (x-x_1)(x-\beta_1 x_1)(x-\beta_2 x_1)\ldots(x-\beta_{p-2}x_1),\\ & (x-x_2)(x-\beta_1 x_2)(x-\beta_2 x_2)\ldots(x-\beta_{p-2}x_2),\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & (x-x_n)(x-\beta_1 x_n)(x-\beta_2 x_n)\ldots(x-\beta_{p-2}x_n).\end{aligned}$$

Da die Wurzeln der Congruenz $x^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$, die Zahlen 1, 2, 3, $\ldots$ $p-1$ sind, so müssen die Coefficienten der Entwicklung von $(x-x_1)(x-\beta_1 x_1)\ldots(x-\beta_{p-2}x_1)$ und die entsprechenden der Entwicklung von $(x-x_1)(x-2x_1)(x-3x_1)\ldots(x-(p-1)x_1)$ nach dem Modul p congruent sein. Man erhält demnach folgende Gleichung

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-\beta_1 x_1)(x-\beta_2 x_1)\ldots(x-\beta_{p-2}x_1) =\\ &(x-x_1)(x-2x_1)\ldots(x-(p-1)x_1) + p[c_{p-1}x_1^{p-1} + c_{p-2}x_1^{p-2}x + \text{etc.}],\end{aligned}$$

wo c_{p-1}, c_{p-2} etc. ganze Zahlen oder 0 bedeuten. Eben so erhält man

$$\begin{aligned}&(x-x_2)(x-\beta_1 x_2)\ldots(x-\beta_{p-2}x_2)\\ &= (x-x_2)(x-2x_2)\ldots(x-(p-1)x_2) + p(c_{p-1}x_2^{p-1} + c_{p-2}x_2^{p-2}x + \text{etc.})\end{aligned}$$

und ähnliche Gleichungen für x_3, x_4, $\ldots$ x_n.

Denkt man sich nun alle diese Ausdrücke für x_1, x_2, $\ldots$ x_n unter einander geschrieben, und multiplicirt alle rechten Seiten dieser Gleichungen in einander, so wird das Product eine symmetrische Function von x_1, x_2, $\ldots$ x_n sein; folglich wird jede Potenz von x mit einem ganzen symmetrischen Ausdruck von x_1, x_2, $\ldots$ x_n verbunden sein, der also nach §. 3. durch eine ganze Zahl sich wird darstellen lassen. Aus der Bildung dieses Products leuchtet aber auch ein, dafs die Coefficienten desselben, den entsprechenden des Products

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-2x_1)\ldots\ldots(x-(p-1)x_1)\\ &(x-x_2)(x-2x_2)\ldots\ldots(x-(p-1)x_2)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(x-x_n)(x-2x_n)\ldots\ldots(x-(p-1)x_n)\end{aligned}$$

nach dem Modul p congruent sein werde. Dies letzte Product besteht aber auch, wenn man die in den Verticalreihen stehenden Factoren vereinigt, aus folgenden Factoren:

$$[x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n].$$
$$[x^n + 2a_1 x^{n-1} + 2^2 a_2 x^{n-2} + \ldots + 2^n a_n].$$
$$[x^n + 3a_1 x^{n-1} + 3^2 a_2 x^{n-2} + \ldots + 3^n a_n].$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[x^n + (p-1)a_1 x^{n-1} + (p-1)^2 a_2 x^{n-2} + \ldots + (p-1)^n a_n].$$

Demnach erhalten wir nun schliefslich

$$\Phi(x^{p-1}) = (x^{p-1}-1)^n + p(b_n + b_{n-1}x^{p-1} + b_{n-2}x^{p-2} + \text{etc.}] =$$
$$[x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n].$$
$$[x^n + 2a_1 x^{n-1} + 2^2 a_2 x^{n-2} + \ldots + 2^n a_n].$$
$$[x^n + 3a_1 x^{n-1} + 3^2 a_2 x^{n-2} + \ldots + 3^n a_n].$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[x^n + (p-1)a_1 x^{n-1} + (p-1)^2 a_2 x^{n-2} + \ldots + (p-1)^n a_n]$$
$$+ p(d_{n(p-1)} + d_{n(p-1)-1}x + d_{n(p-1)-2}x^2 + \text{etc.}],$$

wo die Buchstaben d ganze Zahlen bedeuten.

Der erste Ausdruck für $\Phi(x^{p-1})$ ist nun, wenn x irgend eine ganze Zahl x_1 bedeutet, die durch p nicht aufgeht, durch p theilbar, folglich mufs es auch für diesen Fall der zweite Ausdruck für $\Phi(x^{p-1})$ werden, daher mufs irgend ein Factor $x^n + \mu a_1 x^{n-1} + \ldots + \mu^n a_n$, wo μ eine der Zahlen 1, 2, 3, ... $p-1$ bedeutet, für $x = x_1$ nach dem Modul p congruent 0 werden. Hat aber die Congruenz $x^n + \mu a_1 x^{n-1} + \ldots + \mu^n a_n \equiv 0 \pmod{p}$ die Wurzel x_1, und bestimmt man ξ_1 so, dafs $x_1 \equiv \mu\xi_1 \pmod{p}$ ist, so folgert man leicht, dafs ξ_1 eine Wurzel der Congruenz

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod{p}$$

sein werde. Wir erhalten demnach die Gleichung

$$\xi_1^n + a_1\xi_1^{n-1} + a_2\xi_1^{n-2} + \ldots + a_n = ep,$$

wo e eine ganze Zahl bedeutet. Zieht man diese Gleichung von

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

ab, so sieht man leicht, dafs das Resultat sich werde auf die Form

$$(x - \xi_1)(x^{n-1} + k_1 x^{n-2} + \ldots + k_{n-1}) - ep = 0$$

bringen lassen, wo k_1, k_2, ... k_{n-1} ganze Zahlen bedeuten, die von a_1, a_2, ... a_{n-1} und von ξ_1 abhängen. Es ist aber offenbar, dafs die symmetrischen ganzen Functionen der Wurzeln der Gleichungen

$$(x-\xi_1)(x^{n-1}+k_1x^{n-2}+\ldots.+k_{n-1})-ep = 0 \quad \text{und}$$
$$(x-\xi_1)(x^{n-1}+k_1x^{n-2}+\ldots.+k_{n-1}) = 0,$$

nach dem Modul p congruent sein müssen; denn die entsprechenden Coefficienten in beiden Gleichungen, von welchen jene ganze Functionen sind, stimmen nach dem Modul p überein. Da also auch die verschiedenen Potenzsummen der Wurzeln beider Gleichungen nach dem Modul p congruent sein müssen, und $\xi_1^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, so werden auch die Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung $x^{n-1}+k_1x^{n-2}+\ldots.+k_{n-1}=0$, wenn sie zu einem Exponenten gehören, der ein geringeres Vielfaches von $p-1$ ist als n anzeigt, nach dem Modul p congruent $n-1$ sein müssen. Demnach wird nach dem Vorigen die Congruenz

$$x^{n-1}+k_1x^{n-2}+\ldots.+k_n \equiv 0 \pmod{p}$$

wenigstens wieder eine reelle Wurzel haben, die auch offenbar eine Wurzel der Congruenz $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_n \equiv 0 \pmod{p}$ sein wird. Durch fortgesetzte Anwendung derselben Schlufsfolge beweist man leicht, dafs die vorliegende Congruenz, unter den vorausgesetzten Bedingungen n reelle Wurzeln haben werde, oder dafs $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_n$ sich werde auf die Form $(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots.(x-\xi_n)+p(\beta_1x^{n-1}+\beta_2x^{n-2}+\ldots.)$ zurückführen lassen, wo $\xi_1, \xi_2, \ldots. \xi_n$ und β_1, β_2, etc. ganze Zahlen bedeuten.

Ich behaupte nun, dafs die Realität der Wurzeln der Congruenz $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_n \equiv 0 \pmod{p}$ schon durch die Aussage bestimmt sei, dafs die Summe der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln der Gleichung $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_n=0$, so wie die Summe der $2(p-1)^{\text{ten}}$, $3(p-1)^{\text{ten}}$, $\ldots$ $\ldots$ $(n-1)(p-1)^{\text{ten}}$ Potenzen dieser Wurzeln congruent n sei, wenn a_n nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Es folgt nämlich, wie vorher, dafs die $(n-1)$ ersten Coefficienten von $\Phi(x^{p-1})$ mit den $(n-1)$ ersten Coefficienten von $(x^{p-1}-1)^n$ nach dem Modul p congruent sein werden. Aus der 2ten Darstellung von $\Phi(x^{p-1})$ folgt aber, dafs der letzte Coefficient jener Entwicklung $\equiv (1.2.3\ldots.p-1)^n a_n^{p-1} \pmod{p}$ sein müsse. Diese Zahl ist aber nach dem *Fermat*schen und *Wilson*schen Satze $\equiv (-1)^n \pmod{p}$, wenn a_n nicht $\equiv 0 \pmod{p}$. Demnach stimmt also auch der letzte Coefficient von $\Phi(x^{p-1})$ mit dem letzten der Entwicklung von $(x^{p-1}-1)^n$ überein. Da also auch für diesen Fall die erste Form von $\Phi(x^{p-1})$ gerechtfertigt ist, so folgt alles wie vorher. Zugleich ist ersichtlich, dafs der ausgesprochene Satz sich auch auf Congruenzen vom p^{ten} Grade erstrecke. Denn

bei der Bestimmung der $(p-1)$ ersten Coefficienten von $\Phi(x^{p-1})$ durch die Potenzsummen können nur Nenner eintreten, die kleiner als p sind, und der letzte Coefficient mufs, wie eben gezeigt, von selbst mit dem letzten Coefficienten von $(x^{p-1}-1)^p$ nach dem Modul p congruent werden.

Es sei nun k oder der Grad der Gleichung kleiner als $2p$, und die Coefficienten von $\Phi(x^{p-1})$ seien $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, so kann man sich der bekannten Formel

$$[m]+A_1[m-1]+A_2[m-2]+\ldots+A_{m-1}[1]+mA_m=0$$

bedienen, um die Coefficienten aus den Potenzsummen abzuleiten. Man schliefst, wie vorher, dafs, so lange m kleiner als p ist, die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_{p-1}$ mit den entsprechenden der Entwicklung von $(x^{p-1}-1)^n$ übereinstimmen werden. Bei A_p tritt indessen der Nenner p ein, und wir dürfen daher unsere Schlüsse nicht auf diesen Coefficienten ausdehnen. Indessen reicht es hin zu wissen, A_p müsse sich durch irgend eine ganze Zahl darstellen lassen. Wird diese einmal durch V bezeichnet, so folgt $[p+1]+A_1[p]+A_2[p-1]+\ldots+V[1]+(p+1)A_{p+1}=0$, wodurch A_{p+1} auch für unsere Untersuchung unzweideutig als lineäre Function von V bestimmt ist. Auf ähnliche Weise ist A_{p+2} als lineäre Function von A_{p+1}, folglich auch von A_p bestimmt. Dehnt man diese Schlüsse bis auf A_n aus, so mufs auch dieses eine lineäre Function von A_p sein. Nun ist aber $A_n \equiv (-1)^n$, folglich ist auch A_p durch eine lineäre Congruenz bestimmt. Da es demnach nur einen Werth geben kann, der A_p entspricht, und ein solcher $\frac{n.n-1.n-2\ldots n-(p-1)}{1.2\ldots p}$ ist, so wird auch überhaupt $\Phi(x^{p-1})$ in seinen entsprechenden Coefficienten mit $(x^{p-1}-1)^n$ congruent sein.

Ist der Grad der Gleichung aber $2p$, so tritt diese Zahl wieder in die Nenner der Rechnung, weshalb dann noch besondere Bedingungen nöthig werden, um die Realität der Wurzeln zu verbürgen. — Dafs es in der That Congruenzen vom Grade $2p$ geben könne, deren Potenzsummen jedes Grades congruent 0 werden, ohne dafs sie selbst eine reelle Wurzel hätten, davon geben die Congruenzen von der Form $x^{2p}+ax^p+b \equiv 0 \pmod{p}$ ein Beispiel. Denn diese Congruenzen erfüllen immer die erste Bedingung ohne immer die zweite zu erfüllen. Wir wollen uns indessen jetzt nicht auf eine weitere Erörterung dieses Satzes einlassen, sondern die erhaltenen Resultate lieber noch einmal folgendermafsen zusammenfassen: Die Wurzeln einer Congruenz vom n^{ten} Grade,

deren letzter Coefficient a_n nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, werden sämmtlich nach dem Modul p reell, wenn die $(p-1)^{\text{te}}$ Potenzsumme der Wurzeln, so wie die $2(p-1)^{\text{te}}$, $3(p-1)^{\text{te}}$, ... $(n-1)(p-1)^{\text{te}}$ Potenzsumme dieser Wurzeln $\equiv n \pmod{p}$ wird; vorausgesetzt n sei nicht gröfser als p. Ist aber n gröfser als p und kleiner als $2p$, so wird zwar die $p(p-1)^{\text{te}}$ Potenzsumme, nach dem Früheren von selbst der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenzsumme congruent; es tritt aber hier dafür die neue Bedingung ein, dafs auch noch die $n(p-1)^{\text{te}}$ Potenzsumme der Wurzeln congruent n werden mufs, um die Realität der Wurzeln zu verbürgen.

Zusatz. Die Congruenz $x^p - a \equiv 0 \pmod{p}$ hat p reelle Wurzeln, deren jede $\equiv a$ ist. Wie vortheilhaft die Betrachtung der p, wenn auch gleichen Wurzeln jener Congruenz sei, mag aus Folgendem erhellen.

Die ganzen symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichung $x^p - 1 = 0$, und der Congruenz $x^p - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ müssen nach dem Modul p congruent werden, da die Coefficienten, von welchen beide dieselben ganzen Functionen sind, gleich sind. Ist nun α eine Wurzel der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$, so müssen die Entwicklungen

$$[x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n][x^n + a_1 \alpha x^{n-1} + a_2 \alpha^2 x^{n-2} + ... + \alpha^n a_n] ....$$
$$.... [x^n + a_1 \alpha^{p-1} x^{n-1} + a_2 \alpha^{2(p-1)} x^{n-2} + ... + \alpha^{n(p-1)} a_n]$$

und von $(x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n)^p$ in ihren entsprechenden Coefficienten nach dem Modul p congruent werden. Das heifst also, die Gleichung für die p^{ten} Potenzen der Wurzeln mufs in ihren entsprechenden Coefficienten der ursprünglichen congruent werden, wenn der Modul p eine Primzahl ist. Ein Resultat, das auf etwas verwickelterem Wege schon in §. 4. gezeigt worden.

§. 6.

In einer frühern Abhandlung dieses Journals habe ich gezeigt, wie die Beweisart von *Lagrange* für mehrere specielle Sätze des Reciprocitäts-Theorems im Grunde auf dem Satze beruhe, dafs $(1-\alpha)(1-\alpha^2)....(1-\alpha^{n-1}) = n$, oder dafs $\frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^6)....\left(1-\alpha^{2\cdot\frac{n-1}{2}}\right)}{\alpha^{\frac{n^2-1}{8}}}(-1)^{\frac{n-1}{4}} = \sqrt{n}$ sei, wo α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$, und n eine ungerade Zahl andeutet. Diese Gleichung konnte indessen nur dann mit Vortheil auf die Congruenzen angewendet werden, wenn n ein Theiler von $p-1$

oder $p+1$ war, wo p den Modul andeutet. Wir wollen jetzt zeigen, wie dieser Satz, anders benutzt, nicht allein zum vollständigen Beweise des Reciprocitätsgesetzes führt, sondern zugleich auch auf eine reiche Quelle weit verzweigter und tief liegender Wahrheiten hinweist. Zu diesem Ende schicken wir aber folgenden Hülfssatz voraus.

Bezeichnet n eine Primzahl und α eine Wurzel der Gleichung $\frac{x^n-1}{x-1}=0$, ferner $f\alpha$ eine ganze rationale Function von α, die ungeändert bleibt, wenn man statt α irgend eine ganze Potenz dieses Ausdruckes setzt, vorausgesetzt der zugehörige Exponent gehe nicht durch n auf, so wird sich $f\alpha$ durch eine ganze Zahl darstellen lassen.

Beweis. Nach der Voraussetzung wird $f\alpha+f\alpha^2+f\alpha^3+\ldots.+f\alpha^{n-1}=(n-1)f\alpha$, der Ausdruck auf der linken Seite ist aber offenbar eine ganze symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung $\frac{x^n-1}{x-1}=0$, folglich nach §. 2. eine ganze Zahl; bezeichnen wir diese durch Z, so erhalten wir $Z=(n-1)f\alpha$, folglich $f\alpha=\frac{Z}{n-1}$. Bildet man nun das Product $f\alpha.f\alpha^2.f\alpha^3\ldots.f\alpha^{n-1}$, so wird dies offenbar gleich $\left(\frac{Z}{n-1}\right)^{n-1}$, zugleich aber auch eine ganze symmetrische Function von den Wurzeln der Gleichung $\frac{x^n-1}{x-1}=0$, also auch eine ganze Zahl. Ist nun aber $\left(\frac{Z}{n-1}\right)^{n-1}$ eine ganze Zahl, so mufs offenbar $\frac{Z}{n-1}$ selbst, oder $f\alpha$ eine ganze Zahl sein.

Bedeutet g eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{n-1}-1\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ n)$, so wird offenbar

$$(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^1})(1-\alpha^{g^2})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-2}})=(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\ldots.(1-\alpha^{n-1})=n$$

sein. Ist nun n von der Form $4m+3$, so werden, da -1 quadratischer Nichtrest nach dem Modul n ist, die reciproken Werthe der Ausdrücke α^{g^0}, α^{g^2}, α^{g^4}, ... $\alpha^{g^{n-3}}$ in den Ausdrücken α^{g^1}, α^{g^3}, α^{g^5}, ... $\alpha^{g^{n-2}}$ enthalten sein. Wir erhalten somit die Gleichung

$$(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^2})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-3}})\left(1-\frac{1}{\alpha^{g^0}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha^{g^2}}\right)\ldots.\left(1-\frac{1}{\alpha^{g^{n-3}}}\right)=n$$

oder

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^2})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-3}})}{\alpha^{g^0}\alpha^{g^2}\ldots.\alpha^{g^{n-3}}}\right)^2=n,$$

und daher, da $(-1)^{\frac{n-1}{2}}=-1$, und der Nenner $=\alpha^{\frac{g^{n-1}-1}{g^2-1}}=1$ wird, fol-

gende Gleichung $(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^2})\ldots(1-\alpha^{g^{n-3}}) = \pm\sqrt{-n}$, woher in Verbindung mit der ersten Gleichung auch die folgende hervorgeht:

$$(1-\alpha^{g^1})(1-\alpha^{g^3})(1-\alpha^{g^5})\ldots(1-\alpha^{g^{n-2}}) = \mp\sqrt{-n}.$$

Wir können nun die beiden Ausdrücke $(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^2})\ldots(1-\alpha^{g^{n-3}})$ und $(1-\alpha^{g^1})(1-\alpha^{g^3})\ldots(1-\alpha^{g^{n-2}})$ als Wurzeln der Gleichung $x^2+n=0$ ansehen. Bezeichnen wir den ersten Ausdruck durch $\Phi(g^2)$, und den zweiten durch $\Phi(g^1)$, so werden, wenn p quadratischer Rest nach dem Modul n und ebenfalls eine Primzahl ist, folgende beide Gleichungen Statt finden:

$$[\Phi(g^2)]^p = \Phi(g^2) + pf(g^2), \qquad [\Phi(g^1)]^p = \Phi(g^1) + pf(g),$$

wo $f(g^2)$ eine symmetrische ganze Function der Ausdrücke α^{g^0}, α^{g^2}, ... $\alpha^{g^{n-3}}$ und $f(g^1)$ dieselbe Function von α^{g^1}, α^{g^3}, ... $\alpha^{g^{n-2}}$ andeutet. Aus den obigen Gleichungen leitet man nun leicht die folgende ab:

$$(\Phi(g^2))^{p-1} + (\Phi(g^1))^{p-1} = 2 + p\left[\frac{f(g^2)}{\varphi(g^2)} + \frac{f(g^1)}{\varphi(g^1)}\right]$$

$$= 2 + p\left[\frac{f(g^2)\varphi(g^1) + \varphi(g^2)f(g^1)}{\varphi(g^2)\varphi(g^1)}\right].$$

Nun werden aber die Functionen

$$(\Phi(g^2))^{p-1} + (\varphi(g^1))^{p-1} \quad \text{und} \quad f(g^2)\Phi(g^1) + \Phi(g^2)f(g^1)$$

ihren Werth nicht ändern, wenn man statt α irgend eine ganze Potenz dieses Ausdruckes, deren Exponent nicht durch n aufgeht, einsetzt; beide Functionen werden sich daher durch ganze Zahlen darstellen lassen. Bezeichnen wir die erste durch Z, die zweite durch Z^1, so erhalten wir, da $\Phi(g^2)\Phi(g^1) = n$ ist, $Z = 2 + p\frac{Z^1}{n}$. Hieraus folgt leicht, dafs $\frac{Z^1}{n}$ eine ganze Zahl sein müsse, und daher die Congruenz

$$Z = (\Phi(g^2))^{p-1} + (\Phi(g^1))^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}.$$

Aus §. 5. folgt hienach unmittelbar, dafs die Congruenz $x^2+n \equiv 0 \pmod{p}$, deren Wurzeln $\Phi(g^2)$ und $\Phi(g^1)$ sind, reelle Wurzeln habe; $\sqrt{-n}$ wird daher reell, oder $-n$ ein quadratischer Rest nach p, wenn p nach n ein quadratischer Rest ist. Ist p kein quadratischer Rest nach n, so findet man

$$(\Phi(g^2))^{p-1} + (\Phi(g^1))^{p-1} \equiv -2 \pmod{p},$$

da nun $(\Phi(g^2))^{p-1} + (\Phi(g^1))^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$ werden müfste, wenn $\sqrt{-n}$ reell sein sollte, 2 aber nicht $\equiv -2 \pmod{p}$ werden kann, so folgt, dafs $-n$ quadratischer Nichtrest nach p sein mufs, wenn p nach n quadratischer Nichtrest ist. Ist nun n von der Form $4m+1$, m aber ungerade, so werden die reciproken Werthe von α^{g^0}, α^{g^4}, α^{g^8}, ... $\alpha^{g^{n-5}}$ in den Aus-

drücken α^{g^2}, α^{g^6}, ... $\alpha^{g^{n-3}}$ enthalten sein, und die reciproken Werthe von α^g, α^{g^5}, ... $\alpha^{g^{n-4}}$ in $\alpha^{g^3}\,\alpha^{g^7}$ .... $\alpha^{g^{n-2}}$. Bemerkt man noch, dafs $\alpha^{g^0+g^4+\ldots+g^{n-5}} = 1$ ist, so findet man leicht die beiden Gleichungen

$$(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^4})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-5}}) + (1-\alpha^{g^2})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-3}}) = 0,$$
$$(1-\alpha^{g^1})(1-\alpha^{g^5})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-4}}) + (1-\alpha^{g^3})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-2}}) = 0.$$

Nennt man die einzelnen der hier auftretenden Producte a_0 und a_2, a_1 und a_3, so hat man also $a_0+a_2=0$, $a_1+a_3=0$, und nach der ersten Gleichung $a_0\,a_1\,a_2\,a_3 = n$, oder $a_0\,a_1 = a_2\,a_3 = \pm\sqrt{n}$ und $a_1\,a_2 = a_0\,a_3 = \mp\sqrt{n}$. Die symmetrischen Functionen der Ausdrücke $a_0\,a_1$, $a_1\,a_2$, $a_2\,a_3$, $a_3\,a_0$ werden aber ungeändert bleiben, wenn man statt α irgend einen Ausdruck von der Form α^{g^k} setzt. Vermöge der nachgewiesenen Relationen unter den Ausdrücken a_0, a_1, a_2, a_3 wird dasselbe auch schon von den symmetrischen Functionen der beiden Ausdrücke $a_0\,a_1$ und $a_1\,a_2$ gelten. Sehen wir nun beide Ausdrücke als Wurzeln der Congruenz $x^2-n \equiv 0 \pmod{p}$, so liegt die Entscheidung, ob diese Congruenz reelle oder imaginäre Wurzeln habe, sehr nahe. Man findet nämlich ähnlich wie oben die Congruenz $(a_0\,a_1)^{p-1}+(a_1\,a_2)^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$, wenn p quadratischer Rest nach dem Modul n ist, und $(a_0\,a_1)^{p-1}+(a_1\,a_2)^{p-1} \equiv -2 \pmod{p}$, wenn p quadratischer Nichtrest nach dem Modul n ist. Ist also p nach dem Modul n Rest, so wird auch n nach dem Modul p Rest sein, und umgekehrt. Die angeführte Beweisart erstreckt sich auf alle Primzahlen von der Form $4m+1$, damit jedoch die wesentlichen Puncte klarer hervortreten, will ich den Beweis noch für Primzahlen von der Form $8m+1$, unter der Voraussetzung m sei ungerade, kurz durchführen. Bezeichnet also g eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{n-1}-1 \equiv 0 \pmod{n}$, und setzen wir

$$(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^8})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-9}}) = b_0,$$
$$(1-\alpha^{g^1})(1-\alpha^{g^9})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-8}}) = b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1-\alpha^{g^7})(1-\alpha^{g^{15}})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-2}}) = b_7,$$

so gelten folgende Gleichungen:

$$b_0+b_4=0, \quad b_1+b_5=0, \quad b_2+b_6=0, \quad b_3+b_7=0 \quad \text{und}$$
$$b_0\,b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6\,b_7 = n.$$

Man findet ferner, dafs die symmetrischen Functionen der Ausdrücke $b_0\,b_1\,b_2\,b_3$, $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$, $b_2\,b_3\,b_4\,b_5$, ... $b_4\,b_5\,b_6\,b_7$ ungeändert bleiben, wenn

man statt α einen Ausdruck von der Form α^{g^k} setzt. Vermöge der hier bestehenden Relationen, mufs dasselbe für die symmetrischen Functionen zweier auf einander folgender Ausdrücke, z. B. von $b_0 b_1 b_2 b_3$ und $b_1 b_2 b_3 b_4$ gelten. Diese beiden Ausdrücke kann man als Wurzeln der Gleichung $x^2 - n = 0$ betrachten. Nun findet man aber durch die vorhergehenden Betrachtungen $(b_0 b_1 b_2 b_3)^{p-1} + (b_1 b_2 b_3 b_4)^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$, wenn p nach dem Modul n quadratischer Rest ist, und $(b_0 b_1 b_2 b_3)^{p-1} + (b_1 b_2 b_3 b_4)^{p-1} \equiv -2 \pmod{p}$, wenn p nach n quadratischer Nichtrest ist. Demnach wird also p nach n Rest sein, wenn n nach p Rest ist, und umgekehrt. — Mit einem gröfseren Aufwand von Rechnung liefse sich der Beweis für das Reciprocitätsgesetz nach den angewandten Principien wohl mehr zusammenfassen, wir zogen indessen die einfachsten Schlüsse vor, da sie einestheils genau mit den ersten Versuchen über den Beweis des Reciprocitätsgesetzes zusammen hängen, anderntheils das neu hinzugetretene Element der Untersuchung, in seiner Verbindung mit denselben Principien, welche der Kreistheilung zum Grunde liegen, klar zeigen. — Wenden wir uns jetzt zu einem ähnlichen Satz über die Congruenzen des vierten Grades

Bezeichnet also n irgend eine Primzahl, und lassen wir den übrigen Buchstaben ihre Bedeutung, so kann man die beiden Ausdrücke $(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^2}) \ldots (1-\alpha^{g^{n-3}})$ und $(1-\alpha^{g^1})(1-\alpha^{g^3}) \ldots (1-\alpha^{g^{n-2}})$, die wir durch A_0 und A_1 bezeichnen wollen, als Wurzeln einer Gleichung des zweiten Grades betrachten, deren Coefficienten ganze Zahlen sind; denn die symmetrischen Functionen beider Ausdrücke ändern sich nicht, wenn man statt α irgend einen Ausdruck von der Form α^{g^k} substituirt. Man kann nun leicht entscheiden, ob diese Gleichung des 2ten Grades, als Congruenz nach dem Modul p aufgefafst, reelle Wurzeln habe oder nicht. Ist p quadratischer Rest nach n, so findet man $A_0^{p-1} + A_1^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$, im andern Falle $A_0^{p-1} + A_1^{p-1} \equiv -2 \pmod{p}$; daher entsprechen im ersten Falle der Congruenz zwei reelle Wurzeln, und im andern Falle zwei imaginäre Wurzeln. Substituirte man für jene Ausdrücke ihre Werthe, die man der Form nach auch kennt, wenn n von der Form $4m+1$ ist, so würde hieraus ebenfalls das Reciprocitätsgesetz hervorgehen. Setzen wir nun p sei Rest von n, und $n = 4m+1$, m aber ungerade, so behaupte ich $-A_0$ und $-A_1$ werden nach p quadratische Reste sein, wenn p biquadratischer Rest nach n ist, und dieselben Ausdrücke werden nach p quadratische

Nichtreste sein, wenn p biquadratischer Nichtrest nach n ist. Um dieses zu beweisen setze man:

$$(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^4})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-5}}) = a_0,$$
$$(1-\alpha^{g^1})(1-\alpha^{g^5})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-4}}) = a_1,$$
$$(1-\alpha^{g^2})(1-\alpha^{g^6})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-3}}) = a_2,$$
$$(1-\alpha^{g^3})(1-\alpha^{g^7})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-2}}) = a_3.$$

Die Ausdrücke a_0, a_1, a_2, a_3 bilden nun die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung, die als Congruenz nach dem Modul p aufgefafst, vier reelle Wurzeln haben wird, wenn p biquadratischer Rest nach dem Modul n ist; denn man beweist leicht, dafs für diesen Fall

$$a_0^{p-1} + a_1^{p-1} + a_2^{p-1} + a_3^{p-1} \equiv 4 \pmod{p},$$
$$a_0^{2(p-1)} + a_1^{2(p-1)} + a_2^{2(p-1)} + a_3^{2(p-1)} \equiv 4 \pmod{p}$$
$$a_0^{3(p-1)} + a_1^{3(p-1)} + a_2^{3(p-1)} + a_3^{3(p-1)} \equiv 4 \pmod{p}$$

sei, woraus nach §. 5. die Realität der vier Wurzeln folgt. Wäre hingegen p nur quadratischer Rest, aber nicht biquadratischer Rest nach n, so würde $a_0^{p-1} + a_1^{p-1} + a_2^{p-1} + a_3^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$ folgen; demnach müfsten also die vier Wurzeln jener Congruenz imaginär werden, da $a_0 + a_2 = 0$ und $a_1 + a_3 = 0$ ist. Nun ist aber $A_0 = a_0 a_2 = -a_0^2$ und $A_1 = a_1 a_3 = -a_1^2$; oder $-A_0 = a_0^2$ und $-A_1 = a_1^2$. $-A_0$ und $-A_1$ werden daher quadratische Reste nach p, wenn a_0 und a_1 reell werden, und quadratische Nichtreste, wenn a_0 und a_1 imaginär werden; oder $-A_0$ und $-A_1$ werden quadratische Reste oder Nichtreste nach p, je nachdem p von n biquadratischer Rest oder nur quadratischer Rest ist. Bedienen wir uns der *Legendre*schen Bezeichnung, nach welcher $\left(\frac{-A_0}{p}\right)$ den Werth $+1$ oder -1 andeutet, je nachdem $(-A_0)^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$ oder $-1 \pmod{p}$ ist, so erhalten wir also $\left(\frac{-A_0}{p}\right) = \left(\frac{\sqrt{p}}{n}\right)$ und $\left(\frac{-A_1}{p}\right) = \left(\frac{\sqrt{p}}{n}\right)$.

Herr Professor *Dirichlet* hat in einer Abhandlung des dritten Hefts des 17ten Bandes dieses Journals gezeigt, dafs A_0 im Allgemeinen von der Form $\frac{1}{2}\sqrt{n}(h \pm k\sqrt{n})$ und A_1 von der Form $\frac{1}{2}\sqrt{n}(h \mp k\sqrt{n})$ sei, wo h und k ganze gerade oder ungerade Zahlen andeuten, wenn n von der Form $8m+5$ ist, und gerade Zahlen, wenn n von der Form $8m+1$ ist. Substituiren wir diesen Ausdruck in die obige Gleichung, so erhalten wir $\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{n}\,(h \pm k\sqrt{n})}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{\sqrt{p}}{n}\right)$. Setzt man nun, wenn h und k gerade

sind, $\frac{h}{2} = h'$, $\frac{k}{2} = k'$ und für den andern Fall $(\frac{1}{2}(h+k\sqrt{n}))^3 = h'+k'\sqrt{n}$, also $\frac{1}{8}(n^3+3hk^2n) = h'$ und $\frac{1}{8}(3h^2k+k^3n) = k'$, so werden, wie in der erwähnten Abhandlung gezeigt worden, h' und k' ganze Zahlen sein, welche der Gleichung $h'^2 - nk'^2 = -1$ genügen. Aus der obigen Gleichung leitet man nun sehr leicht die folgende ab:

$$\left(\frac{h' \pm k'\sqrt{n}}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{\sqrt{p}}{n}\right).\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right).$$

Es folgt aber aus der bekannten Theorie der unbestimmten Gleichung $x^2 - ny^2 = -1$, dafs alle Ausdrücke $x + y\sqrt{n}$, wenn x und y jener Gleichung genügen, entweder Reste oder Nichtreste nach p sein werden, vorausgesetzt dafs n Rest nach p ist, demnach also der aufgestellte Satz von den besondern Werthen h' und k' unabhängig wird. Ist nun p ebenfalls von der Form $8m+5$, so ist $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$; die obige Gleichung geht folglich in $\left(\frac{h' \pm k'\sqrt{n}}{p}\right) = \left(\frac{\sqrt{p}}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)$ über. Genügen nun die beiden Zahlen q' und r' der Gleichung $q'^2 - r'^2 p = -1$, so hat man auch $\left(\frac{q' \pm r'\sqrt{p}}{n}\right) = \left(\frac{\sqrt{p}}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)$. Multiplicirt man beide Gleichungen in einander, so erhält man $\left(\frac{h' \pm k'\sqrt{n}}{p}\right)\left(\frac{q' \pm r'\sqrt{p}}{n}\right) = 1$. Ist also p Rest nach dem Modul n, und sind beide Primzahlen von der Form $8m+5$, finden ferner folgende beide Gleichungen Statt, $h'^2 - nk'^2 = -1$ und $q'^2 - pr'^2 = -1$, so wird $h' \pm k'\sqrt{n}$ quadratischer Rest oder Nichtrest nach p sein, wenn entsprechend $q' \pm r'\sqrt{p}$ quadratischer Rest oder Nichtrest nach n ist. Wir wollen jetzt zeigen, dafs dieser Satz für irgend zwei Primzahlen von der Form $4m+1$ gelte.

Es sei also n von der Form $8m+1$, m aber ungerade, so wollen wir wie oben

$$(1-\alpha^{g^0})(1-\alpha^{g^8})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-9}}) \text{ durch } b_0,$$
$$(1-\alpha^{g^1})(1-\alpha^{g^9})\ldots.(1-\alpha^{g^{n-8}}) \text{ durch } b_1$$
$$\text{etc.}$$

bezeichnen. Man erhält demnach $A_0 = b_0 b_2 b_4 b_6$ und $A_1 = b_1 b_3 b_5 b_7$. Da aber hier die Gleichungen

$$b_0 + b_4 = 0, \quad b_1 + b_5 = 0, \quad b_2 + b_6 = 0, \quad b_3 + b_7 = 0$$

gelten, so wird $A_0 = (b_0 b_2)^2$ und $A_1 = (b_1 b_3)^2$. Man kann nun die Ausdrücke $b_0 b_2$, $b_2 b_4$, $b_4 b_6$, $b_6 b_0$ und $b_1 b_3$, $b_3 b_5$, $b_5 b_7$, $b_7 b_1$ als Wurzeln

einer Gleichung vom 8ten Grade betrachten, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, denn die symmetrischen Functionen dieser Ausdrücke ändern sich nicht, wenn man statt α irgend einen Ausdruck von der Form α^{g^k} substituirt. Vermöge der hier bestehenden Beziehungen, wird dasselbe aber auch schon von den vier Ausdrücken $b_0 b_2$, $b_2 b_4$, $b_1 b_3$, $b_3 b_5$ gelten, weshalb man diese als Wurzeln einer Gleichung des 4ten Grades ansehen kann, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Ist nun p ein biquadratischer Rest von n, so findet man leicht folgende Congruenzen:

$$(b_0 b_2)^{p-1} + (b_2 b_4)^{p-1} + (b_1 b_3)^{p-1} + (b_3 b_5)^{p-1} \equiv 4 \pmod{p},$$
$$(b_0 b_2)^{2(p-1)} + (b_2 b_4)^{2(p-1)} + (b_1 b_3)^{2(p-1)} + (b_3 b_5)^{2(p-1)} \equiv 4 \pmod{p},$$
$$(b_0 b_2)^{3(p-1)} + (b_2 b_4)^{3(p-1)} + (b_1 b_3)^{3(p-1)} + (b_3 b_5)^{3(p-1)} \equiv 4 \pmod{p}.$$

Wäre hingegen p nur quadratischer Rest, aber nicht biquadratischer Rest, so würden die Ausdrücke auf der rechten Seite alle in -4 übergehen. Für den ersten Fall werden also nach §. 5. die vier Wurzeln jener Gleichung, wenn man sie als Congruenz nach dem Modul p auffafst, reell, und für den andern imaginär. Im ersten Fall wird also $A_0 \equiv (b_0 b_2)^2 \pmod{p}$ Rest, im andern quadratischer Nichtrest. Es wird übrigens dem Leser bei einiger Aufmerksamkeit nicht entgehen, dafs sich dasselbe Resultat für alle Primzahlen von der Form $8m+1$, m mag gerade oder ungerade sein, ähnlich ableiten läfst. Substituiren wir nun für A_0 und A_1 seinen Werth, so erhalten wir $\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{n}(h \pm k\sqrt{n})}{p}\right) = \left(\frac{\sqrt{p}}{h}\right)$. Setzt man $\frac{1}{2}h = h'$ und $\frac{1}{2}k = k'$, so realisiren diese ganze Zahlen die Gleichung $h'^2 - nk'^2 = -1$. Drücken wir die erhaltene Gleichung durch diese Werthe aus, so geht sie in $\left(\frac{h' \pm k'\sqrt{n}}{p}\right) = \left(\frac{\sqrt{p}}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)$ über. Diese Gleichung ist, wie vorher bemerkt worden, von den besonderen Werthen h' und k' unabhängig, und man kann für dieselben irgend zwei Zahlen x und y setzen, die der Gleichung $x^2 - ny^2 = -1$ genügen. Combinirt man diese Gleichung mit der entsprechenden $\left(\frac{q' \pm r'\sqrt{p}}{n}\right) = \left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)$, die immer Statt findet, wenn n von der Form $4m+1$ ist, m mag gerade oder ungerade sein, so erhält man die ganz allgemeine Beziehung:

$$\left(\frac{h' \pm k'\sqrt{n}}{p}\right)\left(\frac{q' \pm r'\sqrt{p}}{n}\right) = 1,$$

in welcher beide Primzahlen p und n von der Form $4m+1$ sind, und eine von der andern als quadratischer Rest vorausgesetzt ist.

Es würde nicht schwer sein, die Zahl der Anwendungen der festgestellten Principien noch zu vermehren; wir wollen jedoch jetzt lieber zum Schlufs das Feld der Beziehungssätze höherer Congruenzen im Allgemeinen noch etwas näher bezeichnen.

§. 7.

Bedeutet n eine Primzahl, und ist $n-1$ aus irgend zwei Factoren k und m zusammengesetzt, bedeutet ferner α eine Wurzel der Gleichung $\frac{x^n-1}{x-1}=0$ und g eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{n-1}\equiv 1 \pmod{n}$, so wollen wir irgend eine ganze symmetrische Function der Ausdrücke α^{g^0}, α^{g^k}, $\alpha^{g^{2k}}$, ... $\alpha^{g^{(m-1)k}}$ durch $f(g^k)$ bezeichnen. Setzt man statt α nach der Reihe α^g, α^{g^2}, ... $\alpha^{g^{k-1}}$, so mögen die diesen Werthen entsprechenden Ausdrücke von $f(g^k)$ durch $f(g^{k+1})$, $f(g^{k+2})$, ... $f(g^{2k-1})$ angedeutet werden. Betrachtet man nun den Complex der Ausdrücke $f(g^k)$, $f(g^{k+1})$, $f(g^{k+2})$, ... $f(g^{2k+1})$, so bleibt dieser ungeändert, wenn man statt α irgend einen Ausdruck von der Form α^{g^r}, wo r irgend eine ganze Zahl bedeutet, einführt. Die einzelnen Ausdrücke könnten sich nämlich wohl ändern, jedoch nur so, dafs einer in den andern überging. Die symmetrischen Functionen der Ausdrücke $f(g^k)$, $f(g^{k+1})$, $f(g^{k+2})$, ... $f(g^{2k-1})$ werden daher ungeändert bleiben, wenn man statt α einen Ausdruck α^{g^r} einsetzt; denn der Complex der Ausdrücke, aus denen ein Mal und das andere Mal die symmetrischen Functionen gebildet werden, bleibt derselbe. Man kann daher die Ausdrücke $f(g^k)$, $f(g^{k+1})$, $f(g^{k+2})$, ... $f(g^{2k-1})$ als Wurzeln einer Gleichung vom k^{ten} Grade ansehen, deren Coefficienten, als ganze symmetrische Functionen dieser Ausdrücke, nach dem Hülfssatz des §. 6. ganze Zahlen sein müssen. Wird diese Gleichung nun als Congruenz nach dem Modul p aufgefafst, und p ist eine Primzahl, die nicht kleiner als k ist, und z ungleich ein k^{ter} Rest nach dem Modul n (demnach also die Congruenz $x^k\equiv p \pmod{n}$ k reelle Wurzeln hat), so hat auch jene Congruenz nach dem Modul p, k reelle Wurzeln. Zum Beweise bemerke man, dafs wenn man $f(g^k)$ wie ein Polynom in die p^{te} Potenz erhebt, man zuerst die p^{ten} Potenzen der einzelnen Ausdrücke erhält, alle übrigen Ausdrücke, die nothwendigerweise ebenfalls einen symmetrischen Ausdruck der Elemente α^{g^0}, α^{g^k}, ... $\alpha^{g^{(m-1)k}}$ bilden müssen, werden in p multiplicirt sein. Die p^{ten} Potenzen der einzelnen Ausdrücke werden aber, wenn p

ein k^{ter} Rest nach dem Modul n ist, den ursprünglichen Ausdruck wieder erzeugen, wenn sie nicht noch in ganze Zahlen multiplicirt sind; für diesen Fall aber werden sie auch den ursprünglichen Ausdruck, nebst einem Vielfachen desselben Ausdrucks, das in p multiplicirt ist, erzeugen. Jedenfalls wird daher die Gleichung $[f(g^k)]^p = f(g^k) + p\Phi(g^k)$ gerechtfertigt sein, wo $\Phi(g^k)$ eine symmetrische Function der Ausdrücke α^{g^0}, α^{g^k}, ... $\alpha^{g^{(m-1)k}}$ andeutet. Dieselbe Gleichung mufs auch für die übrigen Ausdrücke gelten; wir erhalten demnach folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
[f(g^k)]^p &= f(g^k) + p\Phi(g^k),\\
[f(g^{k+1})]^p &= f(g^{k+1}) + p\Phi(g^{k+1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[f(g^{2k-1})]^p &= f(g^{2k-1}) + p\Phi(g^{2k-1}),
\end{aligned}$$

Man leitet aus diesen Gleichungen leicht die folgende ab:

$$\begin{aligned}
&[f(g^k)]^{p-1} + [f(g^{k+1})]^{p-1} + [f(g^{k+2})]^{p-1} + \ldots + [f(g^{2k-1})]^{p-1}\\
&= k + p\left[\frac{\varphi(g^k)}{f(g^k)} + \frac{\varphi(g^{k+1})}{f(g^{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(g^{2k-1})}{f(g^{2k-1})}\right].
\end{aligned}$$

Bringt man die auf der rechten Seite eingeklammerten Ausdrücke auf den gemeinschaftlichen Nenner $f(g^k)\,f(g^{k+1})\,\ldots\,f(g^{2k-1})$, so mufs der Zähler eine solche Function von α werden, die ihren Werth nicht ändert, wenn man statt α, α^{g^r} setzt, denn der Nenner, so wie die linke Seite der Gleichung, haben offenbar diese Eigenschaft. Der Zähler und Nenner des Bruchs müssen sich also nach dem Früheren durch ganze Zahlen darstellen lassen; bezeichnen wir den entsprechenden Bruch mit $\frac{A}{B}$, so mufs $p.\frac{A}{B}$ eine ganze Zahl und $\equiv 0 \pmod{p}$ werden, wenn B oder $f(g^k)\,f(g^{k+1})\ldots f(g^{2k-1})$ nicht durch p aufgeht. Dies vorausgesetzt, so erhalten wir

$$(f(g^k))^{p-1} + (f(g^{k+1}))^{p-1} + \ldots + (f(g^{2k-1}))^{p-1} \equiv k \pmod{p},$$

auf ähnliche Weise kann man beweisen, dafs unter derselben Voraussetzung, $f(g^k)\,f(g^{k+1})\ldots f(g^{2k-1})$ gehe nicht durch p auf, folgende Congruenzen Statt finden müssen:

$$\begin{aligned}
(f(g^k))^{2(p-1)} + (f(g^{k+1}))^{2(p-1)} + \ldots + (f(g^{2k-1}))^{2(p-1)} &\equiv k \pmod{p},\\
(f(g^k))^{3(p-1)} + (f(g^{k+1}))^{3(p-1)} + \ldots + (f(g^{2k-1}))^{3(p-1)} &\equiv k \pmod{p},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(f(g^k))^{(k-1)(p-1)} + (f(g^{k+1}))^{(k-1)(p-1)} + \ldots + (f(g^{2k-1}))^{(k-1)(p-1)} &\equiv k \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Nach §. 5. folgt nun hieraus die Realität der Wurzeln der oben näher bezeichneten Congruenz.

Ginge nun $f(g^k)\,f(g^{k+1})\ldots.f(g^{2k-1})$ durch p auf, so mufs es entweder irgend einen Werth von x geben, der die Congruenz

$$(x-f(g^k))\,(x-f(g^{k+1}))\ldots.(x-f(g^{2k-1}))\equiv 0 \pmod{p}$$

nicht realisirt; denn sonst hätte diese Congruenz p reelle Wurzeln, nämlich 0, 1, 2, ... $p-1$, also wenn $k<p$ ist, mehr Wurzeln als der Grad der Congruenz anzeigt, was bekanntlich nicht möglich ist; oder wäre $k=p$, so wären für diesen Fall, wenn nämlich obige Congruenz für jeden Werth von x erfüllt würde, sämmtliche Wurzeln reell, was wir eben beweisen wollen. Bezeichnen wir also eine solche Zahl, die jene Congruenz nicht realisirt, durch a, so folgt jetzt aus dem Obigen, dafs die Gleichung für $(a-f(g^k))$, $(a-f(g^{k+1}))$, ... $(a-f(g^{2k-1}))$ als Congruenz nach dem Modul p aufgefafst k reelle Wurzeln habe. Hieraus folgt aber leicht, dafs dann auch die Congruenz

$$(x-f(g^k))\,(x-f(g^{k+1}))\ldots.(x-f(g^{2k-1}))\equiv 0 \pmod{p}$$

k reelle Wurzeln habe, was zu beweisen war.

Um nun die auf jene Gleichungen bezüglichen Sätze aufzustellen, bleibt noch ein schwieriger Theil der Arbeit übrig, nämlich: die Coefficienten jener Gleichungen zu bestimmen, die, wenn auch die Form von $f(g^k)$ als bekannt vorausgesetzt wird, sich im Allgemeinen analytisch nicht bestimmen lassen, sondern von der Natur der Primzahl n abhängen. Der Hr. Professor *Jacobi* hat diese Arbeit, in so fern sie sich auf Congruenzen des 2ten, 3ten und 4ten Grades bezieht, schon seit längerer Zeit für den Fall ausgeführt, wenn $\Phi(g^k)=\alpha^{g^0}+\alpha^{g^k}+\alpha^{g^{2k}}+\ldots.+\alpha^{g^{(m-1)k}}$ ist. Die Resultate hat der Herr Verfasser in einer Abhandlung bei der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin niedergelegt.

Jener allgemeine Satz aber, den ich diesen Untersuchungen zum Grunde gelegt habe, ist meines Wissens noch von Keinem angegeben worden, und die Realität der Wurzeln der betreffenden Congruenzen wurde auf anderem Wege erkannt.

Berlin, den 2ten Februar 1839.

15.

Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution.

(Von Herrn *C. G. J. Jacobi*, Professor ordin. zu Königsberg in Pr.)

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 18. April 1839.)

Da die Erdoberfläche nicht die Form einer Umdrehungsfläche besitzt, so hat man öfter versucht, den an einem Punct derselben ausgeführten Triangulirungen ein osculirendes Ellipsoid mit drei ungleichen Haupt-Achsen anzuschliefsen. Dies erhöht das Interesse der Aufgabe, die geodätische Linie auf einem solchen Ellipsoid zu suchen, eine Aufgabe, die von den gröfsten analytischen Schwierigkeiten umringt zu sein scheint. In der That erscheint die Differenzialgleichung 2ter Ordnung, von welcher das Problem abhängt, wenn man die gewöhnlich üblichen Variabeln wählt, in einer so complicirten Form, dafs man leicht von jeder Behandlung derselben abgeschreckt wird. Nach mehreren vergeblichen Versuchen ist es mir jedoch durch Anwendung besonderer Hülfsmittel gelungen, diese Gleichung vollständig zu integriren, d. h. auf Quadraturen zurückzuführen, wie ich der Pariser Akademie der Wissenschaften unter dem 28. December des vorigen Jahres mitgetheilt habe. Ich will jetzt die Form des Resultats näher auseinander setzen. Es sei die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1,$$

und a die kleinste, b die mittlere, c die gröfste der drei Constanten a, b, c. Da man die drei Coordinaten des Punctes einer gegebenen Oberfläche durch zwei Gröfsen ausdrücken kann, so wähle ich hierzu die Winkel φ und ψ, welche die Coordinaten durch die Formeln bestimmen,

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{c-a}\right)}\sin\varphi\sqrt{(b\cos^2\psi+c\sin^2\psi-a)},$$
$$y=\sqrt{b}\cos\varphi\sin\psi,$$
$$z=\sqrt{\left(\frac{c}{c-a}\right)}\cos\psi\sqrt{(c-a\cos^2\varphi-b\sin^2\varphi)}.$$

Die geodätische Linie auf dem gegebenen Ellipsoid wird dann durch eine Gleichung zwischen den beiden Winkeln Φ und ψ bestimmt,

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)}\, d\varphi}{\sqrt{(c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi)}\sqrt{((b-a)\cos^2\varphi - \beta)}} - \int \frac{\sqrt{(b\cos^2\psi + c\sin^2\psi)}\, d\psi}{\sqrt{(b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a)}\sqrt{((c-b)\sin^2\psi + \beta)}}.$$

Die Form dieser Gleichung ist, wie man sieht, sehr einfach. Eine Function des Winkels Φ wird einer Function des Winkels ψ gleich; die Functionen selbst sind *Abel*sche Integrale und zwar von der Form, welche zunächst auf die elliptischen folgt. Die beiden *Abel*schen Integrale sind, wenn sie auch hier in der trigonometrischen Form verschieden scheinen, doch im Wesen dieselben, so dafs man beide durch einfache Substitutionen in Integrale von derselben Form verwandeln kann, in denen die Werthe, welche die Variable anzunehmen hat, sich nur in verschiedenen Intervallen bewegen. Die Gröfsen α und β sind die beiden willkürlichen Constanten, welche das vollständige Integral der Differenzialgleichung 2ter Ordnung enthalten mufs. Die Constante α wird 0, wenn man die Integrale von denjenigen Werthen von Φ und ψ beginnen läfst, welche dem Puncte des Ellipsoids entsprechen, von dem aus man die geodätische Linie zieht. Die andere willkürliche Constante β kommt nur in einem der drei untern dem Integralzeichen als Factoren befindlichen Radicalen vor; sie wird auf algebraischem Wege durch die anfängliche Richtung bestimmt, die man der geodätischen Linie giebt. Man erhält ganz ähnliche Ausdrücke für die Rectification der geodätischen Linie. Für das Umdrehungs-Ellipsoid verwandelt sich das eine der beiden *Abel*schen Integrale in einen Kreisbogen, das andere in ein elliptisches Integral der 3ten Gattung, wodurch man die für das Umdrehungs-Ellipsoid bekannte Gleichung der geodätischen Linie erhält.

Die hier angewandte Art, die drei Coordinaten des Punctes eines Ellipsoids durch zwei Winkel Φ und ψ auszudrücken, ist dieselbe, auf welche man geführt wird, wenn man den Punct des Ellipsoids als Intersection der beiden Krümmungslinien bestimmt, auf welchen er liegt, oder, was nach der schönen Bemerkung von *Karl Dupin* dasselbe ist, wenn man ihn als Intersection des Ellipsoids mit den beiden durch ihn gehenden Hyperboloiden betrachtet, deren Hauptschnitte mit denen des Ellipsoids die Brennpuncte gemein haben. *Legendre* hat zuerst die hierauf bezüg-

lichen von *Monge* gegebenen Formeln als analytisches Instrument benutzt, um den Inhalt der Oberfläche des Ellipsoids auf die Länge von Ellipsenbogen zurückzuführen, wie einst *Archimedes* den Inhalt der Kugel-Oberfläche auf die Länge der Kreisperipherie zurückgeführt hat *). Früher benutzte schon *Euler* ähnliche, aber auf die Ebene beschränkte Formeln in seiner berühmten Bestimmung der Bewegung eines nach zwei festen Centren nach dem *Neuton*schen Gesetze angezogenen Punctes. Denn die von ihm gewählten Variabeln kommen nach einer Bemerkung *Legendres* darauf hinaus, den angezogenen Punct als Durchschnitt der durch ihn gehenden Ellipse und Hyperbel zu bestimmen, welche die beiden Anziehungscentra zu gemeinschaftlichen Brennpuncten haben.

Man kann eine andere merkwürdige Anwendung der oben angegebenen Art, die Coordinaten des Punctes eines Ellipsoids auszudrücken, auf die Aufgabe machen, die Oberfläche des Ellipsoids so auf einer Karte abzubilden, dafs die unendlich kleinen Theile ähnlich bleiben. In dieser Art hat *Lambert* in seinen Beiträgen das Problem der Kartenprojection aufgefafst, und *Lagrange* hat in den Schriften dieser Akademie die allgemeine Lösung für alle Rotationsflächen gegeben, welche *Gaufs* in einer von der Kopenhagener Akademie gekrönten und in *Schumachers* astronomischen Abhandlungen abgedruckten Preisschrift auf alle Flächen ausgedehnt hat. Drückt man das Element einer auf der Fläche gezeichneten Curve durch

$$\sqrt{(A\,dt^2+2B\,dt\,du+C\,du^2)}$$

aus, wo t und u die beiden Variabeln sind, durch welche man einen Punct der gegebenen Fläche bestimmt, so hat man den quadratischen Ausdruck

$$A\,dt^2+2B\,dt\,du+C\,du^2$$

in zwei Factoren,

$$P\,dt+(Q+\sqrt{R})\,du \quad \text{und} \quad P\,dt+(Q-\sqrt{R})\,du,$$

zu zerfällen. Die Lösung des Problems hängt dann nach der von *Gaufs* gegebenen Theorie von der Integration der Gleichung

$$0 = P\,dt+(Q+\sqrt{R})\,du$$

---

*) Ich habe im 8ten Bande gegenwärtigen Journals gezeigt, dafs man zu den von *Legendre* gefundenen Resultaten auch auf sehr einfachem und elementarem Wege gelangen kann, wenn man die Coordinaten des Puncts eines Ellipsoids durch die beiden Winkel ausdrückt, welche die Richtung der an ihm errichteten Normale bestimmen. Eine andere hierzu führende, eben so neue als elegante und umfassende Methode hat neuerdings *Dirichlet* in einer der Akademie gelesenen Abhandlung angegeben.

ab, in welcher P, Q, R gegebne Functionen von t und u sind. Für Rotationsflächen läfst sich diese Gleichung immer integriren und man kommt dann auf die von *Lagrange* gegebenen Formeln. Ich bemerke noch, was man leicht sieht, dafs dasselbe allgemein für conische und cylindrische Flächen der Fall ist. Wenn man daher auch alle speciellen Flächen zweiter Ordnung leicht behandelt, so bietet doch die Aufgabe für die allgemeine Fläche zweiter Ordnung bei der gewöhnlichen Wahl der Variabeln unübersteigliche Hindernisse wegen der ungemein complicirten Form der zu integrirenden Differenzialgleichung. Nimmt man aber den Ausdruck des Elements einer auf einem Ellipsoid befindlichen Curve, welchen ich im 8ten Bandes des gegenwärtigen Journals gegeben habe, so finden sich in der Differenzialgleichung die Variabeln von selbst separirt, und die Aufgabe ist auf blofse Quadraturen zurückgeführt, und zwar auch hier auf *Abel*sche Transcendenten.

Man kann leicht die in den eben angedeuteten Problemen auf drei Variabeln bezüglichen Formeln auf jede Zahl Variabeln ausdehnen, und bekommt dann merkwürdige Amplificationen wichtiger Theoreme. Auf diese Weise habe ich die berühmte von *Legendre* entdeckte Relation zwischen den vollständigen Integralen der ersten und zweiten Gattung zweier elliptischen Integrale, deren Moduln Complemente zu einander sind, auf alle *Abel*schen Integrale ausgedehnt. Aber dieselbe Substitution hat mich auch auf das *Abel*sche Theorem selbst geführt, auf einem Wege und durch Betrachtungen, welche von dem von *Abel* eingeschlagenen gänzlich verschieden sind, und welche von einem mechanischen Problem ausgehen. Die von *Euler* gegebenen Formeln für die Bahn eines von zwei festen Centren angezogenen Punctes enthalten elliptische Transcendenten. Ist die eine Masse oder beide Null, so ist die Bahn eine Ellipse oder gerade Linie, also ihre Gleichung algebraisch. Aber durch das Verschwinden einer oder beider Massen hören die elliptischen Integrale nicht auf elliptische Integrale zu sein, so dafs man die elliptische Bewegung eines Planeten oder selbst die geradlinige Bewegung eines Punctes durch eine Gleichung zwischen elliptischen Integralen erhält. Diese Form ist nicht ohne Interesse; denn wir haben hier für die elliptische Bewegung Formeln, die nur eine geringe Aenderung erleiden, wenn noch ein zweites anziehendes Centrum hinzukommt. Aber abgesehen hiervon, sind zwei Methoden gegeben, dasselbe Problem zu behandeln, von denen die eine die Lösung in

transcendenter, die andere in algebraischer Form darstellt, oder es ist eine neue Methode gegeben, das Fundamentaltheorem über die Addition der elliptischen Integrale aufzufinden. In seiner Behandlung des mechanischen Problems in den älteren Schriften dieser Akademie hat *Euler* das früher von ihm gefundene Fundamentaltheorem nur zur Verificirung der für die speciellen Fälle gefundenen Formeln benutzt. Mir schien es von Wichtigkeit, die beiden Methoden mit einander in Verbindung zu setzen, welche die transcendente und die algebraische Form ergeben, um so direct von der einen auf die andere zu kommen. Indem ich die für zwei Variabeln angewandten Formeln auf jede Zahl Variabeln ausdehnte, was, wie ich bemerkt, mit Leichtigkeit geschieht, erhielt ich das *Abel*sche Theorem, und zwar in einer neuen, merkwürdigen und fertigen Form. Zugleich ergab sich ein einfacher Weg von dem System gewöhnlicher Differenzialgleichungen, wie ich dasselbe früher in einer Abhandlung im gegenwärtigen Journal über die *Abel*schen Transcendenten aufgestellt habe, durch Anwendung passender Multiplicationen direct zu den algebraischen Integralen zu gelangen, was mir früher wegen der grofsen Complication des Gegenstandes wohl wünschenswerth, aber schwer zu erreichen schien.

Einer der tiefsinnigsten Mathematiker, Herr *Lamé*, Correspondent dieser Akademie, hat neuerdings die hier erwähnten Substitutionen auf schwierige physikalische Probleme angewendet.

18. April 1839.

16.

Ueber die complexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der 5ten, 8ten und 12ten Potenzen zu betrachten sind.

(Von Herrn *C. G. J. Jacobi*, Professor ordin. an der Universität zu Königsberg in Pr.)

(Gelesen in der Akademie der Wissenschaften den 16. Mai 1839.)

Gaufs hat in seinen Untersuchungen über die biquadratischen Reste die complexen Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ als Moduln oder Divisoren eingeführt. Indem er dieses that, konnte er über den biquadratischen Character zweier complexen Primzahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ in Bezug auf einander ein Reciprocitätsgesetz von solcher Einfachheit und Vollendung aufstellen, wie das berühmte Fundamentaltheorem über quadratische Reste, das von ihm sogenannte Kleinod der höhern Arithmetik besitzt. Aber wie einfach jetzt auf eine solche Einführung der complexen Zahlen als Moduln erscheinen mag, so gehört sie nicht desto weniger zu den tiefsten Gedanken der Wissenschaft; ja ich glaube nicht, dafs zu einem so verborgenen Gedanken die Arithmetik allein geführt hat, sondern dafs er aus dem Studium der elliptischen Transcendenten geschöpft worden ist, und zwar der besondern Gattung derselben, welche die Rectification von Bogen der Lemniscata giebt. In der Theorie der Vervielfachung und Theilung von Bogen der Lemniscata spielen nämlich die complexen Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ genau die Rolle gewöhnlicher Zahlen. Wie man durch rationale Ausdrücke die trigonometrischen Functionen des $n$fachen Kreisbogens darstellt, so kann man vermittelst rationaler Formeln den Bogen der Lemniscata mit einer complexen Zahl $a+b\sqrt{-1}$ multipliciren; wie man den Kreisbogen durch Auflösung einer Gleichung vom n^{ten} Grade in n Theile theilt, so theilt man den Bogen der Lemniscata in $a+b\sqrt{-1}$ Theile durch Auflösung einer Gleichung vom Grade $aa+bb$. So wie man einen Kreisbogen, wenn man ihn in 15 Theile theilen soll, in 3 und in 5 Theile theilt und aus beiden Theilungen die gesuchte findet, so hat man einen Bogen der Lemniscata, um ihn in 17 Theile zu theilen, in $1+4\sqrt{-1}$ und in $1-4\sqrt{-1}$ Theile zu theilen und setzt die Theilung in 17 Theile

aus beiden zusammen. So wird man bei Untersuchung jener besondern Gattung elliptischer Integrale, wenn man nur einigermafsen in ihre Natur eindringt, mit Nothwendigkeit darauf hingedrängt, die Zahlen $a+b\sqrt{-1}$ als Divisoren einzuführen. Mögen nun auch jene Untersuchungen der Integralrechnung viel complicirter und schwieriger erscheinen als jener einfache Gedanke der Zahlenlehre, so ist es doch nicht immer das einfache, welches sich zuerst darbietet. *Gaufs* versichert in den *Disquisitiones arithm.* die Methode seiner Kreistheilung auf die Theilung der ganzen Lemniscata anwenden zu können und verspricht hierüber ein *amplum opus* zu einer Zeit, in welcher er sich sicher noch nicht, seinen eigenen spätern Angaben zufolge, mit den biquadratischen Resten beschäftigt hatte. Auch ist es nicht unwahrscheinlich, dafs er die Fundamentaltheoreme über biquadratische Reste aus dieser Quelle geschöpft hat. Erst *Abel* hat dieses Versprechen von *Gaufs* eingelöst, indem er wenigstens die ersten Grundzüge dieser Ausdehnung der *Gaufs*'schen Methoden der Kreistheilung auf die Theilung der Lemniscata in seinen ersten, im gegenwärtigen Journal publicirten Arbeiten über die elliptischen Transcendenten gab. Eine eben so interessante als schwierige Aufgabe dürfte es sein, dieser Theilung des Lemniscatenbogens in $a+b\sqrt{-1}$ Theile und der Zusammensetzung der p^{ten} Theile des Bogens aus seiner Theilung in $a+b\sqrt{-1}$ und in $a-b\sqrt{-1}$ Theile einen geometrischen Sinn abzugewinnen. Die Geometrie hat in neuerer Zeit mit Glück dem Imaginären auch auf ihrem Gebiete einen Platz angewiesen; es ist zu erwarten, dafs sie bei dem bewundernswürdigen Aufschwung, welchen sie unter *Steiners* Händen genommen hat, sich auch dieser abstruseren Ideen bemächtigen wird.

Es hat keines neuen Gedankens bedurft, um die kubischen Reciprocitätsgesetze zu finden; man hatte hierzu nur nöthig auf ganz analoge Weise complexe Zahlen von der Form $\frac{a+b\sqrt{-3}}{2}$, oder solche, die aus den Cubikwurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, als Moduln oder Divisoren einzuführen. Auch diese Untersuchungen kann man mit der Theorie besonderer elliptischer Integrale in Verbindung setzen. Das Reciprocitätsgesetz für kubische Reste, welches ich in einer frühern Note mitgetheilt habe, ist noch einfacher wie das von *Gaufs* für die biquadratischen Reste aufgestellte, und ergiebt sich ganz unmittelbar aus bekannten Formeln der Kreistheilung.

Nachdem *Gaufs* in seiner zweiten Abhandlung über biquadratische Reste die Elemente der complexen Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ abgehandelt, bleibt es übrig, unter den Methoden und Resultaten der Arithmetik diejenigen auszumitteln, welche auch für diese complexe Zahlen ihre Gültigkeit haben. So zum Beispiel sieht man leicht, dafs die *Lagrange*sche Methode, die quadratischen Formen zu reduciren, auch auf solche Ausdrücke $pyy+qyz+rzz$ sich ausdehnen läfst, in welchen p, q, r, y, z complexe Zahlen der angegebenen Art bedeuten. Um die einfachste complexe Form zu nehmen, $yy-\sqrt{-1}.zz$, kann man beweisen, dafs jede Zahl $a+b\sqrt{-1}$, welche solche Form theilt, wiederum dieselbe Form haben müsse, und der Beweis ist vollkommen dem Beweise des bekannten Satzes analog, dafs jede Zahl, welche die Form $yy+zz$ theilt, wiederum die Summe zweier Quadrate ist. Ist $p=aa+bb$ eine Primzahl von der Form $8n+1$, so beweist man aus den Elementen der Theorie dieser complexen Zahlen sogleich, dafs $\sqrt{-1}$ quadratischer Rest von $a+b\sqrt{-1}$ ist, oder, was dasselbe ist, $a+b\sqrt{-1}$ Theiler einer Form $yy-\sqrt{-1}.zz$ ist, also nach dem eben bemerkten Satze selber diese Form hat. Zertheilt man diese Form in die beiden Factoren $y+\sqrt[4]{-1}.z$ und $y-\sqrt[4]{-1}.z$, und setzt

$$y=y'+y''\sqrt{-1}, \quad z=z'+z''\sqrt{-1},$$

wo y', y'', z', z'' reelle ganze Zahlen bedeuten, so erhält man $a+b\sqrt{-1}$ in zwei Factoren,

$$y'+y''\sqrt{-1}+\sqrt[4]{-1}\,[z'+z''\sqrt{-1}],$$
$$y'+y''\sqrt{-1}-\sqrt[4]{-1}\,[z'+z''\sqrt{-1}],$$

zerfällt, das ist in zwei complexen Zahlen, welche aus den 8ten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind. Schreibt man α für die 8te Wurzel der Einheit oder für $\sqrt[4]{-1}$, und setzt

$$\Phi\alpha=y'+y''\alpha^2+z'\alpha+z''\alpha^3,$$

so wird

$$a+b\sqrt{-1}=a+b\alpha^2=\Phi\alpha.\Phi\alpha^5$$

und, wenn man α^3 für α setzt,

$$a-b\sqrt{-1}=a-b\alpha^2=\Phi\alpha^3.\Phi\alpha^7.$$

Die Primzahl $p=aa+bb$, von der Form $8n+1$, ist daher immer das Product der vier complexen Zahlen

$$\Phi\alpha.\Phi\alpha^3.\Phi\alpha^5.\Phi\alpha^7.$$

Man sieht leicht, dafs das Product $\Phi\alpha.\Phi\alpha^3$ die Form $c+d\sqrt{-2}$ und das Product $\Phi\alpha.\Phi\alpha^7$ die Form $e+f\sqrt{2}$ erhält. Die drei Arten, auf

welche man die vier Factoren in zwei Paare ordnen kann, geben daher die Darstellungen derselben Primzahl in den drei Formen a^2+b^2, c^2+2d^2, e^2+2f^2, welche hier aus einer gemeinschaftlichen Quelle abgeleitet sind, so dafs die sechs Zahlen a, b, c, d, e, f auf rationale Art durch vier andre Zahlen y', y'', z', z'' ausgedrückt werden. Man kann diese Zerfällung der Primzahlen von der Form $8n+1$ in vier complexe Factoren, welche aus acht Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, auch durch die gewöhnlichen Methoden der Arithmetik ableiten. Ganz durch dieselben Methoden beweist man auch, dafs die Primzahlen von der Form $12n+1$ sich in vier complexe Factoren zerfällen lassen, welche aus 12te Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind; die drei verschiedenen Arten, wie man diese vier Factoren zu zwei Paaren ordnen kann, geben die Darstellungen der Primzahl durch die drei Formen a^2+b^2, c^2+3d^2, e^2-3f^2. Man kann für die Auffindung dieser Zerfällungen leichte Vorschriften angeben, nach welchen Herr Oberlehrer *Zornow* in Königsberg mir für die Primzahlen von der Form $8n+1$ und $12n+1$ bis 1000 diese Zerfällungen zu berechnen die Güte gehabt hat.

Zu gleicher Zeit, als ich diese Betrachtungen anstellte, richtete ich meine Aufmerksamkeit auf gewisse Eigenschaften der complexen Zahlen, auf welche die Theorie der Kreistheilung führt. Ich habe in der erwähnten Note bemerkt, dafs wenn λ ein Theiler von $p-1$ ist, sich die Primzahl p und in der Regel auf mehrere verschiedene Arten als Product zweier complexen Zahlen darstellen läfst, welche aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind. Es ereignet sich nun, und man kann dies durch die Theorie der Kreistheilung selbst beweisen, dafs man mehrere dieser complexen Zahlen mit einander multipliciren und das Product wieder durch andre complexe Zahlen derselben Art dividiren kann, so dafs der Quotient ebenfalls eine ganze complexe Zahl wird, ohne dafs man sieht, wie die complexen Zahlen des Nenners sich gegen die des Zählers fortheben. Eine genaue Betrachtung dieses merkwürdigen Umstandes führte mich zu der Ueberzeugung, dafs diese complexe Factoren der Primzahl p im Allgemeinen selbst wieder zusammengesetzt sein müssen, so dafs, wenn man sie in die wahren complexen Primzahlen auflöst, die complexen Primzahlen, welche die Factoren des Nenners bilden, gegen die Primfactoren des Zählers sich einzeln aufheben lassen. Da ich auf ganz anderem Wege zu diesem Resultate bereits für $\lambda = 8$ und $\lambda = 12$ gekommen war,

so wagte ich den etwas mühsamen Versuch mit $\lambda = 5$, und in der That gelang es mir für die Primzahlen von der Form $5n+1$, mit welchen ich den Versuch anstellte, jeden ihrer beiden aus 5ten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Factoren noch einmal in zwei ganze Factoren derselben Art zu zerfällen; worauf es dann nicht schwer war einen allgemeinen Beweis für diese Zerfällbarkeit zu finden. So lassen sich also die Primzahlen von der Form $5n+1$, $8n+1$, $12n+1$ als Producte von vier ganzen complexen Zahlen darstellen, welche respective aus 5te, 8te, 12te Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind. Es erhellt übrigens, dafs für die Primzahlen von der Form $5n+1$ durch eine andre paarweise Verbindung der vier Factoren ihre Darstellung in der Form $a^2 - 5b^2$ erhalten wird.

Die neuen Factoren sind nothwendig Primzahlen. Ist nämlich $f\alpha$ einer derselben, wo α für die drei Arten Primzahlen respective eine primitive 5te, 8te, 12te Wurzel der Einheit ist, so kann $f\alpha$ nicht als Product zweier ganzer complexen Zahlen derselben Art $\Phi\alpha$ und $\psi\alpha$ dargestellt werden, wenn nicht eine derselben so beschaffen ist, dafs das Product ihrer vier Werthe der Einheit gleich ist. Denn man sieht leicht, dafs das Product der vier Werthe von $f\alpha$, $\Phi\alpha$, $\psi\alpha$ eine reelle Zahl ist, und da das Product der vier Werthe von $f\alpha$ eine Primzahl ist, so können nicht die beiden andern Producte reelle Zahlen geben, welche beide zugleich von der Einheit verschieden sind, da ihr Product der Primzahl gleich wird.

Zwischen diesen Primzahlen $f\alpha$ hat man in der Theorie der Reste der 5ten, 8ten und 12ten Potenzen die Reciprocitätsgesetze aufzusuchen, und es würde vielleicht thunlich sein, dieselben durch blofse Induction zu finden, nachdem man ihre wahre Form kennt, wenn nicht solche Induction überaus beschwerlich wäre. Wenn man die Reciprocitätsgesetze auf zusammengesetzte Zahlen ausdehnt, ganz ähnlich wie ich es in der früher der Akademie mitgetheilten Note in Bezug auf die quadratischen, kubischen und biquadratischen Reste gethan habe, so können unmittelbar aus der Theorie der Kreistheilung die einfachen Reciprocitätssätze, in Bezug auf die Reste der 5ten, 8ten und 12ten Potenzen, für den besondern Fall abgeleitet werden, wenn die eine Zahl reell ist. Ob es möglich sein wird, vermittelst neuer Kunstgriffe aus derselben Quelle die allgemeineren Sätze für je zwei complexe Zahlen abzuleiten, mufs von späteren Untersuchungen zu entscheiden vorbehalten bleiben.

16.

Sur le théorême de Wilson.

(Par Mr. *Brennecke*, professeur de math. à Berlin.)

Le théorême de *Wilson* a été généralisé par Mr. *Gauſs* comme il suit: „Le produit de tous les nombres premiers à un nombre donné „N et moindres que ce nombre est congru suivant N à l'unité prise „positivement ou négativement. L'unité doit être prise négativement, „quand N est de la forme p^α ou $2p^\alpha$, p étant un nombre premier „impair, ou encore quand $N = 4$; dans tous les autres cas l'unité „doit être prise positivement."

Notions préliminaires.

§. 1. La congruence $x^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, p étant un nombre premier impair, n'a que ces deux racines $x = 1$ et $x = p^\alpha - 1$.

La différence des deux diviseurs $x+1$ et $x-1$ de x^2-1 étant égale à 2, ils ne peuvent être à la fois des multiples de p, p étant un nombre premier impair, x étant moindre que p^α, $x+1$ ne devient divisible par p^α que pour $x = p^\alpha - 1$, et $x-1$ ne devient divisible par p^α que pour $x = 1$.

§. 2. La congruence $x^2 \equiv 1 \pmod{2p^\alpha}$, p étant un nombre premier impair, n'a que ces deux racines $x = 1$ et $x = 2p^\alpha - 1$.

La différence des deux diviseurs $x+1$ et $x-1$ de x^2-1 étant égale à 2, p étant un nombre premier impair, ces deux diviseurs ne peuvent être à la fois des multiples de p. $x+1$ ne devient divisible par $2p^\alpha$ que pour $x = 2p^\alpha - 1$, $x-1$ ne devient divisible par $2p^\alpha$ que pour $x = 1$. $x+1$ et $x-1$ étant à la fois des nombres pairs ou impairs, p^α étant toujours un nombre impair, l'un de ces diviseurs ne peut être divisible par 2 tandis que l'autre est égal à p^α.

§. 3. La congruence $x^2 \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$ a toujours pour $\alpha > 2$ quatre racines: 1, $2^{\alpha-1}-1$, $2^{\alpha-1}+1$, $2^\alpha - 1$, mais il n'en existe jamais d'autres. La congruence $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ n'a que ces deux racines $x = 1$, $x = 3$.

En effet toute racine de $(x+1)(x-1) \equiv 0 \pmod{2^\alpha}$ doit être un nombre impair c'est-à-dire de la forme $2k+1$, k étant un nombre en-

tier quelconque ou zéro. On aura donc $(2k+2)2k \equiv 0 \pmod{2^\alpha}$, ou pour $\alpha > 2$, $k(k+1) \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-2}}$. Pour $k=0$, on a $x=1$, pour $k = 2^{\alpha-2}-1$, on a $x = 2^{\alpha-1}-1$, mais il est évident que $k > 0$ et et $k < 2^{\alpha-2}-1$ ne satisfait pas à la congruence $k(k+1) \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-2}}$, puisqu'il n'y a qu'un seul des diviseurs k et $k+1$ qui puisse être divisible par 2. Pour $k = 2^{\alpha-2}$ on a $x = 2^{\alpha-1}+1$, pour $k = 2^{\alpha-1}-1$ on a $x = 2^\alpha - 1$, mais il est évident que $k > 2^{\alpha-2}$ et $k < 2^{\alpha-1}-1$ ne satisfait pas à la congruence $k(k+1) \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-2}}$.

§. 4. Si deux nombres a et b sont congrus suivant le module M, et que l'un soit un nombre premier à M, l'autre doit être aussi un nombre premier avec M. Si au contraire l'un a un diviseur commun avec M, l'autre doit avoir le même diviseur commun avec M. P. c. puisque tout terme de la suite

1. $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ \ldots.\ a+(M-1)$

est congru à un terme de la suite selon le module M (mais seulement à un)

2. $1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ M$

et que cette propriété est réciproque entre les deux suites (1.) et (2.), il y aura dans chacune un nombre égal de nombres premiers avec M, c'est-à-dire (si $M = q^\beta v^\gamma \ldots.$) $q^{\beta-1} v^{\gamma-1} \ldots. (q-1)(v-1)\ldots.$, que a soit un nombre entier positif ou négatif quelconque.

On sait que si m est un nombre premier avec M, les termes de la suite

3. $0.m,\ 1.m,\ 2.m,\ \ldots.\ (M-1).m$

donnent d'après le module M pour restes tous les nombres de la suite (2) en substituant M à la place de zéro, et que chaque reste ne s'y trouve qu'une seule fois. Tout terme de la suite (3.) est donc congru selon le module M à un terme mais seulement à un terme de la suite (2.). Cette propriété est réciproque entre les suites (2.) et (3.).

Il en résulte que tout terme de la suite

4. $a+0.m,\ a+1.m,\ a+2.m,\ \ldots.\ a+(M-1).m$

sera congru à un terme de la suite (1.) selon le module M et réciproquement, n'importe la valeur de a, pourvu que a soit un nombre entier. Il s'ensuit que la suite (4.) renferme autant de nombres premiers avec M que la suite (2.) c'est-à-dire $q^{\beta-1} v^{\gamma-1}.\ldots.(q-1)(v-1)\ldots.$

§. 5. En supposant

1. $N = p^\alpha . M$ et $M = q^\beta v^\gamma \ldots.$,

$p, q, v, \ldots$ étant des nombres premiers différents, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des nombres entiers, et tous les nombres premiers avec p^α moindres que p^α représentés par

$$2. \quad r_1, r_2, r_3, \ldots r_\mu \quad (\mu = p^{\alpha-1}(p-1)),$$

il sera d'après le §. 4. facile de construire un tableau qui renferme tous les nombres premiers avec p^α moindres que N savoir:

$$3. \quad \begin{cases} r_1, & r_1+p^\alpha, & r_1+2p^\alpha, & r_1+3p^\alpha, & \ldots & r_1+(M-1)p^\alpha, \\ r_2, & r_2+p^\alpha, & r_2+2p^\alpha, & r_2+3p^\alpha, & \ldots & r_2+(M-1)p^\alpha, \\ r_3, & r_3+p^\alpha, & r_3+2p^\alpha, & r_3+3p^\alpha, & \ldots & r_3+(M-1)p^\alpha, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_\mu, & r_\mu+p^\alpha, & r_\mu+2p^\alpha, & r_\mu+3p^\alpha, & \ldots & r_\mu+(M-1)p^\alpha. \end{cases}$$

Car si $a = k.d+c$, k étant un nombre entier ou zéro, a sera un nombre premier avec d, si c l'est avec d, si au contraire c et d ont le plus grand diviseur commun δ, a et d auront aussi le plus grand diviseur commun δ. — Le tableau précédent en contenant tous les nombres premiers avec p^α moindres que N renfermera tous les nombres premiers avec N moindres que N, mais contiendra aussi beaucoup de nombres qui ne sont pas des nombres premiers avec N.

§. 6. D'après ce que nous avons prouvé (§. 4.) en mettant $m = p^\alpha$, p^α étant un nombre premier avec $q^\beta v^\gamma \ldots$ chaque colonne horizontale du tableau de §. 5. renferme $q^{\beta-1} v^{\gamma-1} \ldots (q-1)(v-1) \ldots$ nombres premiers avec N, il y a $p^{\alpha-1}(p-1)$ colonnes horizontales, donc le tableau de §. 5. renferme $p^{\alpha-1} q^{\beta-1} v^{\gamma-1} \ldots (p-1)(q-1)(v-1) \ldots$ nombres premiers différents avec N moindres que N. Il en résulte que ce tableau contient *tous* les nombres premiers avec N moindres que N.

Démonstration du théorême énoncé.

§. 7. Soit p un nombre premier impair, et soient

$$1. \quad r_1, r_2, r_3, \ldots r_\mu$$

tous les nombres premiers avec p^α moindres que p^α, dont $r_1 = 1$, $r_\mu = p^\alpha - 1$, $\mu = p^{\alpha-1}(p-1)$ sera un nombre pair. Nous allons à présent considérer les nombres

$$2. \quad r_2, r_3, r_4, \ldots r_{\mu-1},$$

dont le nombre sera également pair. Soit s un des nombres $2, 3, 4, \ldots \ldots (\mu-1)$, la congruence

$$3. \quad r_s x \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

ne sera satisfaite que dans le cas où x est un nombre premier avec p^α. x ne pourra être égal ni à 1 ni à $p^\alpha - 1$, car dans le premier cas, r_s serait égal à 1, dans le second, r_s serait égal à $p^\alpha - 1$. x ne pourra être égal à r_s, puisque d'après §. 1. la congruence $x^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ n'est satisfaite que par $x = 1$ et $x = p^\alpha - 1$. La congruence (3.) étant du premier dégré et r_s étant un nombre premier avec p^α, n'admet qu'une seule racine. P. c. r_s et x étant tous les deux des nombres différents contenus en (2.), on pourra former $\frac{\mu-2}{2}$ congruences de la forme (3.) qui ne contiendront que toutes les valeurs de (2.), mais dans lesquelles chaque valeur ne se trouve qu'une seule fois. Le produit de ces $\frac{\mu-2}{2}$ congruences donne

$$4. \quad r_2 . r_3 . r_4 \ldots . r_{\mu-1} \equiv 1 \pmod{p^\alpha},$$

laquelle multipliée par la congruence $1.(p^\alpha - 1) \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$ ou par $r_1 . r_\mu \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$ donne

$$5. \quad r_1 . r_2 . r_3 \ldots . r_\mu \equiv -1 \pmod{p^\alpha}, \quad \mu^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1).$$

En appliquant le même raisonnement au module $2p^\alpha$, p étant un nombre premier impair, puisque la congruence $x^2 \equiv 1 \pmod{2p^\alpha}$ n'a que les racines 1 et $2p^\alpha - 1$ (cf. §. 2.), on trouvera en désignant par (1.) tous les nombres premiers avec $2p^\alpha$ moindres que $2p^\alpha$,

$$6. \quad r_1 . r_2 . r_3 \ldots . r_\mu = -1 \pmod{2p^\alpha}, \quad \mu = (p^{\alpha-1})(p-1).$$

La même proposition a encore lieu pour le module 4 puisque $1.3 \equiv -1 \pmod{4}$.

Le même raisonnement appliqué au module $2^\alpha (\alpha > 2)$ nous donnera, puisque la congruence $x^2 \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$, α étant plus grand que 2, n'a que les quatre racines 1, $2^{\alpha-1} - 1$, $2^{\alpha-1} + 1$, $2^\alpha - 1$, et que

$$7. \quad 1.(2^\alpha - 1) \equiv -1 \pmod{2^\alpha} \quad \text{et} \quad (2^{\alpha-1} - 1)(2^{\alpha-1} + 1) \equiv -1 \pmod{2^\alpha},$$

en désignant par (1.) tous les nombres premiers avec 2^α moindres que 2^α,

$$8. \quad r_1 . r_2 . r_3 \ldots . r_\mu \equiv 1 \pmod{2^\alpha}, \quad \alpha > 2, \quad \mu = 2^{\alpha-1}.$$

§. 8. Après avoir considéré les cas de $N = p^\alpha$, $N = 2p^\alpha$ (p étant dans ces deux cas un nombre premier impair), $N = 4$, $N = 2^\alpha (\alpha > 2)$, nous allons considérer tous les autres cas possibles compris sous la forme de $N = p^\alpha q^\beta v^\gamma \ldots$, $p, q, v, \ldots$ étant des nombres premiers différents. Dans tous ces derniers cas $q^{\beta-1} v^{\gamma-1} \ldots (q-1)(v-1) \ldots$ est un nombre pair, c'est-à-dire dans chaque colonne horizontale du tableau de §. 5. il y a un nombre pair de nombres premiers avec N moindres que N.

Tous les nombres de la première colonne horizontale du tableau de §. 5. sont congrus avec r_1 suivant le module p^α, tous ceux de la seconde colonne avec r_2, ceux de la troisième avec r_3, etc. En ne prenant dans toutes les colonnes horizontales que les nombres premiers avec N, chaque colonne donne $q^{\beta-1} v^{\gamma-1} \ldots (q-1)(v-1)$ etc. congruences selon p^α. Le produit de toutes ces congruences donne, en désignant par $[N]$ le produit de tous les nombres premiers avec N moindres que N,

$$1. \quad [N] \equiv (r_1 . r_2 . r_3 \ldots . r_\mu)^{q^{\beta-1} v^{\gamma-1} \ldots (q-1)(v-1) \ldots} \pmod{p^\alpha},$$

lequel d'après §. 7., puisque $q^{\beta-1} v^{\gamma-1} \ldots (q-1)(v-1) \ldots$ est un nombre pair, donne

$$2. \quad [N] \equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

On trouve par des raisonnements analogues

$$3. \quad \begin{cases} [N] \equiv 1 \pmod{p^\alpha}, \\ [N] \equiv 1 \pmod{q^\beta}, \\ [N] \equiv 1 \pmod{v^\gamma}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les modules de toutes ces congruences étant entre eux des nombres premiers, il en résulte

$$4. \quad [N] \equiv 1 \pmod{p^\alpha q^\beta v^\gamma \ldots \text{ ou } N},$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

17.

Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres.

Première partie.

Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet.*

En m'occupant, il y a deux ans *), à prouver que toute progression arithmétique indéfinie, dont les termes n'ont pas tous un même diviseur commun, renferme une infinité de nombres premiers, ce qui n'avait pas encore été fait d'une manière rigoureuse, j'ai été conduit à envisager un grand nombre de questions relatives aux nombres, sous un point de vue entièrement nouveau, et qui les rattache aux principes de l'analyse infinitésimale et aux propriétés remarquables d'une classe de séries et de produits infinis qui ont beaucoup d'analogie avec les expressions que l'illustre *Euler* a considérées dans le chap. de son Introd. à l'analyse de l'infini, ayant pour titre „De seriebus ex evolutione factorum ortis." Dans une note insérée dans ce journal **), j'ai déjà indiqué plusieurs des questions auxquelles ce genre d'analyse peut être appliqué. Je me propose maintenant d'exposer mes recherches sur cette matière avec tous les développements nécessaires, dans une suite de mémoires dont celui que je soumets aujourd'hui au jugement des géomètres, sera particulièrement destiné à l'examen d'une question dont la solution n'avait pas encore été donnée, et qui a pour objet de déterminer le nombre des formes quadratiques différentes dont le déterminant D est un entier quelconque positif ou négatif, ou ce qui est la même chose, le nombre des diviseurs quadratiques qui appartiennent à l'expression $x^2 - Dy^2$. L'analyse qui nous conduira à la solution complète de cette question intéressante, nous fournira en

---

*) Le mémoire que j'ai lu sur cette question à l'Académie de Berlin, vient d'être imprimé dans la collection de l'Académie, année 1837.

**) Tome XVIII. pag. 259.

même temps et pour ainsi dire, chemin faisant, des démonstrations nouvelles et très-simples de plusieurs beaux théorèmes dûs à Mr. *Gauſs*, mais que cet illustre géomètre n'avait établis qu'au moyen de considérations très-compliquées dans la seconde partie de la 5ième section de ses Disquisitiones arithmeticae.

Cette section de l'ouvrage de Mr. *Gauſs*, qui est consacrée à la théorie des formes du second degré, se compose de deux parties très-distinctes, dont la première, qui se termine à l'art. 223, peut être considérée comme l'exposition de la partie élémentaire de cette théorie, et renferme tous les résultats antérieurement donnés par *Euler*, *Lagrange* et *Legendre*, complétés et étendus à beaucoup d'égards et déduits d'ailleurs de principes nouveaux. La seconde partie qui commence proprement à l'art. 234, (les art. 223—233 contenant des définitions et des lemmes qui servent d'introduction à la seconde partie) se compose presque exclusivement de recherches propres à l'illustre auteur. Ces recherches, aussi remarquables par la profondeur des méthodes que par le nombre et la variété des résultats, forment sans contredit la partie de tout l'ouvrage dont l'étude présente le plus de difficultés. Aussi sont-elles très-peu connues des géomètres, et l'on doit y rapporter particulièrement ce que *Legendre* dit dans la préface de la seconde édition de sa Théorie des Nombres, lorsqu'après avoir indiqué les découvertes de Mr. *Gauſs* qu'il avait fait entrer dans son ouvrage, il ajoute:

„On aurait désiré enrichir cet Essai d'un plus grand nombre des excellents matériaux qui composent l'ouvrage de Mr. *Gauſs:* mais les méthodes de cet auteur lui sont tellement particulières qu'on n'aurait pu, sans des circuits très-étendus, et sans s'assujettir au simple rôle de traducteur, profiter de ses autres découvertes."

J'ose donc espérer qu'indépendamment des résultats nouveaux qu'il fait connaître, mon travail pourra encore contribuer à l'avancement de la science, en établissant sur de nouvelles bases et en rapprochant des éléments, de belles et importantes théories, qui n'ont été jusqu'à présent à la portée que du petit nombre de géomètres capables de la contention d'esprit nécessaire, pour ne pas perdre le fil des idées dans une longue suite de calculs et de raisonnements très-composés.

§. 1.

Les lettres k et ϱ désignant deux quantités positives, la première constante, la seconde variable, considérons la somme de la série infinie

$$1. \quad \frac{1}{k^{1+\varrho}} + \frac{1}{(k+1)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(k+2)^{1+\varrho}} + \text{etc.}$$

Cette somme croissant au delà de toute limite finie, lorsque la variable ϱ devient infiniment petite, voyons quelle est la fonction de ϱ la plus simple qui puisse servir de mesure à cette augmentation, ou, en d'autres termes, dont le rapport à l'expression précédente converge vers l'unité, lorsque ϱ convergera vers zéro. Pour cela, nous aurons recours à la formule connue

$$\int_0^1 x^{k-1} \log^\varrho \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\Gamma(1+\varrho)}{k^\varrho}.$$

En mettant successivement k, $k+1$, $k+2$, ... à la place de k et faisant la somme de toutes ces équations, la série (1.) se trouvera exprimée comme il suit,

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1-x} \log^\varrho \left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Si l'on ajoute $\frac{1}{\varrho}$ à cette expression et que l'on en retranche la quantité égale $\frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(1+\varrho)} = \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} \int_0^1 \log^{\varrho-1} \left(\frac{1}{x}\right) dx$, elle deviendra

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} \int_0^1 \left(\frac{x^{k-1}}{1-x} - \frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} \right) \log^\varrho \left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Comme le second terme converge vers la limite finie

$$\int_0^{01} \left(\frac{x^{k-1}}{1-x} - \frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} \right) dx,$$

k étant > 0, on conclut que le rapport de la somme (1.) à la fraction $\frac{1}{\varrho}$ a l'unité pour limite, lorsque la variable positive ϱ devient moindre que toute grandeur donnée.

Au moyen du résultat précédent, il nous sera facile de démontrer le théorème suivant dont nous ferons un usage très-fréquent dans nos recherches.

„Soient

$$2. \quad l_1, \; l_2, \; l_3, \; \ldots, \; l_n, \; \ldots$$

des constantes en nombre infini, positives, différentes de zéro, inégales ou en partie égales; soit encore $f(t)$ une fonction discontinue de la variable positive t, qui exprime combien il y a dans la suite (2.) de termes dont

la valeur ne surpasse pas celle de t. Cela posé, si la fonction $f(t)$ peut être mise sous la forme

$$3. \quad f(t) = ct + t^{\gamma}\psi(t),$$

c et γ désignant des constantes positives dont la seconde est inférieure à l'unité, et la nouvelle fonction $\psi(t)$, abstraction faite de son signe et quelque grande qu'on y suppose la variable t, restant toujours moindre que la constante positive C, je dis que la somme

$$4. \quad \Phi(\varrho) = \frac{1}{l_1^{1+\varrho}} + \frac{1}{l_2^{1+\varrho}} + \frac{1}{l_3^{1+\varrho}} + \text{etc.}$$

dans laquelle ϱ désigne une variable positive, sera telle qu'on aura pour une valeur infiniment petite de ϱ,

$$5. \quad \Phi(\varrho) = \frac{c}{\varrho},$$

c'est-à-dire que le rapport de la somme $\Phi(\varrho)$ à la fraction $\frac{c}{\varrho}$ convergera vers l'unité, lorsque ϱ devient moindre que toute grandeur donnée."

Comme le nombre des termes de la suite (2.), qui ne surpassent pas l'unité, est limité, (ce nombre étant $= c + \psi(1)$) et comme parmi ces termes il n'y en a aucun dont la valeur soit zéro, il est évident par la nature de la proposition qu'il s'agit d'établir, que nous pouvons omettre la partie de l'expression $\Phi(\varrho)$, qui correspond à ces termes. Ce qui reste après ce retranchement, étant toujours désigné par $\Phi(\varrho)$, choisissons une constante δ supérieure à $\frac{1}{1-\gamma}$, et partageons la somme $\Phi(\varrho)$ en une infinité de sommes partielles, en comprenant dans la $m^{\text{ième}}$ de ces sommes partielles, tous les termes qui satisfont à la double condition

$$m^{\delta} < l_n \leqq (m+1)^{\delta},$$

et par suite à celle-ci

$$\frac{1}{m^{\delta(1+\varrho)}} > \frac{1}{l_n^{1+\varrho}} \geqq \frac{1}{(m+1)^{\delta(1+\varrho)}}.$$

Le nombre de ces termes sera évidemment

$$f((m+1)^{\delta}) - f(m^{\delta}).$$

La valeur numérique de $t^{\gamma}\psi(t)$, lorsqu'on suppose successivement $t = m^{\delta}$ et $t = (m+1)^{\delta}$, étant inférieure à $C(m+1)^{\gamma\delta}$, on aura ces deux inégalités

$$\begin{aligned} f((m+1)^{\delta}) - f(m^{\delta}) &< c((m+1)^{\delta} - m^{\delta}) + 2C(m+1)^{\gamma\delta} \\ &> c((m+1)^{\delta} - m^{\delta}) - 2C(m+1)^{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

En combinant ces inégalités avec celles que nous venons d'écrire, on conclura que la somme partielle dont il s'agit, est respectivement inférieure et

supérieure aux quantités

$$c\frac{(m+1)^\delta - m^\delta}{m^{\delta(1+\varrho)}} + 2C\frac{(m+1)^{\gamma\delta}}{m^{\delta(1+\varrho)}}, \qquad c\frac{(m+1)^\delta - m^\delta}{(m+1)^{\delta(1+\varrho)}} - 2C\frac{(m+1)^{\gamma\delta}}{(m+1)^{\delta(1+\varrho)}}.$$

Il suit de là qu'on a

$$\Phi(\varrho) < c\,\Sigma\frac{(m+1)^\delta - m^\delta}{m^{\delta(1+\varrho)}} + 2C\,\Sigma\frac{(m+1)^{\gamma\delta}}{m^{\delta(1+\varrho)}},$$

le signe Σ s'étendant depuis $m=1$ jusqu'à $m=\infty$.

Puisqu'on a en vertu d'un théorème connu

$$(m+1)^\delta - m^\delta = \delta m^{\delta-1} + \frac{\delta(\delta-1)}{2}(m+\varepsilon_m)^{\delta-2},$$

ε_m désignant une fraction positive, l'inégalité précédente pourra se mettre sous la forme

$$\Phi(\varrho) < c\delta\,\Sigma\frac{1}{m^{1+\delta\varrho}} + \tfrac{1}{2}c\delta(\delta-1)\,\Sigma\frac{\left(1+\frac{1}{m}\varepsilon_m\right)^\delta}{m^{\delta\varrho}(m+\varepsilon_m)^2} + 2C\,\Sigma\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\gamma\delta}}{m^{\delta(1-\gamma)+\delta\varrho}}.$$

Or, ϱ devenant infiniment petit, les deux dernières sommes resteront finies car elles seront constamment inférieures à celles-ci

$$\Sigma\left(1+\frac{1}{m}\right)^\delta\frac{1}{m^2}, \qquad \Sigma\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\gamma\delta}\frac{1}{m^{\delta(1-\gamma)}},$$

qui sont elles-mêmes finies, comme il est facile de le voir au moyen des principes connus, si l'on se rappelle que d'après la supposition faite sur la constante δ, on a $\delta(1-\gamma)>1$. Quant à la première somme, comme elle a une forme analogue à l'expression (1.) considérée plus haut, elle sera évidemment $\frac{1}{\delta\varrho}$, ϱ étant supposé infiniment petit. On voit donc que la limite supérieure de $\Phi(\varrho)$ prend la forme $\frac{c}{\varrho}$, lorsque ϱ devient moindre que toute grandeur donnée, et comme le même raisonnement peut s'appliquer à la limite inférieure et conduit au même résultat, la proposition énoncée se trouve établie.

On pourrait donner au théorème que nous venons de démontrer, beaucoup plus d'étendue, mais comme ce théorème tel que nous l'avons énoncé, suffit aux applications que nous avons en vue, quant à présent, nous ne nous arrêterons pas à cette généralisation qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

Nous aurons encore besoin de deux autres lemmes qui appartiennent, comme le précédent, à l'analyse infinitésimale. Le premier de ces nouveaux lemmes est tellement simple que nous nous contenterons de l'énoncer, sans en donner la démonstration qui est très-facile à suppléer.

Tous les points d'un plan infini étant rapportés à deux axes rectangulaires des x et des y, concevons dans ce plan une courbe fermée assujettie ou non à une même loi analytique dans toutes ses parties, supposons que les dimensions de cette courbe augmentent de plus en plus et au delà de toute limite, de manière cependant que la courbe variable reste toujours semblable à elle-même, et désignons par σ l'aire également variable à laquelle la courbe sert de contour.

Soient maintenant a, b, α, β quatre constantes dont les deux premières ont des valeurs positives, et supposons que l'on construise tous les points dont les coordonnées x et y ont la forme

$$6. \qquad x = av + \alpha, \quad y = bw + \beta,$$

où v et w désignent tous les entiers depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Cela posé, si l'on désigne par $F(\sigma)$ le nombre de ces points situés dans l'intérieur de la courbe, on aura évidemment pour des valeurs infinies de σ,

$$F(\sigma) = \frac{1}{ab}\sigma,$$

c'est à dire que le rapport des deux membres de cette équations convergera vers l'unité lorsque σ croît au delà de toute limite positive. Il est également facile de voir que la différence $F(\sigma) - \frac{\sigma}{ab}$ croîtra moins rapidement que la puissance σ^γ, l'exposant γ étant supposé $> \frac{1}{2}$. Nous pouvons donc poser

$$7. \qquad F(\sigma) = \frac{1}{ab}\sigma + \sigma^\gamma \psi(\sigma),$$

où l'on a $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, et l'on sera assuré que la fonction $\psi(\sigma)$, abstraction faite de son signe, restera toujours moindre qu'une certaine constante finie C.

Le dernier des lemmes que nous emprunterons à l'Analyse infinitésimale, se rapporte à la théorie des séries. On sait que les séries infinies convergentes sont de deux espèces très-différentes, les séries de la première espèce étant convergentes indépendamment des signes dont leurs termes sont affectés, tandis que celles de la seconde ne jouissent de cette propriété que parceque les termes se détruisent en partie par l'opposition de leurs signes.

La convergence d'une série de la première espèce subsiste et sa somme conserve toujours la même valeur quel que soit l'ordre que l'on établisse entre ses termes. Les séries de la seconde espèce se comportent

d'une manière entièrement différente. Une série de cette espèce, convergente pour un certain arrangement de ses termes, peut perdre cette propriété, lorsque cet ordre vient à être changé. Il peut arriver aussi que la série soit encore convergente après ce changement, mais que sa somme ait varié en même temps que l'ordre de ses termes. Ces remarques intimement liées à notre sujet, comme on le verra plus loin, ne sont pas sans importance pour d'autres recherches. Il en résulte par exemple et pour le dire en passant, que si l'on parvient à sommer une série qui appartient à la seconde espèce, et que l'on trouve pour la somme de la série une valeur entièrement déterminée, sans que l'ordre dans lequel les termes sont supposés se suivre, entre comme un élément essentiel dans l'analyse dont on fait usage, la méthode de sommation doit renfermer quelque vice caché, ou du moins a besoin d'être complétée par quelque considération qui indique clairement quel est l'arrangement des termes auquel la somme obtenue correspond.

Pour revenir à notre objet, soit s une variable positive et considérons la série dont le terme général est

$$c_n \frac{1}{n^s},$$

l'entier n étant susceptible de toutes les valeurs depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. Si nous supposons que c_n, abstraction faite de son signe, et quel que soit l'indice n, soit toujours moindre que la constante C, notre série appartiendra à la première espèce tant que l'on aura $s > 1$. En posant donc $s = 1 + \varrho$, ϱ étant une variable positive aussi petite que l'on voudra, la somme

$$\psi(1+\varrho) = \Sigma c_n \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

aura une valeur unique et entièrement indépendante de l'arrangement de ses termes. Concevons maintenant qu'il s'agisse d'obtenir la limite vers laquelle la fonction $\psi(1+\varrho)$, évidemment continue tant que la variable ϱ reste positive, converge lorsque ϱ devient moindre que toute grandeur donnée, en supposant toutefois qu'une pareille limite existe ce qui peut n'avoir pas lieu. D'après les remarques faites plus haut, on ne serait pas fondé à dire que cette limite soit exprimée par $\Sigma c_n \frac{1}{n}$, l'ordre des termes étant arbitraire, car il est évident que cette dernière série appartient à la seconde espèce, et n'a par conséquent pas de somme déterminée.

Les suppositions énoncées plus haut, étant conservées, soit k un entier positif, et concevons que c_n satisfasse à l'équation

$$8. \qquad c_{n+k} = c_n ,$$

ou en d'autres termes, que la suite

$$c_1 , \; c_2 , \; \ldots . \; c_k ; \quad c_{k+1} , \; c_{k+2} , \; \ldots . \; c_{2k} ; \quad c_{2k+1} , \; \ldots .$$

soit périodique, le nombre des termes qui composent une période, étant égal à k. Supposons encore que la somme de ces termes soit zéro, c'est à dire que l'on ait

$$9. \qquad c_1 + c_2 + \ldots . + c_k = 0.$$

Cela étant, je dis que la somme

$$\Sigma \, c_n \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

qui ne dépend pas de l'ordre des termes, converge vers une limite finie, donnée par l'expression

$$\Sigma \, c_n \frac{1}{n} ,$$

où les termes sont supposés se suivre dans l'ordre naturel, c'est à dire de manière à ce que les valeurs de n croissent constamment depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. Pour démontrer cette assertion, il suffira évidemment de faire voir que la série,

$$\Sigma \, c_n \frac{1}{n^s}$$

les termes étant rangés dans l'ordre indiqué, reste convergente et exprime une fonction continue de s, depuis $s = \infty$ jusqu'à $s = 1$ inclusivement. Or il est facile de prouver que cette double propriété subsiste non seulement entre les limites précédentes, mais plus généralement tant que s reste supérieur à zéro. En effet, h étant un entier positif quelconque, exprimons par une intégrale définie la somme du hk premiers termes de la série précédente. Au moyen de la formule

$$\int_0^1 x^{n-1} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s} ,$$

et en ayant égard à l'équation (8.), on trouvera pour cette somme

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{\Sigma \, c_n \, x^{n-1}}{1 - x^k} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{\Sigma \, c_n \, x^{n-1}}{1 - x^k} \, x^{hk} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx ,$$

le signe sommatoire s'étendant depuis $n = 1$ jusqu'à $n = k$. La polynome $\Sigma \, c_n \, x^{n-1}$ étant divisible par $1 - x$, comme on le voit par l'équation (9.), la fraction algébrique sous le signe d'intégration reste finie. Soit K la plus grande valeur numérique de cette fraction depuis $x = 0$ jusqu'à

$x = 1$; la seconde intégrale sera donc moindre que

$$\frac{K}{\Gamma(s)} \int_0^1 x^{kh} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{K}{(hk+1)^s},$$

et s'évanouira pour $h = \infty$. Il résulte de là que la série prolongée à l'infini est convergente, et l'on voit avec la même facilité que sa somme exprimée par la première intégrale, est une fonction de s, qui varie d'une manière continue avec cette variable tant que l'on a $s > 0$.

§. 2.

p étant un nombre premier impair, positif ou négatif, et k un entier non-divisible par p, qui peut être aussi positif ou négatif, nous désignons avec *Legendre* par $\left(\frac{k}{p}\right)$ l'unité prise avec le signe plus ou avec le signe moins, suivant que k sera ou ne sera pas résidu quadratique relativement à p. L'illustre auteur définit le symbole $\left(\frac{k}{p}\right)$ comme le reste que donne la puissance $k^{\frac{p-1}{2}}$, lorsqu'on la divise par p; la définition précédente, quoique la même au fond, est préférable pour notre objet en ce qu'elle ne suppose pas que p soit un nombre positif. Si nous désignons par l un second entier non-divisible par p et par q un nombre premier impair dont la valeur numérique diffère de celle de p, on aura suivant la notation précédente:

$$1. \quad \begin{cases} \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right) = \left(\frac{kl}{p}\right), \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \\ \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}. \end{cases}$$

Ces équations qui renferment toute la théorie des résidus quadratiques, supposent de plus, la seconde que p est positif, la quatrième que p et q n'ont pas simultanément le signe négatif.

Les entiers k et P, positifs ou négatifs, n'ayant pas de diviseur commun, et le second P, que nous supposons impair, étant décomposé en ses facteurs simples $p, p', p'', \ldots$ égaux ou inégaux, de sorte que $P = pp'p''\ldots$, nous aurons souvent à distinguer si ceux des nombres premiers $p, p', p'', \ldots$ à l'égard desquels k est non-résidu quadratique, sont en nombre pair ou impair, ou ce qui est la même chose, si le produit

$$\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{k}{p'}\right)\left(\frac{k}{p''}\right)\ldots$$

a la valeur $+1$ ou celle-ci -1. Mr. *Jacobi* a proposé d'étendre la no-

tation de *Legendre* à de semblables produits et d'écrire

$$\left(\frac{k}{P}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{k}{p'}\right)\left(\frac{k}{p''}\right)\ldots.$$

Comme cette généralisation de la notation de *Legendre,* dont l'illustre géomètre que je viens de citer, a fait des applications ingénieuses, *) est très-propre à simplifier les formules et à abréger les démonstrations, nous l'adopterons dans ce qui suivra. On aura suivant cette notation

$$2.\quad \begin{cases} \left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{l}{P}\right) = \left(\frac{kl}{P}\right), \quad \left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{k}{Q}\right) = \left(\frac{k}{PQ}\right), \quad \left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}, \\ \left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}, \quad \left(\frac{Q}{P}\right) = \left(\frac{P}{Q}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}, \end{cases}$$

en supposant que les entiers k et l n'ont pas de diviseur commun avec les nombres impairs P et Q, que P est positif dans la troisième, et enfin que P et Q sont premiers entre eux et n'ont pas simultanément le signe négatif dans la dernière de ces équations. Toutes ces équations sont ou évidentes ou se déduisent facilement des formules (1.), et il serait d'autant plus inutile de nous arrêter à les démontrer que les théorèmes qu'elles expriment se trouvent déjà, à la notation près, dans l'ouvrage de Mr. *Gauſs* art. 133. Pour éviter des distinctions inutiles il conviendra de ne pas exclure le cas où P dans le symbole $\left(\frac{k}{P}\right)$ a la valeur ± 1, en supposant $\left(\frac{k}{\pm 1}\right) = 1$. Il est évident que cette nouvelle convention est compatible avec les équations précédentes, et qu'en l'adoptant, la troisième de ces équations se trouvera comprise dans la cinquième et répondra à $Q = -1$.

Nous terminerons ce §., en posant les équations évidentes qui suivent, et dans lesquelles k et l désignent des nombres impairs et δ la valeur ± 1,

$$3.\quad \delta^{\frac{k-1}{2}}\delta^{\frac{l-1}{2}} = \delta^{\frac{kl-1}{2}}, \quad \delta^{\frac{k^2-1}{8}}\delta^{\frac{l^2-1}{8}} = \delta^{\frac{(kl)^2-1}{8}}.$$

§. 3.

Nous avons maintenant à rappeler quelques résultas connus qui se rapportent à le théorie des formes quadratiques. En désignant par D un entier positif ou négatif (le cas de $D = 0$ sera excepté), nous appellerons avec Mr. *Gauſs* forme du déterminant D, toute expression comme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

a, b, c étant des entiers donnés, liés entre eux par la condition $b^2 - ac = D$,

*) Compte rendu des séances de l'Académie de Berlin, Oct. 1837.

et x et y désignant des entiers indéterminés. Lorsque le déterminant D est un nombre négatif, les coëfficients extrêmes seront toujours de même signe. Nous ne considérons, dans ce cas, que les formes pour lesquelles ce signe est $+$, c'est à dire les formes qui n'expriment que des nombres positifs. Mr. *Gauſs* range les formes qui appartiennent à un même déterminant en différents ordres, en comprenant dans un même ordre toutes celles pour lesquelles le plus grand diviseur commun de a, b, c a la même valeur. Nous supposerons toujours qu'un pareil diviseur n'existe pas ou plutôt qu'il est égal à l'unité, les autres cas peuvant toujours être immédiatement ramenés à celui-ci. Les formes dont il s'agit et dont l'ensemble forme l'ordre appelé primitif, peuvent elles-mêmes présenter deux cas. Il peut arriver que a et c soient simultanément pairs ou que cette condition n'ait pas lieu. Dans le second de ces cas, les formes constituent ce que Mr. *Gauſs* appelle l'ordre proprement primitif, l'autre cas étant celui de l'ordre improprement primitif. Quand nous parlerons de formes quadratiques sans autre désignation, nous sous-entendrons toujours que ces formes appartiennent à l'ordre proprement primitif. On sait d'ailleurs que l'ordre improprement primitif n'existe que lorsqu'on a $D \equiv 1 \pmod 4$.

Deux formes $ax^2+2bxy+cy^2$, $a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$ étant telles que la première se change dans la seconde, au moyen de la substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \text{où l'on a} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

sont dites équivalentes et cette équivalence est appelée propre ou impropre, suivant que le signe supérieur ou le signe inférieur a lieu. Cette distinction que Mr. *Gauſs* a introduite dans la théorie des formes quadratiques, et qui est analogue à celle que l'on fait en géométrie entre l'égalité par superposition et l'égalité par symétrie, *) a beaucoup d'importance en ce qu'elle conserve à la théorie des formes du second degré une simplicité que cette théorie n'aurait pas, à beaucoup près, si l'on n'y avait pas égard. Nous n'aurons pas à considérer l'équivalence impropre; en disant donc simplement que deux formes sont équivalentes, nous sous-entendrons toujours qu'il s'agit de l'équivalence propre.

---

*) On peut consulter sur cette analogie remarquable un article que Mr. *Gauſs* a inséré dans les annonces littéraires de Gottingue et dans lequel l'illustre auteur, après avoir rendu compte d'un ouvrage de Mr. *Seber* sur les formes quadratiques à trois indéterminées, entre dans des détails très-intéressants, sur la manière dont on peut représenter géométriquement les propriétés des formes du second degré qui renferment deux ou trois entiers indéterminés.

Les formes (positives et proprement primitives) dont le déterminant est un nombre donné D, et qui sont toujours en nombre infini, peuvent se distribuer en un nombre limité de classes, en plaçant deux formes dans la même classe ou dans des classes différentes suivant que ces formes sont ou ne sont pas équivalentes. Si l'on prend dans chaque classe l'une quelconque des formes qui la composent, on aura ce que nous appelerons le système complet des formes différentes, ou plus simplement, les formes différentes du déterminant D. Ce système étant construit, il est évident que toute forme dont le déterminant est D, aura toujours son équivalente et n'en aura qu'une dans ce système. Il est également facile de voir que si l'on construit un système semblable pour l'ordre des formes improprement primitives, ce nouveau système jouira de la même propriété relativement à toute forme qui appartient au même ordre.

Les formes différentes qui correspondent au déterminant quelconque D, sont divisées par M. *Gauſs* en genres, qui sont analogues à ce que *Legendre* appelle groupes de diviseurs quadratiques. La différence qui existe à cet égard entre les illustres géomètres que je viens de citer, tient uniquement à ce que *Legendre* exclut les déterminants qui ont des diviseurs quarrés, ce que Mr. *Gauſs* ne fait pas et ce que nous ne ferons pas non plus, la considération des déterminants de cette espèce étant indispensable dans différentes recherches. Voici maintenant les principes très-faciles à établir, sur lesquels la division en genres repose. (Disq. arithm. art. 229 et suiv.)

I. Si l est un nombre premier impair qui divise D, les entiers m, non-divisibles par l, qui peuvent être représentés par une même forme ayant D pour déterminant, sont ou tous tels que $\left(\frac{m}{l}\right) = 1$, ou tous tels que $\left(\frac{m}{l}\right) = -1$.

II. Lorsqu'on a $D \equiv 3 \pmod 4$, les nombres impairs m, susceptibles d'être représentés par la même forme, sont ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1$, ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1$.

III. Lorsqu'on a $D \equiv 2 \pmod 8$, les nombres impairs m, susceptibles d'être représentés par la même forme, sont ou tous tels que $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = 1$, ou tous tels que $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = -1$.

IV. Lorsqu'on a $D \equiv 6 \pmod 8$, les nombres impairs m, susceptibles d'être représentés par la même forme, sont ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = 1$, ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = -1$.

V. Lorsqu'on a $D \equiv 4 \pmod 8$, les nombres impairs m, susceptibles d'être représentés par la même forme, sont ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1$, ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1$.

VI. Losqu'on a $D \equiv 0 \pmod 8$, les nombres impairs m, susceptibles d'êtres représentés par la même forme, sont tous exclusivement contenus dans l'une de ces quatre formes $8\mu+1$, 3, 5, 7, ou, ce qui revient au même, on a à la fois $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = \pm 1$, $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = \pm 1$, chacun des deux signes ambigus restant invariable pour la même forme.

Toute propriété de la nature de celles exprimées dans les énoncés précédents, est ce que Mr. *Gauſs* appelle un caractère particulier de la forme à laquelle cette propriété appartient. C'est ainsi qui les caractères particuliers de la forme $5x^2+4xy+14y^2$, dont le déterminant est $-66 = -2.3.11$, sont contenus dans les équations

$$\left(\frac{m}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{m}{11}\right) = 1, \quad (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = -1.$$

L'ensemble des caractères particuliers d'une forme constitue son caractère complet, et la distribution des formes en genres consiste à rapporter au même genre les formes qui ont le même caractère complet, et à des genres différents celles dont les caractères complets sont différents. Quant au nombre des genres différents, ou ce qui est la même chose, des caractères complets différents, il est, généralement parlant, moindre que celui des combinaisons que l'on peut former avec les caractères particuliers différents, puisqu'il existe toujours, à l'exception d'un cas singulier, une relation entre les caractères particuliers qui conviennent à la même forme quadratique, relation qui dérive des théorèmes (2.) du §. précédent. Pour voir en quoi consiste cette relation, soit S^2 le plus grand quarré qui divise D, et désignons par P ou par $2P$ le quotient $\frac{D}{S^2}$, suivant qu'il est impair ou pair. Nous aurons donc selon ces deux cas

$$D = PS^2, \quad \text{ou} \quad D = 2PS^2$$

et le nombre impair P étant décomposés en ses facteurs simples $p, p, p, \ldots$

$$P = p\,p'\,p''\ldots,$$

ces facteurs seront tous inégaux. Si nous considérons maintenant une forme quelconque, appartenant à l'ordre proprement primitif et ayant D pour déterminant, on pourra toujours attribuer aux indéterminées x et y des valeurs premières entre elles et telles que la valeur correspondante m de la forme soit positive, impaire et première à D. Cela étant, D sera résidu quadratique relativement à m et par suite aussi à l'égard de tous les facteurs simples de m. (Disq. arithm. art. 154.) On aura donc $\left(\frac{D}{m}\right) = 1$, et par conséquent suivant les deux cas que nous venons de distinguer,

$$\left(\frac{P}{m}\right) = 1, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{2P}{m}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{P}{m}\right) = 1.$$

D'un autre côté, m étant positif, il résulte des équations (2.) §. 2.:

$$\left(\frac{P}{m}\right) = \left(\frac{m}{P}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}.$$

Si l'on remarque maintenant que la puissance $(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}$ est équivalente à 1, ou à $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, suivant que $P \equiv 1$, ou $P \equiv 3 \pmod 4$, et que l'on écrive $\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\ldots$. à la place de $\left(\frac{m}{P}\right)$, et $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$ à la place de $\left(\frac{2}{m}\right)$, on aura ces résultats:

$$D = PS^2, \quad \begin{cases} P \equiv 1 \pmod 4, & \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\ldots\ldots\ldots = 1, \\ P \equiv 3 \pmod 4, & (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\ldots\ldots\ldots = 1, \end{cases}$$

$$D = 2PS^2, \quad \begin{cases} P \equiv 1 \pmod 4, & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\ldots\ldots\ldots = 1, \\ P \equiv 3 \pmod 4, & (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\ldots\ldots = 1. \end{cases}$$

Quant aux caractères particuliers qui n'entrent pas dans ces relations, il n'existe aucune condition à leur égard, ou, pour parler plus exactement et pour ne pas aller au delà de ce qui a été démontré, il ne résulte aucune condition qui les concerne, des théorèmes (2.) §. 2., dont nous venons de faire usage. Au moyen des résultats précédents et des théorèmes énoncés plus haut, il sera facile de former le tableau suivant qui pourra servir dans chaque cas à faire l'énumération complète des genres

différents qui répondent au déterminant D, et dans lequel

$$r,\ r',\ r'',\ \ldots.$$

désignent les nombres premiers impairs inégaux qui divisent D, sans diviser P.

Premier cas. $D = PS^2$, $P \equiv 1 \pmod 4$.

$$\begin{array}{l|ll|l}
S \equiv 1 \pmod 2, & \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots \\
S \equiv 2 \pmod 4, & \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots \\
S \equiv 0 \pmod 4, & \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots
\end{array}$$

Second cas. $D = PS^2$, $P \equiv 3 \pmod 4$.

$$\begin{array}{l|lll|l}
S \equiv 1 \pmod 2, & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots \\
S \equiv 2 \pmod 4, & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots \\
S \equiv 0 \pmod 4, & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots
\end{array}$$

Troisième cas. $D = 2PS^2$, $P \equiv 1 \pmod 4$.

$$\begin{array}{l|lll|l}
S \equiv 1 \pmod 2, & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots \\
S \equiv 0 \pmod 2, & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots
\end{array}$$

Quatrième cas. $D = 2PS^2$, $P \equiv 3 \pmod 4$.

$$\begin{array}{l|ll|l}
S \equiv 1 \pmod 2, & (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots \\
S \equiv 0 \pmod 2, & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots & & \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots
\end{array}$$

Pour énumérer les caractères complets, ou ce qui est la même chose, les genres différents qui peuvent avoir lieu pour un déterminant donné, il faudra écrire toutes les expressions qui forment la ligne horisontale qui correspond au déterminant donné dans ce tableau, les unes à la suite des autres, après avoir égalé chaque expression à ± 1, et varier ensuite les signes ambiguës de toutes les manières possibles, en s'assujettissant toutefois à la condition que les seconds membres de celles de ces équations qui

répondent à la première partie de la ligne horisontale, doivent donnner 1 pour produit, cette condition coïncidant avec celle dont la nécessité a été établie plus haut. Soit, par exemple, $D = 2.3.5^2$. Ce déterminant se rapportant à la première subdivision du quatrième cas, on aura ces 4 caractères complets:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}=1,\ \left(\frac{m}{3}\right)=1,\ \left(\frac{m}{5}\right)=1;\ (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}=1,\ \left(\frac{m}{3}\right)=1,\ \left(\frac{m}{5}\right)=-1;$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}=-1,\ \left(\frac{m}{3}\right)=-1,\ \left(\frac{m}{5}\right)=1;\ (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}=-1,\ \left(\frac{m}{3}\right)=-1,\ \left(\frac{m}{5}\right)=-1.$$

Suivant la notation de Mr. *Gaufs*, ces mêmes genres seraient charactérisés comme il suit:

1 et 3, 8; $R3$; $R5$ — 1 et 3, 8; $R3$; $N5$ — 5 et 7, 8; $N3$; $R5$ — 5 et 7, 8; $N3$; $N5$.

Il importe de remarquer que les considérations précédentes ne prouvent nullement que les genres compatibles avec la condition énoncée, existent réellement; on peut en conclure seulement qu'il ne saurait y en avoir d'autres. Quant à la question de savoir 1°. si pour chaque déterminant il y a réellement des formes qui appartiennent à chacun des genres ainsi énumérés, et 2°. de quelle manière les formes différentes se distribuent entre les genres, qui ont une existence réelle, c'est une question très-difficile qui forme l'un des principaux objets de la seconde partie de la 5ième section de l'ouvrage de Mr. *Gaufs*, et dont nous donnerons aussi plus bas la solution au moyen de nos principes.

Nous ferons encore observer, avant d'aller plus loin, que si l'on désigne par λ le nombre des expressions contenues dans la même ligne horisontale du tableau précédent, le nombre des genres énumérés de la manière indiquée, sera évidemment exprimé par $2^{\lambda-1}$. Il n'y a qu'une seule exception à cette règle générale, exception qui a lieu lorsque la première partie de la ligne qui est assujettie à une condition dont l'effet est de réduire le nombre des combinaisons de moitié, n'existe pas. En jetant les yeux sur le tableau, on voit de suite que cela ne peut arriver que lorsque le déterminant se trouve compris dans le premier cas, et qu'en même temps P ne contient aucun facteur premier $p, p', \ldots,$ Comme l'on a alors d'une part $P \equiv 1 \pmod 4$ et de l'autre $P = \pm 1$, et par suite $P = 1$, on voit que ce cas n'a lieu que lorsque le déterminant est un quarré positif, et que le nombre des genres est alors égal à 2^λ.

Tout ce qui précède, est relatif aux formes proprement primitives. Il nous reste à considérer le cas des formes qui appartiennent à l'ordre improprement primitif, et qui ne peuvent représenter que des nombres pairs. Ce cas ne peut avoir lieu que lorsqu'on a $D \equiv 1 \pmod 4$, et par suite $P \equiv 1 \pmod 4$, $S \equiv 1 \pmod 2$. Si l'on désigne par m un entier positif, impair et premier à D, dont le double puisse être exprimé par une pareille forme, on formera sans peine le tableau qui suit, et dont l'usage est entièrement semblable à celui du tableau donné plus haut.

$$D = PS^2, \quad P \equiv 1 \pmod 4, \quad S \equiv 1 \pmod 2,$$
$$\left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \ldots \Big| \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \ldots$$

§. 4.

Nous avons maintenant à examiner sous quelles conditions et de combien de manières différentes un nombre m que je suppose positif, impair et premier à D, ou son double peut être représenté par les formes du déterminant D, en supposant que les valeurs positives ou négatives que l'on attribuera à cet effet aux indéterminées x et y, doivent être premières entre elles. Pour qu'une telle représentation soit possible, il faut que D soit résidu quadratique relativement à m ou à $2m$, (Disq. arithm. 154.), conditions dont la seconde ne diffère pas de la première. Or, pour que D soit résidu quadratique par rapport à m, il faut et il suffit qu'on ait pour chacun des diviseurs simples f de m (art. 105.),

$$1. \quad \left(\frac{D}{f}\right) = 1.$$

En supposant f positif, et distinguant comme dans le §. précédent, les 4 cas suivants que le déterminant D peut présenter,

$D = PS^2$, $P \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$; $D = 2PS^2$, $P \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$,

la condition dont il s'agit, pourra être remplacée en vertu des théorèmes (2.) §. 2. et selon ces 4 cas, par l'une de celles-ci:

$$2. \quad \left(\frac{f}{P}\right) = 1, \ (-1)^{\frac{f-1}{2}}\left(\frac{f}{P}\right) = 1, \ (-1)^{\frac{f^2-1}{8}}\left(\frac{f}{P}\right) = 1, \ (-1)^{\frac{f-1}{2}+\frac{f^2-1}{8}}\left(\frac{f}{P}\right) = 1.$$

Cela posé, soit

$$3. \quad ax^2 + 2bxy + cy, \quad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2, \quad \ldots.$$

le système complet des formes différentes (proprement primitives), ayant pour déterminant le nombre négatif D, et voyons combien de fois le nombre m dont tout diviseur simple f est supposé satisfaire à la condition (1.), peut être

représenté de la manière indiquée, par la totalité de ces formes. Si nous désignons par μ le nombre des diviseurs premiers inégaux f de m, la congruence

$$z^2 \equiv D \pmod{m},$$

aura autant de racines différentes qu'il y aura d'unités dans la puissance 2^μ (art. 105). Soient

$$l,\ l',\ l'',\ \ldots\ .$$

ces racines et cherchons d'après les préceptes de l'art. 180., les représentations qui appartiennent à chacune de ces racines. Pour obtenir celles qui se rapportent à $z = l$, il faudra voir si parmi les formes (3.) il y en a une qui soit équivalente à celle-ci:

$$mx^2 + 2lxy + \frac{l^2 - D}{m} y^2.$$

Or, m étant impair et premier à D, cette dernière sera proprement primitive, et aura donc toujours son équivalente dans le système (3.), par laquelle m pourra être représenté de deux manières. Le même raisonnement pouvant s'appliquer à toutes les autres racines l', l'', ..., on voit que m peut être représenté par la totalité des formes (3.), d'autant de manières différentes qu'il y a d'unités dans la puissance $2^{\mu+1}$, deux représentations étant considérées comme différentes lorsqu'elles se font par des formes différentes ou lorsqu'ayant lieu par la même forme, et désignant par x, y, et par x', y', les valeurs simultanées des indéterminées, on n'a pas à la fois $x = x'$, et $y = y'$.

Si le système complet (3.) est celui de l'ordre improprement primitif, et si en même temps le nombre qu'il s'agit de représenter par ces formes, est $2m$, on arrive à la même conclusion. Il suffit de remarquer que le nombre des racines de la congruence $z^2 \equiv D \pmod{2m}$, est également 2^μ, et que l'une quelconque de ces racines étant désignée par l, la forme $2mx^2 + 2lxy + \frac{l^2 - D}{2m} y^2$ sera improprement primitive. C'est ce qui résulte de ce que m est impair et premier à D, et de ce que, l^2 et D étant de la forme $4\nu + 1$, le coëfficient de y^2 est pair. Nous avons donc ce théorème dans lequel les deux cas sont réunis dans le même énoncé.

Théorème I.

Soient $ax^2 + 2bxy + cy^2$, $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$, ... les formes proprement (improprement) primitives différentes, ayant l'entier négatif D

pour déterminant; soit encore m un nombre positif, impair et premier à D, dont tous les diviseurs simples f satisfont à celle des conditions (2.), qui se rapporte au nombre donné D, et désignons par μ le nombre des facteurs simples inégaux de D. Cela posé, je dis que, si les indéterminées x et y sont assujetties à n'avoir pas de diviseur commun, l'entier m, $(2m)$ sera toujours représenté par la totalité de ces formes, d'autant de manières différentes qu'il y a d'unités dans la puissance $2^{\mu+1}$.

Remarque. Le théorème précédent est sujet à deux exceptions, dont la première a lieu lorsqu'on a $D = -1$, la seconde lorsqu'on a $D = -3$, et qu'il s'agit des formes de l'ordre improprement primitif. Il résulte de l'art. déjà cité de l'ouvrage de Mr. *Gauss*, que le nombre des représentations est respectivement dans ces cas, $2^{\mu+2}$ ou $3.2^{\mu+1}$.

Pour établir le théorème que nous allons énoncer, et qui se rapporte au cas où D est un nombre positif *(non-quarré)* *), il n'y aura rien à changer aux considérations précédentes, si ce n'est qu'au lieu de s'appuyer sur l'art. 180. des Disq. arithm., il faudra recourir à l'art. 205. du même ouvrage. Pour réunir le cas des formes proprement primitives et celui des formes improprement primitives dans un énoncé commun, nous avons fait usage de la lettre ω, par laquelle il faut entendre le nombre 1 ou 2 selon ces deux cas.

Théorème II.

Soient $ax^2+2bxy+cy^2$, $a'x^2+2b'xy+c'y^2$, ... les formes proprement (improprement) primitives différentes ayant l'entier positif D pour déterminant; soit encore m un nombre positif, impair et premier à D, dont tous les facteurs simples f satisfont à celle des conditions (2.), qui se rapporte au nombre donné D, et désignons par μ le nombre des facteurs simples inégaux de D. Cela posé, et les indéterminées x et y étant assujetties à n'avoir pas de diviseur commun, je dis que les représentations de ωm par la totalité de ces formes, pourront toujours être distribuées en 2^{μ} groupes distincts, en comprenant dans un même groupe deux représentations telles que

$$ax^2+2bxy+cy^2=\omega m, \quad ax'^2+2bx'y'+cy'^2=\omega m,$$

---

*) Les formes dont le déterminant est un quarré positif, et qui se décomposent toujours en deux facteurs linéaires, ne sont pas de véritables formes quadratiques. Par cette raison nous les exclurons toujours dans ce qui va suivre.

qui se font par la même forme quadratique, et dans lesquelles les valeurs x, y et x', y' des indéterminées, sont liées entre elles par les équations

$$x = \frac{1}{\omega}(x't - (bx' + cy')u), \qquad y = \frac{1}{\omega}(y't + (a'x + by')u),$$

t et u désignant des entiers quelconques positifs ou négatifs tels qu'on ait

$$4. \quad t^2 - Du^2 = w^2.$$

[On peut remarquer que cet énoncé, si l'on y supprimait la condition que D doit être positif, resterait exact et comprendrait alors le théorème I., avec ses deux exceptions. En effet, D étant supposé négatif, l'équation (4.) n'a en général que ces deux solutions $t = \pm\omega$, $u = 0$, ce qui donne deux représentations pour chaque groupe, de sorte que le nombre total des représentations, fini dans ce cas, devient $2^{\mu+1}$ comme dans le théorème I. Il n'y a exception que lorsqu'on a ou $D = -1$, $\omega = 1$; ou $D = -3$, $\omega = 2$, auxquels cas le nombre des solutions de l'équation (4.) est respectivement 4 ou 6, ce qui s'accorde avec les exceptions indiquées plus haut. Mais tout en faisant remarquer ce que le cas de D positif et celui de D négatif ont de commun, comme sous d'autres rapports ces deux cas sont très-différents et doivent être traités séparément, nous avons cru devoir donner deux énoncés distincts, pour pouvoir appliquer plus facilement les résultats précédents que nous aurons souvent à employer.]

Il est facile de voir que les représentations, ou ce qui est la même chose, les solutions de l'équation,

$$5. \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = \omega m,$$

qui appartiennent au même groupe, peuvent toujours se déduire toutes de l'une quelconque d'entre elles, $x = \alpha$, $y = \gamma$, au moyen des formules

$$6. \quad x = \frac{1}{\omega}(\alpha t - (b\alpha + c\gamma)u), \qquad y = \frac{1}{\omega}(\gamma t + (a\alpha + b\gamma)u),$$

en attribuant à t et u toutes les valeurs entières, tant positives que négatives, qui satisfont à l'équation (4.).

Nous allons faire voir maintenant qu'il existe certaines limites très-simples entre lesquelles se trouve toujours comprise une de ces solutions en nombre infini, et entre lesquelles il ne saurait y en avoir plus d'une. Pour éviter des distinctions inutiles à notre objet, nous supposerons que dans chacune des formes données,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2, \quad \ldots$$

les coëfficients de x^2 et de xy sont positifs, et que celui de y^2 est négatif. On s'assure facilement de la légitimité de cette supposition; il suffit de remarquer que parmi les formes qui composent une même classe, et entre lesquelles nous pouvons en choisir une à volonté, pour construire ce que nous avons appelé le système complet des formes différentes, il y en a toujours au moins une qui satisfait aux conditions énoncées. En effet, la période des formes réduites qui appartiennent à une classe donnée de déterminant positif, contient toujours au moins deux formes (Disq. arithm. art. 187.), et il est évident que sur deux formes contiguës quelconques de cette période, il y en a toujours une qui est telle que

$$7. \quad a>0, \quad b>0, \quad c<0.$$

Ces conditions ayant lieu, il est facile de voir que parmi les solutions de l'équation (5.), il ne saurait y en avoir aucune pour laquelle x soit zéro, puisqu'il résulterait de cette supposition, $cy^2=m$, ce qui est impossible, c et m ayant des signes opposés. La valeur particulière α sera donc aussi différente de zéro, et nous remarquerons que cette valeur peut toujours être supposée positive. Cela résulte de ce que la solution $x=\alpha$, $y=\gamma$, qui sert de point de départ pour obtenir toutes celles qui appartiennent à un même groupe, peut être choisie à volonté dans ce groupe, et de ce que le groupe qui contient la solution $x=\alpha$, $y=\gamma$, renferme évidemment aussi celle-ci $x=-\alpha$, $y=-\gamma$, cette dernière rapportée à la première, répondant à $t=-\omega$, $u=0$.

Les solutions, en nombre infini, qui forment un même groupe, et qui résultent des équations (6.), peuvent se distribuer en deux groupes partiels dont le premier comprend toutes celles pour lesquelles on a $x>0$, tandis que celles du second satisfont à la condition $x<0$.

Nous allons maintenant faire voir que dans le premier de ces groupes partiels, les valeurs de y s'étendent depuis $-\infty$ jusqu'à ∞, sans que cette indéterminée puisse obtenir la même valeur dans deux solutions différentes, et que celle de ces solutions pour laquelle y a la plus petite valeur positive, différente de zéro, satisfait à des conditions d'inégalité très-simples au moyen desquelles il est facile de la séparer de toutes les autres, et de réduire chaque groupe à une représentation unique, ce qui rendra le théorème II. entièrement semblable au théorème I. qui se rapporte aux déterminants négatifs. Pour remplir l'objet que nous avons en vue, nous observerons qu'il résulte de l'équation $a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2=\omega m$, mise sous

la forme $(b\alpha+c\gamma)^2-D\alpha^2=\omega cm$, et de ce que ωcm est négatif, qu'on a, abstraction faite des signes,

$$\alpha\sqrt{D}>b\alpha+c\gamma,$$

et comme l'on a pareillement en vertu de l'équation (4.),

$$\frac{t}{\omega}>\frac{u}{\omega}\sqrt{D},$$

on conclut, en faisant toujours abstraction des signes,

$$\alpha t>(b\alpha+c\beta)u.$$

Il suit de là et de ce qu'on a supposé $\alpha>0$, que pour embrasser toutes celles des représentations contenues dans les équations (6.), pour lesquelles x a une valeur positive, on n'aura à faire usage que de celles des solutions de l'équation (4.), dans lesquelles t a le signe plus. Or, il résulte d'un théorème connu que toutes les solutions qui satisfont à cette condition, sont données par les formules

$$t_n=\frac{\omega}{2}\left\{\left(\frac{T}{\omega}+\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n+\left(\frac{T}{\omega}-\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n\right\},$$

$$u_n=\frac{\omega}{2\sqrt{D}}\left\{\left(\frac{T}{\omega}+\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n-\left(\frac{T}{\omega}-\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n\right\},$$

dans lesquelles T et U désignent les plus petits nombres positifs (autres que ω et 0) qui satisfont à l'équation (4.), et où n doit être égalé successivement à tous les entiers depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. On aura donc pour le groupe partiel dans lequel x est positif, en distinguant les différentes solutions de ce groupe par l'indice n, déjà employé dans les équations précédentes,

$$x_n=\frac{1}{\omega}(\alpha t_n-(\alpha b+\gamma c)u_n),\qquad y_n=\frac{1}{\omega}(\gamma t_n+(\alpha a+\gamma b)u_n).$$

En substituant les expressions de t_n, u_n, la seconde de ces équations deviendra

$$y_n=\left(\frac{\gamma\sqrt{D}+\alpha a+\gamma b}{2\sqrt{D}}\right)\left(\frac{T}{\omega}+\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n+\left(\frac{\gamma\sqrt{D}-\alpha a-\gamma b}{2\sqrt{D}}\right)\left(\frac{T}{\omega}-\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n.$$

Il est facile de voir que les quantités $\gamma\sqrt{D}+\alpha a+\gamma b$, $\gamma\sqrt{D}-\alpha a-\gamma b$, sont la premier positive, le second négative. Pour s'en assurer il suffira de faire voir que $\alpha a+\gamma b$ est numériquement supérieur à $\gamma\sqrt{D}$, et a le signe positif. La première de ces assertions se prouve, en mettant l'équation $a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2=\omega m$, sous la forme $(\alpha a+\gamma b)^2-D\gamma^2=\omega am$, et en observant que le second membre est positif. Pour justifier la seconde assertion, on remarquera que, puisque la valeur numérique de $\alpha a+\gamma b$

surpasse celle de $\gamma\sqrt{D}$, elle surpassera *a fortiori* celle de γb, b étant $< \sqrt{D}$. De là et de ce que αa a le signe positif, on conclut que $\alpha a + \gamma b$ est également positif.

Comme en vertu de ce qui précède, les coëfficients qui entrent dans l'expression de y_n, sont le premier positif, le second négatif, et que d'un autre côté, les quantités positives $\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}$, $\frac{T}{\omega} - \frac{U}{\omega}\sqrt{D}$, dont le produit est 1, sont évidemment la première supérieure, la seconde inférieure à l'unité, on voit sans peine que chacun des deux termes dont se compose y_n, croît avec l'indice n. On aura donc, quel que soit cet indice,

$$y_n > y_{n-1},$$

ce qui prouve que, comme nous l'avons avancé plus haut, l'indéterminée y ne saurait obtenir deux fois la même valeur dans le groupe partiel où x est positif, et l'on voit également que y doit passer du négatif au positif, car on a évidemment $y_{-\infty} = -\infty$, $y_{\infty} = \infty$. Pour obtenir la solution que nous avons en vue, et dans laquelle y_n a la plus petite valeur positive, différente de zéro, il faudra poser ces deux conditions

$$y_n > 0, \quad y_{n-1} \leqq 0.$$

Si l'on observe qu'en vertu des expressions de x_n, y_n, t_n, u_n, données plus haut, on a la relation

$$y_{n-1} = \frac{1}{\omega}(y_n T - (a x_n + b y_n) U),$$

la seconde de ces conditions prendra cette autre forme

$$(T - bU) y_n \leqq a U x_n.$$

Comme l'on a $T > U\sqrt{D}$, $b < \sqrt{D}$, et par suite $T - bU > 0$, l'inégalité précédente est équivalente à celle-ci

$$y_n \leqq \frac{aU}{T - bU} x_n.$$

Il résulte de ce qui précède, que parmi les représentations en nombre infini, qui forment un même groupe, et qui sont toutes données par les équations (6.), il y en a toujours une qui satisfait à ces trois conditions

$$8. \quad x > 0, \quad y > 0, \quad y \leqq \frac{aU}{T - bU}.$$

Ces inégalités ont été déduites de la définition de la solution particulière que nous voulions séparer de toutes les autres contenues dans le même groupe qu'elle. D'après cette définition, la solution dont il s'agit devait appartenir au premier des deux groupes partiels, et répondre dans ce

groupe à la plus petite valeur positive de y. On peut prouver réciproquement que toute solution pour laquelle les inégalités précédentes ont lieu, est nécessairement parmi toutes les solutions qui forment avec elle une même groupe total, celle à laquelle s'applique la définition précédente; il suffit pour cela de répéter en sens inverse les raisonnements que nous venons de développer. Cela étant, on voit que le théorème II. peut être remplacé par un autre théorème dont voici l'énoncé.

Théorème III.

Les suppositions de l'énoncé du théorème II. étant conservées, si l'on ajoute que les coëfficients et les indéterminées de la forme $ax^2+2bxy+cy^2$, doivent satisfaire aux conditions (7.) et (8.), et que l'on assujettise toutes les autres formes à des conditions analogues, je dis que le nombre des représentations différentes de l'entier ωm, que l'on peut effectuer au moyen des formes données, sera exprimé par la puissance 2^u.

Pour rendre plus faciles les applications que nous aurons à faire du théorème précédent, il conviendra de mettre sous une forme géométrique, le résultat sur lequel ce théorème est fondé. Soient à cet effet OX, OY, deux axes rectangulaires des x et des y, dirigés dans le sens des coordonnées positives, le premier horisontalement, le second verticalement et de bas en haut. Les variables x et y dans l'équation $ax^2+2bxy+cy^2=\omega m$, étant considérées comme continues, cette équation sera à une hyperbole, et l'on déduira facilement des conditions $a>0$, $b>0$, $c<0$, que l'axe des y sépare l'une de l'autre, les deux branches infinies de cette courbe. Si donc nous appellons première branche celle de ces deux branches infinies, sur laquelle l'abscisse x est partout positive, le premier des deux groupes partiels précédemment distingués, répondra à cette première branche, et l'interprétation géométrique du résultat établi plus haut, consistera à dire que parmi les solutions en nombre infini, qui forment le même groupe total, et qui sont toutes comprises dans les équations (6.), il y en a toujours une, et qu'il ne saurait y en avoir plus d'une, qui soit représentée par un point de l'arc de la première branche, intercepté d'une part par l'axe OX, et de l'autre par la droite qui a pour équation $y=\frac{aU}{T+bU}x$; à quoi il faut ajouter qu'on doit toujours exclure la solution qui répond à l'extrémité inférieure de cet arc.

§. 5.

Il nous reste une dernière question préliminaire à resoudre, avant d'en venir au véritable objet de ce mémoire. Cette question consiste à assigner toutes les valeurs simultanées des indéterminées x et y, qui, étant substituées dans une forme donnée du déterminant D, rendent cette forme première à D, et en outre impaire ou impairement paire suivant qu'il s'agit d'une forme proprement ou improprement primitive. Nous désignons par D_1 la valeur numérique de D, et nous commencerons cette recherche par l'examen du cas où la forme donnée appartient à l'ordre proprement primitif. Ce cas se subdivise lui même, suivant que D est pair ou impair. Soit en premier lieu D impair. Les indéterminées x et y étant mises sous la forme

$$2D_1v+\alpha, \quad 2D_1w+\gamma,$$

où v, w désignent des entiers quelconques positifs ou négatifs, et α, γ sont des nombres pris l'un et l'autre dans la suite

$$0, 1, 2, \ldots 2D_1-1,$$

on aura évidemment

$$ax^2+2bxy+cy^2 \equiv a\alpha^2+2ba\gamma+c\gamma^2 \pmod{2D_1}.$$

La question proposée revient donc à voir pour lesquelles des combinaisons α, γ, ou plutôt, pour combien de ces combinaisons, car c'est uniquement leur nombre qu'il nous importe de connaître, le second membre est premier à $2D_1$. Nous observerons d'abord qu'on peut, sans nuire en rien à la généralité de la question, supposer l'un des coëfficients extrêmes, le premier a par exemple, sans diviseur commun avec $2D_1$. En effet, si cette condition n'a pas lieu dans la forme donnée, on peut toujours transformer celle-ci en une autre où elle se trouve remplie. Soit $a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$ la nouvelle forme équivalente à la première, et soient

$$x=px'+qy', \quad y=rx'+sy', \quad ps-qr=1,$$

les équations qui correspondent à cette transformation. Si maintenant dans les congruences

$$\alpha \equiv p\alpha'+q\gamma', \quad \gamma \equiv r\alpha'+s\gamma', \pmod{2D_1},$$

l'on combine les nombres α', γ', pris l'un et l'autre dans la suite $0, 1, 2, \ldots 2D_1-1$, de toutes les manières possibles entre eux, et que l'on détermine α, γ de manière à se trouver compris entre les mêmes limites, à chaque combinaison α', γ', il correspondra une combinaison α, γ, et réciproque-

ment, comme on le voit en mettant les congruences précédentes sous la forme

$$\alpha' \equiv s\alpha - q\gamma, \quad \gamma' \equiv -r\alpha + p\gamma \pmod{2D_1}.$$

De là et de ce que l'on a évidemment

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \equiv a'\alpha'^2 + 2b'\alpha'\gamma' + c'\gamma'^2 \pmod{2D_1},$$

on conclut que le nombre des combinaisons α, γ, qui rendent $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$, premier à $2D_1$, est égal à celui des combinaisons α', γ' qui produisent le même effet sur le second membre. Cette conclusion justifiant l'assertion avancée plus haut, nous pouvons considérer a comme premier à $2D_1$. Cela posé, pour que le trinome $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$ n'ait pas de diviseur commun avec $2D_1$, il faut et il suffit que le produit

$$a(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2) = (a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2,$$

jouisse de la même propriété, et par suite, que $a\alpha + b\gamma$ soit premier à $2D_1$, lorsque γ est pair, ou que $a\alpha + b\gamma$ soit pair et premier à D_1, lorsque γ est impair. Or, γ ayant une valeur déterminée, celles de l'expression $a\alpha + b\gamma$, lorsqu'on y pose successivement $\alpha = 0, 1, 2, \ldots 2D_1 - 1$, coïncideront, abstraction faite des multiples de $2D_1$, avec la même suite. Tout se réduit donc à voir dans le cas de γ pair, combien la suite précédente renferme de termes premiers à $2D_1$, et dans le cas de γ impair, combien il y en a dans la même suite, qui jouissent de la double propriété d'être pairs et premiers à D_1. Si l'on désigne par Δ le nombre des entiers positifs non-supérieurs *) à D_1, qui n'ont pas de diviseur commun avec D, le nombre des termes en question sera pour l'un et l'autre cas, exprimé par Δ. Comme d'un autre côté, γ est susceptible de $2D_1$ valeurs différentes, on voit que les combinaisons α, γ qui donnent à $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$, une valeur première à $2D_1$, sont au nombre de $2D_1\Delta$. Une discussion toute semblable étant appliquée au cas où D est pair, fait voir que le nombre des combinaisons est alors $4D_1\Delta$.

Considérons en dernier lieu le cas où la forme donnée $ax^2 + 2bxy + cy^2$ appartient à l'ordre improprement primitif. Si nous posons $\frac{1}{2}a = a'$, $\frac{1}{2}b = b'$, et comme précédemment, $x = 2D_1 v + \alpha$, $y = 2D_1 w + \gamma$, nous aurons

$$a'x^2 + bxy + c'y^2 \equiv a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2 \pmod{2D_1},$$

---

*) Je dis a dessein non-supérieurs, pour que le cas de $D_1 = 1$, ne fasse pas exception.

et il s'agira de voir pour combien de combinaisons α, γ, le second membre est impair et premier à D_1. Pour y parvenir de la manière la plus simple, nous supposerons, ce qui est permis, que a' n'a pas de diviseur commun avec $2D_1$. Cela étant, il faut distinguer le cas où l'on a $D \equiv 1$, et celui où $D \equiv 5 \pmod 8$. Dans le premier de ces deux cas, il résulte de l'équation $D = b^2 - ac = b^2 - 4a'c'$, et de ce que b est impair, que c' est pair, et l'on voit de même que dans le second, c' est impair. On conclut de là que $a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2$ ne saurait être impair dans le premier cas, à moins que les nombres α, γ, ne soient le premier impair, le second pair, et dans le second cas, à moins que α, γ, ne soient ou l'un pair, l'autre impair, ou impairs tous les deux. Pour avoir égard à l'autre condition d'après laquelle $a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2$ doit être premier à D_1, on remarquera qu'il faut et qu'il suffit, pour qu'elle soit remplie, que le produit $4a'(a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2) = (a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2$ jouisse de la même propriété. Cela posé, si nous supposons d'abord $D \equiv 1 \pmod 8$, il faudra, après avoir attribué à γ une valeur déterminée paire, égaler α à chaque terme de la suite $1, 3, 5, \ldots, 2D_1 - 1$, et voir combien de fois $a\alpha + b\gamma$, ou ce qui est la même chose, le reste de cette expression, pris relativement au diviseur D_1, est premier à D_1. Or il est facile de voir que les restes de $a\alpha + b\gamma$ sont, abstraction faite de l'ordre, $0, 1, 2, \ldots D_1 - 1$, d'où l'on conclut qu'à chaque valeur de γ, il correspond un nombre Δ de valeurs impaires de α, telles que $a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2$ soit impair et premier à D. Il résulte de là et de ce que le nombre γ est lui-même susceptible de D_1 valeurs différentes, que le nombre des combinaisons α, γ qui donnent à l'expression $\frac{1}{2}(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)$, une valeur impaire et première à D, est égal $D_1\Delta$. Si nous considérons en second lieu le cas où $D \equiv 5 \pmod 8$, on trouve comme dans le cas précédent, qu'à chaque valeur paire de γ, il correspond un nombre de valeurs convenables de α, égal à Δ, puisque, γ étant pair, α doit être impair; mais il n'en est plus de même, lorsque la valeur déterminée que l'on attribue a γ, est impaire, α pouvant être alors pair ou impair. Il faut dans cette dernière supposition, égaler α dans l'expression $a\alpha + b\gamma$, à chacun des nombres $0, 1, 2, \ldots 2D_1 - 1$. Or, les valeurs de $a\alpha + b\gamma$, correspondantes à ces nombres, étant diminuées des multiples de D_1, qu'elles contiennent, coïncideront évidemment avec la suite $0, 1, 2, \ldots D_1 - 1$, chacun des termes de cette suite étant supposé écrit deux fois. On conclut de là que les valeurs convenables

de α, qui répondent à une valeur impaire donnée de γ, sont toujours au nombre de 2Δ. Si l'on remarque maintenant que parmi les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2D_1-1$, dont γ est susceptible, il y en a D_1, qui sont paires, et autant qui sont impaires, on verra que dans le cas où l'on a $D \equiv 5 \pmod 8$, le nombre des combinaisons α, γ, qui rendent le trinome $\frac{1}{2}(a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2)$ impair et premier à D, est égal à $3D_1\Delta$.

Nous résumerons ici les résultats qui ont été établis dans ce §. La valeur numérique du déterminant D étant désignée par D_1, et Δ exprimant le nombre de ceux des termes $1, 2, \ldots D_1$, qui n'ont pas de diviseur commun avec D_1, les valeurs simultanées de x et de y, qui rendent une forme quelconque de ce déterminant, ou la moitié de cette forme, lorsqu'elle appartient à l'ordre improprement primitif, impaire et première à D, peuvent toujours se distribuer en systèmes de la forme,

$$x = 2D_1 v + \alpha, \quad y = 2D_1 w + \gamma,$$

où v et w désignent des entiers indéterminés positifs ou négatifs, et α et γ sont l'un et l'autre compris dans la suite $0, 1, 2, \ldots 2D_1-1$; quant au nombre des systèmes qui jouissent de la propriété énoncée, il sera, lorsqu'il s'agit d'une forme proprement primitive $2D_1\Delta$ ou $4D_1\Delta$, suivant que D est impair ou pair, et, lorsque la forme est improprement primitive, $D_1\Delta$ ou $3D_1\Delta$, suivant que l'on a $D \equiv 1$, ou $D \equiv 5 \pmod 8$.

Nous terminerons les préliminaires, en démontrant le lemme qui suit. „Soit $K = kk'k''\ldots$ le produit des nombres premiers positifs, impairs et inégaux k, k', k'', ..., et désignons par L un entier quelconque qui divise K. Posons encore $\theta = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, les signes ambigus étant quelconques et indépendants l'un de l'autre. Cela étant, je dis que l'expression $\Sigma\theta^{\frac{n-1}{2}}\eta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{L}\right)$, où le signe sommatoire s'étend à tous les entiers n premiers à $2K$, et compris depuis $n=1$ jusqu'à $n=8K-1$, est toujours égale à zéro, si on n'a pas simultanément $\theta=1$, $\eta=1$, $L=1$."

Désignons par a l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots k-1$, par a' l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots k'-1$, et ainsi de suite. Soit encore b l'un quelconque des nombres 1, 3, 5, 7. Cela posé, il est facile de voir que l'on obtiendra toutes les valeurs que n doit recevoir dans la somme précédente, en déterminant pour chacune des combinaisons a, a', ...; b, le nombre n, moindre que $8K$, qui satisfait aux conguences

simultanées,

$$n \equiv \mathrm{a} \pmod{k}, \quad n \equiv \mathrm{a}' \pmod{k'}, \quad \ldots; \quad n \equiv \mathrm{b} \pmod{8}.$$

On conclut de ces congruences

$$\left(\frac{n}{k}\right) = \left(\frac{\mathrm{a}}{k}\right), \quad \left(\frac{n}{k'}\right) = \left(\frac{\mathrm{a}'}{k'}\right), \quad \ldots; \quad \theta^{\frac{n-1}{2}} = \theta^{\frac{b-1}{2}}, \quad \eta^{\frac{n^2-1}{8}} = \eta^{\frac{b^2-1}{8}}.$$

Si maintenant l'on forme le produit des deux dernières de ces équations et de celles des autres qui répondent à ceux des nombres premiers $k, k', \ldots$ contenus dans L, et que l'on somme ensuite depuis $\mathrm{a} = 1$, $\mathrm{a}' = 1, \ldots$, jusqu'à $\mathrm{a} = k-1$, $\mathrm{a}' = k'-1, \ldots$ et relativement à $b = 1, 3, 5, 7$, la somme du lemme prendra la forme d'un produit, dont les facteurs sont outre $\Sigma \theta^{\frac{b-1}{2}} \eta^{\frac{b^2-1}{8}}$, celles des sommes $\left(\frac{\mathrm{a}}{k}\right)$, $\Sigma\left(\frac{\mathrm{a}'}{k'}\right)$, $\ldots$ qui se rapportent à des nombres premiers contenus dans L, et celles des expressions $k-1$, $k'-1, \ldots$ qui répondent aux autres nombres $k, k', \ldots$ Il résulte de là que l'expression $\Sigma \theta^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{L}\right)$ s'évanouit toujours, à moins qu'on n'ait à la fois, $\theta = 1$, $\eta = 1$, $L = 1$, ce qu'il s'agissait de prouver.

§. 6.

En passant maintenant aux questions indiquées dans le préambule de ce mémoire, nous conserverons les notations dont nous avons fait usage dans les §§. 3., 4. et 5. Nous poserons donc

$$1. \quad D = PS^2, \quad \text{ou} \quad D = 2PS^2,$$

S^2 étant toujours le plus grand quarré qui divise D, et

$$2. \quad P = p\,p'\,p''\ldots,$$

$p, p', p'', \ldots$ étant des nombres premiers impairs, positifs ou négatifs, tous différents les uns des autres. Nous poserons aussi

$$3. \quad R = r\,r'\,r''\ldots,$$

$r, r', r'', \ldots$ désignant comme plus haut, les facteurs premiers impairs inégaux, contenus dans S, sans l'être dans P. Soit encore q un nombre premier positif impair quelconque, contenu ni dans P ni dans R, et décomposons chacun de ces produits d'une manière quelconque en deux facteurs, sans exclure le cas où l'un de ces facteurs serait égal à l'unité, c'est à dire, écrivons les deux équation

$$4. \quad P = P_1 P_2, \quad R = R_1 R_2.$$

Posons enfin

$$5. \quad \delta = \pm 1, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \theta = \pm 1, \quad \eta = \pm 1.$$

les signes étant quelconques et indépendants les uns des autres. Cela étant et s désignant une variable continue positive, assujétie à rester supérieure à l'unité, nous aurons par le développement en série, et en ayant égard aux équations (2.) et (3.) du §. 2.,

$$\frac{1}{1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2R_1}\right)\frac{1}{q^s}} = 1+\ldots+\theta^{\frac{q^l-1}{2}}\eta^{\frac{q^{2l}-1}{8}}\left(\frac{q^l}{P_2R_1}\right)\frac{1}{(q^l)^s}+\ldots,$$

où pour abréger, on n'a écrit dans le second membre que son terme général, dans lequel il faut égaler l successivement à toutes les valeurs entières depuis $l=0$ jusqu'à $l=\infty$.

Supposons maintenant que dans l'équation précédente, l'on mette pour q toutes les valeurs dont ce nombre est susceptible, c'est à dire tous les nombres premiers impairs positifs, qui ne divisent pas D, et que l'on forme le produit de toutes ces équations. Le produit des seconds membres formera une série dont la loi est très-facile à reconnaître, si l'on se rappelle que d'après un théorème connu, un nombre composé ne peut résulter que d'une seule manière, de la multiplication de facteurs simples, et que l'on continue en même temps à avoir égard aux théorèmes cités du §. 2. On obtient ainsi l'équation

$$6.\quad \Pi\frac{1}{1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2R_1}\right)\frac{1}{q^s}} = \Sigma\theta^{\frac{n-1}{2}}\eta^{\frac{n^2-1}{2}}\left(\frac{n}{P_2R_1}\right)\frac{1}{n^s},$$

le signe de multiplication Π se rapportant à toutes les valeurs de q, précédemment définies, et le signe sommatoire s'étendant à tous les entiers, compris depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$, et qui remplissent la double condition d'être impairs et premiers à D, ou plus simplement, qui sont premiers à $2D$. Avant d'aller plus loin, nous aurions à montrer la nécessité de la supposition faite plus haut, et d'après laquelle on doit avoir $s>1$. On s'en rendra facilement compte, si l'on remarque que la série précédente n'a une somme indépendante de l'arrangement de ses termes, que lorsque la condition $s>1$ a lieu, et qu'il en est de même du produit, dont la valeur n'est également indépendant de l'ordre de ses facteurs qu'autant que la même condition est remplie. Il me semble d'autant plus inutile d'entrer dans de plus grands développements à ce sujet, que je me suis déjà expliqué avec détail sur le point en question, dans la démonstration du théorème sur la progression arithmétique, que j'ai citée plus haut et qui est

fondée sur une équation de même nature, mais plus générale que la précédente.

Si dans l'équation précédente on remplace θ, η respectivement par $\delta\theta$, $\varepsilon\eta$, et que l'on change en même temps P_2 en P_1, elle deviendra

$$7. \quad \Pi \frac{1}{1-(\delta\theta)^{\frac{q-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1 R_1}\right)\frac{1}{q^s}} = \Sigma\,(\delta\theta)^{\frac{n-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P_1 R_1}\right)\frac{1}{n^s}.$$

On a encore, en y faisant $\theta = 1$, $\eta = 1$, $P_2 = 1$, $R_1 = 1$, et remplaçant s par $2s$,

$$8. \quad \Pi \frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}} = \Sigma \frac{1}{n^{2s}},$$

les signes de multiplication et de sommation s'étendant toujours aux valeurs de q et de n, précédemment définies. Le produit des équations (6.) et (7.) étant divisé par l'équation (8.), le facteur général dans le premier membre sera

$$\frac{\left(1+\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{1}{q^s}\right)}{\left(1-(\delta\theta)^{\frac{q-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1 R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right)}.$$

Comme le numérateur de cette fraction est évidemment équivalent à

$$\left(1+\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right),$$

elle pourra se mettre sous cette forme plus simple

$$\frac{1+\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}}{1-(\delta\theta)^{\frac{q-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1 R_1}\right)\frac{1}{q^s}}.$$

L'expression précédente présente deux cas différents, suivant que l'on a

$$\delta^{\frac{q-1}{2}}\varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1 P_2}\right) = \delta^{\frac{q-1}{2}}\varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P}\right) = -1 \quad \text{ou} \quad +1.$$

Dans le premier de ces deux cas, elle est égale à l'unité et peut être omise dans le produit; dans le second, on peut lui donner cette autre forme

$$\frac{1+\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}}{1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}}.$$

Les doubles signes dans les valeurs $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, que contient l'équation (7.), ont été tout à fait arbitraires jusqu'à présent. Nous supposerons désormais que suivant les 4 cas que le déterminant D peut présenter, et que nous avons déjà distingués dans le §. 3. et 4., savoir:

$D = PS^2$, $P \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$; $D = 2PS^2$, $P \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$,

ces signes seront respectivement

9. $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$; $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$; $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$; $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$.

Cela étant, la condition $\delta^{\frac{q-1}{2}} \varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P}\right) = 1$, coïncidera avec celle des 4 conditions (2.) du §. 4., qui correspond à chacun des 4 cas précédents. En désignant donc les nombres premiers q, positifs, impairs et non-diviseurs de D, qui y satisfont, par f, cette dernière lettre aura la même signification que dans le §. 4., c'est à dire que l'on aura

$$10. \quad \delta^{\frac{f-1}{2}} \varepsilon^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P}\right) = 1,$$

et le premier membre de l'équation dont l'origine a été indiquée plus haut, sera

$$\prod \frac{1 + \theta^{\frac{f-1}{2}} \eta^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{f^s}}{1 - \theta^{\frac{f-1}{2}} \eta^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{f^s}},$$

le signe Π s'étendant à toutes les valeurs de f. Au moyen de l'équation

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \text{etc.}$$

et en ayant égard aux équation (2.) et (3.) du §. 2., le facteur général du produit précédent pourra se développer dans une série dont le $l+1^{\text{ième}}$ terme est

$$2\theta^{\frac{f^l-1}{2}} \eta^{\frac{f^{2l}-1}{8}} \left(\frac{f^l}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{(f^l)^s}.$$

Le premier terme qui répond à $l = 0$, fait exception à cette loi et a l'unité pour valeur. Il est facile de conclure de là, et en ayant toujours égard aux équations citées du §. 2., que le produit précédent peut lui-même prendre la forme d'une série, ayant pour terme général

$$\theta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P_2 R_1}\right) \frac{2^\mu}{m^s},$$

où m désigne généralement tous les entiers positifs, impairs et premiers à D, qui n'ont que des diviseurs simples f tels que la condition (10.) soit satisfaite,

et où μ indique comme dans le §. 4., le nombre des diviseurs simples inégaux de m, sans compter le diviseur 1. On peut remarquer que le terme qui répond à $m=1$, ne fait pas exception à la loi générale, l'expression précédente se réduisant à l'unité dans ce cas. Nous avons donc l'équation

$$11. \quad \Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\theta^{\frac{m-1}{2}}\eta^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P_2R_1}\right)\frac{2^\mu}{m^s}$$
$$=\Sigma(\delta\theta)^{\frac{n-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P_1R_1}\right)\frac{1}{n^s}.\Sigma\theta^{\frac{n-1}{2}}\eta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P_2R_1}\right)\frac{1}{n^s},$$

dans laquelle on doit étendre les sommations à tous les entiers n ou m, précédemment définis, et l'on doit se rappeller que les valeurs $\delta=\pm1$, $\varepsilon=\pm1$, sont celles que nous avons fixées par les conditions (9.), tandis que les signes dans les équations $\theta=\pm1$, $\eta=\pm1$ restent arbitraires.

En faisant $\theta=1$, $\eta=1$, $P_2=1$, $R_1=1$, et par suite $P_1=P$, l'équation précédente, prendra la forme:

$$12. \quad \Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{2^\mu}{m^s}=\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s}.$$

C'est cette équation particulière qui nous servira à déterminer le nombre des formes différentes qui répondent à un déterminant quelconque positif ou négatif. Il faudra dans cette recherche, traiter séparément le cas où D est positif et celui où D est négatif, et subdiviser encore chacun de ces deux cas suivant qu'il s'agira de formes proprement ou improprement primitives. Mais comme il y a néanmoins une partie commune à l'analyse de ces quatre cas, il conviendra, pour n'avoir pas à présenter deux fois les mêmes considérations, que nous nous occupions d'abord de cette partie de la discussion, dont l'objet consiste à voir quelle forme prend le second membre de l'équation (12.), si l'on y suppose $s=1+\varrho$, et que l'on considère la variable positive ϱ comme devenant moindre que toute quantité donnée. Pour commencer cet examen par le premier des deux facteurs contenus dans le second membre, soient e, e', e'', ... ceux des nombres 1, 2, 3, ... $2D_1-1$, qui n'ont pas de diviseur commun avec $2D_1$. Cela posé, il est évident que la somme $\Sigma\frac{1}{n^{1+\varrho}}$, où n ne doit recevoir que des valeurs positives et premières à $2D_1$, peut être décomposée en autant de sommes partielles de la forme

$$\frac{1}{e^{1+\varrho}}+\frac{1}{(2D_1+e)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(4D_1+e)^{1+\varrho}}+\text{etc.}$$

qu'il y a de termes dans la suite $e, e', e'', \ldots$. Comme, d'un autre côté, on conclut facilement du résultat obtenu plus haut sur la série (1.) du §. 1., que chacune de ces sommes partielles prend la forme $\frac{1}{2D_1} \cdot \frac{1}{\varrho}$, et qu'il est d'ailleurs évident que le nombre de ces sommes partielles, ou ce qui revient au même, le nombre des termes $e, e', e'', \ldots$ est Δ ou 2Δ, selon que D est impair ou pair, la lettre Δ ayant la même signification que dans le §. 5., on aura selon ces deux cas

$$13. \quad \Sigma \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\Delta}{2D_1} \cdot \frac{1}{\varrho}, \quad \text{ou} \quad \Sigma \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\Delta}{D_1} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

la variable ϱ étant toujours supposée infiniment petite. Si nous considérons en second lieu l'autre facteur du second membre, il est facile de voir que ce facteur est un cas particulier de la série à laquelle se rapporte le troisième des lemmes du §. 1.; il faudra, pour l'y comprendre, supposer dans la série générale de ce lemme, $c_n = \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right)$, ou $c_n = 0$, suivant que n est ou n'est pas premier à $2D_1$. Quant aux deux conditions que ce lemme suppose, et qui consistent 1°. en ce que c_n doit être une fonction périodique de l'indice n, et 2°. en ce que la somme des termes qui composent une période, doit être zéro, on s'assure facilement qu'elles sont remplies. Cela est évident pour la première, et pour voir que la seconde a également lieu, il suffira de recourir au lemme qui termine le §. 5., et de remarquer qu'on ne saurait avoir à la fois, $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, $P = \pm 1$. En effet, il résulte des conditions (9.) que les équations précédentes ne sont compatibles entre elles, que lorsqu'on a $P = 1$; ces équations se rapportent alors au cas où le déterminant est un quarré positif, et que nous avons exclu. Il résulte de ce qui précède, que la somme $\Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$, lorsqu'on y considère la variable positive comme devenant infiniment petite, converge vers une limite finie donnée par l'expression

$$14. \quad \Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n},$$

dans laquelle il faut supposer que les valeurs de n se suivent dans l'ordre naturel, c'est à dire de manière à former une suite croissante.

I. Revenons maintenant à l'équation (12.), et considérons en premier lieu le cas où D est négatif de sorte que $D = -D_1$. Soient

15. $ax^2+2bxy+cy^2, \quad a'x^2+2b'xy+c'y^2, \ldots$

les formes différentes et proprement primitives de ce déterminant D, formes dont je désignerai le nombre par h. Cela étant, on aura l'égalité

16. $$\Sigma\frac{2^{\mu+1}}{m^s}=\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\ldots,$$

où le second membre contient autant de termes qu'il y a de formes (15.), et où la double sommation dans chaque terme doit s'étendre à tous les systèmes de valeurs entières de x et de y, comprises entre $-\infty$ et ∞, qui remplissent la double condition de n'avoir pas de diviseur commun et de donner à la forme où elles sont substituées, une valeur première à $2D$. Cela résulte 1°. de ce que chacun des entiers m, contenus dans le premier membre, est en vertu du théorème I. du §. 4., susceptible d'être représenté de la manière indiquée et par l'ensemble des formes (15.), autant de fois qu'il y a d'unités dans l'expression $2^{\mu+1}$, et 2°. de ce que réciproquement toute valeur première à $2D$, que l'une quelconque des formes (15.), peut obtenir lorsqu'on y attribue à x et y des valeurs sans diviseur commun, coïncide d'après les résultats connus et que nous avons rappelés au commencement du §. cité, avec l'un des entiers désignés par m. Si maintenant l'on substitue l'expression de $\Sigma\frac{2^{\mu+1}}{m^s}$, donnée par l'équation précédente, dans l'équation (12,), il viendra

$$\Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\ldots.$$
$$=2\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s},$$

Il est facile de voir que chacun des termes du premier membre peut être mis sous une forme plus simple. Le premier de ces termes est évidemment équivalent à l'expression

$$\Sigma'\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s},$$

où les valeurs simultanées de x et de y, dans la sommation double, ne sont plus assujéties qu'à la condition unique de rendre le trinome où elles sont substituées, impair et premier à D. En attachant donc ce sens au signe Σ', on aura

17. $$\Sigma'\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma'\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\ldots$$
$$=2\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s}.$$

Il faut maintenant poser $s = 1 + \varrho$, la variable positive ϱ étant toujours considérée somme infiniment petite, et voir ce que les différents termes du premier membre deviendront dans cette supposition. Puisque d'après les résultats que nous avons établis dans le §. 5., les valeurs simultanées que l'on doit attribuer à x et y, dans chacune de ces sommes doubles, dans la première par exemple, peuvent être distribuées en systèmes de la forme

$$18. \qquad x = 2D_1 v + \alpha, \qquad y = 2D_1 w + \gamma,$$

on voit que la somme en question peut être décomposée en autant de sommes partielles qu'il y a de ces systèmes, et telles que celle-ci

$$\Sigma \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}},$$

où il faut substituer pour x et y les expressions précédentes, et sommer ensuite relativement aux entiers v et w, depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Pour obtenir cette somme partielle, nous chercherons l'entier qui exprime combien de fois le trinome $ax^2 + 2bxy + cy^2$ dans cette somme, obtient une valeur qui ne surpasse pas la quantité positive quelconque σ. Or, cette dernière question est évidemment identique à celle de savoir combien dans l'intérieur ou sur le contour de l'ellipse, déterminée par l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \sigma$, il y a de points dont les coordonnées x et y sont de la forme (18.), et si l'on observe que l'aire de cette ellipse est $\frac{\pi}{\sqrt{(ac - b^2)}}\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{D_1}}\sigma$, où la lettre π a la signification ordinaire, on conclura immédiatement du second lemme du §. 1. *) que le nombre qu'il s'agit de déterminer, peut être mis sous la forme

$$\frac{\pi}{4\sqrt{D_1^{\delta}}}\sigma + \sigma^{\delta}\psi(\sigma)$$

l'exposant constant δ ayant une valeur quelconque comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, et la fonction $\psi(\sigma)$ restant finie quelque grande que l'on suppose la variable σ. Il résulte de là et du premier théorème du §. déjà cité, que la somme partielle que nous considérons, a la valeur $\frac{\pi}{4\sqrt{D_1^{\delta}}} \cdot \frac{1}{\varrho}$, d'où l'on conclut, en considérant que d'après le §. 5., le nombre des systèmes (18.) et par suite celui des sommes partielles dans lesquelles la somme

*) Il est évident par la nature de ce lemme, que les points placés sur le contour de la courbe peuvent être considérés à volonté comme des points intérieurs ou comme des points extérieurs. On peut donc aussi et à plus forte raison, ranger ces points en partie parmi les points intérieurs et en partie parmi les points extérieurs, comme nous le ferons plus bas, lorsque nous nous occuperons des déterminants positifs.

$\Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}}$ a été partagée, est $2D_1\Delta$ ou $4D_1\Delta$, selon que D est impair ou pair, que la somme précédente est suivant ces deux cas,

$$\frac{\pi\Delta}{2\sqrt{D_1^3}}\cdot\frac{1}{\varrho} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi\Delta}{\sqrt{D_1^3}}\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

Comme ce résultat ne contient rien qui soit particulier à la forme $ax^2+2bxy+cy^2$, et qu'il ne renferme que le déterminant commun à toutes les formes (15.), on voit que le premier membre de l'équation (17.), en supposant toujours ϱ infiniment petit et en distinguant le cas de D impair et celui de D pair, est

$$\frac{h\pi\Delta}{2\sqrt{D_1^3}}\cdot\frac{1}{\varrho} \quad \text{ou} \quad \frac{h\pi\Delta}{\sqrt{D_1^3}}\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

Au moyen de ces expressions et des résultats (13.) et (14.), précédemment établis, l'équation (17.) se changera pour une valeur infiniment petite de ϱ, dans l'équation remarquable qui suit et où les cas de D pair et impair sont confondus dans la même forme,

$$19. \qquad h = \frac{2}{\pi}\sqrt{D}\,\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}.$$

Cette équation est sujette à une exception qui a lieu lorsque D est -1, et qui est une suite de l'exception que le théorème I. du §. 4., souffre dans le même cas. Pour rétablir l'exactitude dans ce cas singulier, il faut doubler le second membre, comme cela résulte de l'analyse précédente, et comme on peut aussi le vérifier *a posteriori*. En effet, on a dans ce cas $h=1$, $D_1=1$, $\delta=-1$, $\varepsilon=1$, $P=-1$; l'équation modifiée comme on vient de le dire, deviendra donc

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}\right),$$

ce qui est exact d'après la série connue de *Leibnitz*.

II. Le déterminant D étant toujours négatif et en outre tel que $D\equiv 1 \pmod 4$, nous supposerons que les formes (15.) sont celles de l'ordre improprement primitif. On aura dans cette supposition, $\delta=1$, $\varepsilon=1$, et l'égalité (16.) devra être remplacée par celle-ci

$$\Sigma\frac{2^{\mu+1}}{(2m)^s}=\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\ldots,$$

où la double sommation s'étend dans chaque terme à toutes les valeurs simultanées de x et du y, qui n'ont pas de diviseur commun, et qui rendent la moitié de la forme qui entre dans ce terme, première à $2D$.

La substitution de l'expression précédente dans l'équation (12.) donne

$$\Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\ldots.$$
$$=2^{1-s}\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s},$$

équation de laquelle on passe, comme dans le cas déjà examiné, à cette autre

$$20.\quad \Sigma'\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma'\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\ldots.$$
$$=2^{1-s}\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s},$$

le signe Σ' indiquant que dans la double sommation la moitié de la forme quadratique ne doit recevoir que des valeurs premières à $2D$. En supposant maintenant $s=1+\varrho$, ϱ étant toujours une variable infiniment petite et positive, on achevera la solution comme dans le cas déjà traité, si l'on se rappelle que d'après ce qui a été démontré dans le §. 5., le nombre des systèmes de la forme

$$x=2D_1v+\alpha,\qquad y=2D_1w+\gamma,$$

qui rendent la moitié d'une forme improprement primitive du déterminant D, première à $2D$, est $D_1\Delta$ ou $3D_1\Delta$, suivant que l'on a $D\equiv 1$ ou $D\equiv 5$ (mod. 8). On trouve ainsi pour le nombre h des formes improprement primitives

$$21.\quad\begin{cases}h=\frac{2}{\pi}\sqrt{D_1}\,\Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}, & D\equiv 1\ (\text{mod. }8),\\ h=\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}\sqrt{D_1}\,\Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}, & D\equiv 5\ (\text{mod. }8).\end{cases}$$

On doit ajouter que la seconde de ces équations est en défaut lorsqu'on a $D=-3$, comme cela résulte de l'exception à laquelle le théorème I. du §. 4., est sujet dans le même cas, et que pour rétablir l'exactitude, le second membre doit être triplé.

III. Nous passons maintenant au cas des déterminants positifs, c'est à dire au cas où l'on a $D=D_1$, et nous supposerons d'abord que les formes différentes (15.) appartiennent à l'ordre proprement primitif, et remplissent chacune les conditions (7.) du §. 4. On a alors d'après le théorème III. du §. 4.

$$\Sigma\frac{2^\mu}{m^s}=\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y)^s}+\ldots.,$$

où la double sommation dans chacun des termes du second membre doit

s'étendre à tous les systèmes de valeurs simultanées de x et y, premières entre elles, qui donnent au trinome où elles sont substituées, une valeur première à $2D$ et satisfont en outre aux inégalités (8.) du §. cité, lorsqu'il s'agit du premier terme, et à des inégalités de forme analogue pour tous les autres termes.

Comme les nombres susceptibles d'être exprimés par une forme de déterminant positif, peuvent être positifs ou négatifs, il semble d'abord que l'on doive ajouter encore la condition que les indéterminées soient choisies de manière à donner à la forme quadratique une valeur positive; mais il est aisé de voir que cette condition est déjà implicitement contenue dans les précédentes. En effet, a, b, x et y étant positifs, la condition $x \geqq \frac{T-bU}{aU} y$ entrainera évidemment celle-ci

$$ax^2+2bxy+cy^2 \geqq \frac{y^2}{aU^2}(T^2-(b^2-ac)U^2) = \frac{y^2}{aU^2}.$$

L'expression précédente de $\Sigma \frac{2\mu}{m^s}$, étant substituée dans l'équation (12.), il viendra

$$\Sigma \frac{1}{n^{2s}} \cdot \Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma \frac{1}{n^{2s}} \cdot \Sigma \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \ldots.$$
$$= \Sigma \frac{1}{n^s} \cdot \Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s}.$$

On voit sans peine que le produit $\Sigma \frac{1}{n^s} \cdot \Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}$ peut être mis sous cette forme plus simple

$$\Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s},$$

où la double sommation est supposée s'étendre à toutes les valeurs simultanées de x et y, qui rendent le trinome premier à $2D$, et en outre telles que l'on ait $x>0$, $y>0$, $y \leqq \frac{aU}{T-bU} x$. Il suffit pour cela de remarquer que les conditions (8.) du §. 4. conservent la même forme lorsqu'on y remplace x et y par nx et ny, n étant positif, et qui si l'on écrit ensuite x et y au lieu de nx et ny, les nouvelles indéterminées x et y ne seront plus assujéties à la condition d'être premières entre elles. En attachant donc au signe Σ', le sens que l'on vient de définir et en supposant, bien entendu, que s'il s'agit de la seconde forme, a, b dans la dernière des inégalités précédentes, doivent être remplacées par a', b', et ainsi de

suite, on aura l'équation

$$22. \quad \Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma' \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \ldots. = \Sigma \frac{1}{n^s} . \Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s}.$$

Il s'agira maintenant de voir ce que les différents termes de cette équation deviendront, lorsqu'après avoir posé $s = 1+\varrho$, la variable positive ϱ devient moindre que toute grandeur donnée. A cet effet, nous décomposerons chacun des termes du premier membre, le premier

$$\Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}},$$

par exemple, en autant de sommes partielles qu'il y a de systèmes de la forme $x = 2Dv+\alpha$, $y = 2Dw+\gamma$, qui rendent le trinome $ax^2+2bxy+cy^2$ premier à $2D$. Soit

$$\Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}}; \quad x>0, \quad y>0, \quad y \leqq \frac{aU}{T-bU} x,$$
$$x = 2Dv+\alpha, \quad y = 2Dw+\gamma,$$

l'une de ces sommes partielles, dans laquelle la sommation double relative à v et w, doit s'étendre à toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Pour obtenir l'expression de cette somme, nous désignerons par σ une variable positive quelconque, et nous chercherons le nombre qui exprime combien de fois le trinome $ax^2+2bxy+cy^2$ dans la double sommation obtient une valeur non-supérieure à σ. Or, d'après la construction géométrique indiquée dans le §. 4., la recherche dont il s'agit, revient évidemment à la question de savoir combien dans l'intérieur ou sur le contour du secteur hyperbolique, terminée d'une part par les droites, exprimées par les équations $y = 0$, $y = \frac{aU}{T-bU} x$, et de l'autre par l'arc de la première branche de l'hyperbole ayant pour équation $ax^2+2bxy+cy^2 = \sigma$, il y a de points dont les coordonnées x et y sont de la forme $x = 2Dv+\alpha$, $y = 2Dw+\gamma$; à quoi il faut ajouter, pour être tout à fait exact, quoique cela n'influe en rien sur le résultat définitif, que l'on doit faire abstraction de ceux des points en question, qui pourraient se trouver sur la partie du contour, formée par l'axe de x. Si l'on a recours aux coordonnées polaires ν et Φ, liées aux coordonnées rectangulaires x et y, par les équations $x = \nu \cos\Phi$, $y = \nu \sin\Phi$, l'aire du secteur sera

$$\tfrac{1}{2}\int \nu^2 \partial\Phi = \tfrac{1}{2}\sigma \int \frac{\partial\varphi}{a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi},$$

les limites de l'intégrale étant zéro et l'angle aigu, dont la tangente trigonométrique est $\frac{aU}{T-bU}$. L'intégration étant effectuée par les méthodes connues, on trouvera pour l'aire dont il s'agit, cette expression très-simple $\frac{\sigma}{2\sqrt{D}}\log(T+U\sqrt{D})$. Au moyen de ce résultat et du second lemme du §. 1., on conclura que le nombre que nous nous étions proposé de déterminer, peut être mis sous la forme

$$\frac{\sigma}{8\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})+\sigma^\delta\psi(\sigma),$$

l'exposant constant δ étant compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, et la fonction $\psi(\sigma)$ restant finie, quelque grande que l'on suppose la variable σ. Il suit de là et du premier des théorèmes du §. 1., que la somme partielle que nous considérons, est

$$\frac{1}{8\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho},$$

et comme d'après les résultats du §. 5., le nombre des sommes partielles contenues dans la même somme totale, est $4D\Delta$ ou $2D\Delta$, suivant que D est pair ou impair, on conclura que chacun des termes du premier membre de l'équation (22.) est selon ces deux cas, et pour une valeur infiniment petite de ϱ,

$$\frac{\Delta}{2\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho}, \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta}{4\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho}.$$

Si donc nous désignons par h, le nombre des formes différentes du déterminant D, le premier membre sera

$$\frac{h\Delta}{2\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho}, \quad \text{ou} \quad \frac{h\Delta}{4\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho},$$

selon que D est pair ou impair.

Comme d'un autre côté et en vertu des résultats (13.) et (14.), le second membre est respectivement dans ces deux cas,

$$\frac{\Delta}{D}\cdot\frac{1}{\varrho}\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta}{2D}\cdot\frac{1}{\varrho}\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

on conclura, en effaçant le facteur $\frac{1}{\varrho}$, commun aux deux membres,

$$23. \qquad h=\frac{2\sqrt{D}}{\log(T+U\sqrt{D})}\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

équation qui convient à un déterminant positif (non-quarré) quelconque, pair ou impair, et dans laquelle T et U sont les plus petits entiers positifs, autres que 1 et 0, qui satisfont à l'équation $t^2-Du^2=1$.

IV. Le cas où le déterminant positif D est de la forme $4\nu+1$, et où les formes de ce déterminant, dont il s'agit de déterminer le nombre h, sont celles de l'ordre improprement primitif, étant entièrement semblable à celui que nous venons de traiter en détail, nous nous contenterons de rapporter le résultat qui répond à ce cas, et qui est conteuu dans les équations qui suivent

$$24.\quad \begin{cases} h = \dfrac{2\sqrt{D}}{\log\frac{1}{2}(T+U\sqrt{D})}\,\Sigma\left(\dfrac{n}{P}\right)\dfrac{1}{n}, & D\equiv 1 \pmod 8, \\ h = \dfrac{1}{3}\dfrac{2\sqrt{D}}{\log\frac{1}{2}(T+U\sqrt{D})}\,\Sigma\left(\dfrac{n}{P}\right)\dfrac{1}{n}, & D\equiv 5 \pmod 8, \end{cases}$$

et dans lesquelles T et U désignent les moindres entiers positifs, autres que 2 et 0, qui satisfont à l'équation $t^2-Du^2=4$.

V. Nous nous occuperons maintenant de la recherche déjà indiquée dans le §. 3., en prouvant que les genres énumérés d'après les préceptes connus et que nous avons rappelés dans le §. cité, existent tous réellement et contiennent chacun le même nombre de formes. Soient à cet effet

$$25.\quad \Phi,\ \Phi',\ \Phi'',\ \ldots\ \mid\ \psi,\ \psi',\ \psi'',\ \ldots,$$

les expressions qui servent à faire cette énumération pour un déterminant quelconque, soit qu'il s'agisse des formes proprement primitives, soit qu'il s'agisse de celles qui composent l'ordre improprement primitif, lorsque ce dernier ordre existe pour le déterminant donné. Les déterminants quarrés étant exclus, la première partie de la ligne précédente contiendra au moins un terme, et il résulte de l'inspection des deux tableaux donnés dans le §. 3., que les expressions Φ, Φ', Φ'', ... qui forment cette première partie, sont toujours telles qu'on ait

$$26.\quad \Phi\Phi'\Phi''\ldots = \delta^{\frac{m-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right).$$

Nous désignerons généralement par χ l'une quelconque des expressions (25.), ou l'un quelconque des produits que l'on peut former avec ces expressions, en les combinant 2 à 2, 3 à 3, et ainsi de suite, ou enfin le produit de toutes, en n'excluant que le seul produit (26.), ou autrement dit, nous désignerons par χ l'un quelconque des termes de l'expression développée

$$27.\quad [(1+\Phi)(1+\Phi')(1+\Phi'')\ldots][(1+\psi)(1+\psi')(1+\psi'')\ldots]-1-\Phi\Phi'\Phi''\ldots,$$

Si nous conservons à la lettre λ la même signification que nous lui avons donnée dans le §. 3., le nombre des expressions χ sera $2^\lambda-2$. Cela

supposé, nous allons faire voir que si l'on partage le nombre total h des formes qui répondent au déterminant donné, en deux groupes comprenant respectivement H et H' formes, en rangeant dans le premier groupe, toutes celles qui satisfont à la condition $\chi = 1$, et dans le second, celles qui remplissent la condition opposée $\chi = -1$, on aura toujours $H - H' = 0$. Pour prouver ce dont il s'agit, il suffira d'appliquer l'analyse dont nous avons fait usage, en partant de l'équation (12.), à l'équation plus générale (11.), après avoir attribué dans cette dernière à θ, η, P_2 et R_1, des valeurs qui font coïncider l'expression $\theta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P_2 R_1}\right)$ avec celle-ci χ. Il est facile de voir qu'en remplissant cette condition, il ne peut arriver qu'on ait à la fois, soit $\theta = 1$, $\eta = 1$, $P_2 R_1 = \pm 1$, soit $\delta\theta = 1$, $\varepsilon\eta = 1$, $P_1 R_1 = \pm 1$. L'impossibilité du premier système de valeurs simultanées résulte de ce que χ contient au moins un facteur de l'une de formes $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$, $\left(\frac{m}{p}\right)$, $\left(\frac{m}{r}\right)$; et pour que le second pût avoir lieu, il faudrait que l'on eût $\theta = \delta$, $\eta = \varepsilon$, $P_2 R_1 = \pm P$, ce qui donnerait à χ la forme $\delta^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) = \Phi\Phi'\Phi''\ldots$, que nous avons exclue plus haut. Il résulte de là que chacun des deux facteurs du second membre de l'équation (11.) est de même nature que le second facteur du second membre de l'équation (12.), et que par conséquent ces deux facteurs convergent l'un et l'autre vers une limite finie de la forme (14.), lorsque la variable ϱ devient infiniment petite. Pour discuter le premier membre de l'équation (11.) dans la même circonstance, il faudra substituer à l'égalité (16.), lorsqu'il s'agit d'un déterminant négatif et de l'ordre proprement primitif, celle-ci

$$\Sigma \chi \frac{2^{\mu+1}}{m^s} = \pm \Sigma \frac{1}{(a x^2 + 2 b x y + c y^2)^s} \pm \Sigma \frac{1}{(a' x^2 + 2 b' x y + c' y^2)^s} \pm \ldots,$$

où l'on doit choisir le signe supérieur ou le signe inférieur dans chacun des termes du second membre, suivant que la forme que ce terme contient, satisfait à la condition $\chi = 1$, ou à celle-ci $\chi = -1$, et il faudra faire une substitution analogue dans les trois autres cas. Cela posé, on voit sans peine et sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans aucun détail à cet égard, que le premier membre de l'équation (11.), en y supposant toujours la variable ϱ infiniment petite, sera, abstraction faite d'un facteur purement numérique, et qui varie suivant les 4 cas, le produit de $(H - H') \frac{1}{\varrho}$

et d'une expression telle que $\frac{\Delta}{\sqrt{D_1^3}}\pi$, $\frac{\Delta}{\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})$ ou $\frac{\Delta}{\sqrt{D^3}}\log\frac{1}{2}(T+U\sqrt{D})$. Or, cette dernière expression étant manifestement différente de zéro, il faut pour que le premier membre reste fini comme le second, qu'on ait $H-H'=0$, ce qu'il s'agissait de faire voir.

Au moyen de ce résultat, il nous sera facile de prouver que les formes sont également réparties entre les genres énuméres d'après les préceptes du §. 3. Soit pour abréger $2^{\lambda-1}=\varkappa$, et désignons par h_1, h_2, h_3, ... $h_\varkappa$, les nombres des formes contenues dans les différents genres, rangés dans un ordre quelconque, les termes de la suite précédente qui répondraient à des genres non-existants étant supposés égaux à zéro. Si maintenant l'on remarque que les formes qui composent un même genre, satisfont ou tous à la condition $\chi=1$, ou tous à la condition opposée $\chi=-1$, il est évident que toute équation de la forme $H-H'=0$, peut s'écrire comme il suit

$$28. \qquad h_1 \pm h_2 \pm h_3 \pm \ldots \pm h_\varkappa = 0,$$

où nous avons donné le signe + au premier terme, et où le signe de tout autre terme est + ou —, selon que le genre auquel ce terme correspond, satisfait à la même condition $\chi=\pm 1$, que celui auquel se rapporte h_1, ou à la condition opposée. Il s'agira maintenant d'examiner combien de fois dans l'ensemble des équations analogues à la précédente et dont le nombre est $2^\lambda-2$, comme celui des expressions χ, un terme quelconque h_ω, autre que le premier, a le signe + ou le signe —...., ou autrement dit, combien de fois ce terme a un signe égal ou opposé à celui du premier terme. Soit à cet effet

$$\Phi=\alpha,\ \Phi'=\alpha',\ \Phi''=\alpha'',\ \ldots. \quad | \quad \Psi=\beta,\ \Psi'=\beta',\ \Psi''=\beta'',\ \ldots.$$

le caractère complet du genre pour lequel h_1 désigne le nombre des formes, α, α', α'',....; β, β', β'', ... étant des valeurs déterminées de la forme ± 1, dont les premières satisfont à la condition $\alpha\alpha'\alpha''\ldots.=1$. Soit de même

$$\Phi=\mathrm{a},\ \Phi'=\mathrm{a}',\ \Phi''=\mathrm{a}'',\ \ldots. \quad | \quad \Psi=\mathrm{b},\ \Psi'=\mathrm{b}',\ \Psi''=\mathrm{b}'',\ \ldots.$$

le caractère complet du genre auquel se rapporte h_ω. Cela posé, il suffit de se reporter à l'expression (27.) dont le développement donne toutes les expressions χ, pour voir que l'excès du nombre des cas où h_1 et h_ω ont le même signe, sur celui où ils sont précédes de signes opposés, sera

donné par l'expression qui suit

$$[(1+\alpha a)(1+\alpha' a')\ldots.][(1+\beta b)(1+\beta' b')\ldots.]-\alpha a\,\beta b\ldots.-1.$$

Or les deux caractères complets étant différents, on ne saurait avoir à la fois $\alpha a = 1$, $\alpha' a' = 1, \ldots.$; $\beta b = 1$, $\beta' b' = 1, \ldots.$; la première partie de l'expression précédente a donc la valeur zéro, et comme l'on évidemment $\alpha a . \beta b \ldots. = 1$, l'excès dont il s'agit a la valeur -2. Il suit de là que si l'on ajoute toutes les équations de la forme (28.), dont le nombre est $2^\lambda - 2$, et l'équation évidente

$$2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \ldots. + 2h_x = 2h,$$

il en résultera celle-ci $2^\lambda h_1 = 2h$, et par suite $h_1 = \frac{h}{2^{\lambda-1}}$, ce qui prouve que la totalité des formes se partage également entre les différents genres, le genre auquel se rapporte le nombre h_1, ayant été arbitrairement choisi.

On a ainsi une démonstration nouvelle et très-simple de l'un des principaux théorèmes de la théorie des formes quadratiques et qui n'avait été établi jusqu'à présent que par le concours d'un grand nombre de considérations diverses. Voyez l'ouvrage de Mr. *Gaufs*, art. 252, 261 et 287, III.

Il nous resterait maintenant a développer les théorèmes que contiennent les équations établies dont les 4 numéros précédents de ce §., et qui sont de deux espèces, les uns résultant des expressions de h telles que nous les avons obtenues dans ce qui précède, les autres exigeant au contraire que l'on effectue préalablement les sommations indiquées dans ces expressions, pour que le nombre h se présente sous une forme purement arithmétique. Comme les résultats dont il s'agit, sont très nombreux et pour la plupart entièrement nouveaux, il sera convenable de les présenter avec quelque étendue. Par cette raison j'en remettrai l'exposition à la continuation de ces recherches, et je terminerai cette première partie, en remplissant l'engagement que j'ai pris dans le mémoire déjà cité sur la progression arithmétique. D'après le §. 11. de ce mémoire, il reste à prouver que la somme

$$\Sigma\,(\pm 1)^\alpha\,(\pm 1)^\beta\,(\pm 1)^\gamma\,(\pm 1)^{\gamma'}\ldots.\,\frac{1}{n}$$

dans laquelle les signes supérieurs n'ont pas simultanément lieu, a une valeur différente de zéro.

Partageons les nombres premiers positifs p, p', p'', ... auxquels se rapportent les valeurs ambiguës de la forme ± 1, à partir de la troisième, en deux groupes, en comprenant dans le premier groupe tous ceux de

ces nombres premiers, auxquels le signe inférieur correspond. En continuant à représenter par $p, p', p'', \ldots$ les nombres du premier groupe, soit $\pm p p' p'' \ldots = P$, le double signe restant à fixer; soient encore $r, r', r'', \ldots$ ceux du second groupe et posons $r r' r'' \ldots = R$. Cela posé, il résulte de la signification des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \ldots$, expliquée dans le §. 7. du mémoire cité, que la somme précédente peut être mise sous la forme

$$\Sigma (\pm 1)^{\frac{n-1}{2}} (\pm 1)^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right).$$

Si maintenant l'on suppose le signe arbitraire dans l'équation $P = \pm p p' p'' \ldots$ tellement choisi que le nombre P soit de la forme $4\mu + 1$ ou de la forme $4\mu + 3$, suivant que le signe donné dans l'expression $(\pm 1)^{\frac{n-1}{2}}$ est le signe supérieur ou inférieur, il est évident que la somme précédente coïncidera avec celle que contient l'expression obtenue plus haut pour le nombre h des formes qui répondent au déterminant D, en supposant ce déterminant égal à PR^2 ou à $2PR^2$, suivant que le signe donné dans l'expression $(\pm 1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ est le signe supérieur ou le signe inférieur. On conclut de là que la somme que nous avions à considérer, est en effet toujours différente de zéro, puisque, s'il en était autrement, le nombre h se reduirait lui-même à zéro, ce qui est impossible, comme on le voit par la forme $x^2 - Dy^2$, qui a lieu quel que soit le déterminant D.

Berlin ce 4. juillet 1839.

Fautes à corriger dans ce mémoire.

Page 332, ligne 20 au lieu de $\left(\frac{p}{q}\right) =$, lisez $\left(\frac{q}{p}\right) =$

Page 346, ligne 5 d'en bas, au lieu de $y \leqq \frac{aU}{T - bU}$, lisez $y \leqq \frac{aU}{T - bU} x$.

18.

Wie sich entscheiden läfst, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaafse.

(Von Hrn. Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

Die Untersuchung über die Biegung krummer Flächen führt nothwendig zu der Aufgabe: die Bedingungen zu finden, unter welchen eine gegebene Fläche (A) als Biegung einer anderen (B) angesehen werden kann. Zur Lösung dieser Aufgabe braucht man nicht alle Biegungen einer jener Flächen zu kennen, um etwa dann zu entscheiden, ob die zweite unter diesen enthalten ist oder nicht; es kommt vielmehr nur darauf an, zu entscheiden, ob sich die Puncte von A denen von B dergestalt entsprechend setzen lassen, dafs die Linear-Elemente zwischen je zwei Paaren unendlich naher entsprechender Puncte gleich werden; dieses aber läfst sich leisten mit Hülfe des schönen von *Gaufs* in der berühmten Abhandlung über krumme Flächen aufgestellten Satzes: dafs bei der Biegung einer Fläche das Maafs der Krümmung in jedem Puncte (d. i. der Zahlenwerth des geometrischen Mittels aus den Krümmungen der beiden Hauptschnitte in diesem Puncte) unverändert bleibt. Der dort (in §. 12.) gegebene Beweis dieses Satzes gründet sich auf den Umstand, dafs der Ausdruck des Krümmungsmaafses lediglich von den Coefficienten E, F, G in dem allgemeinen Ausdrucke des Linear-Elementes abhängt, woraus der Satz unmittelbar folgt, da die Werthe von E, F, G, dem Begriffe der Biegung zufolge, durch diese nicht geändert werden können. Ungeachtet der Satz hiernach als bekannt vorausgesetzt werden könnte, halte ich nicht für überflüssig, noch einige Erläuterungen desselben mitzutheilen.

Man kann sich zunächst von dem eben genannten Satze sehr leicht auf geometrischem Wege Rechenschaft geben, wenn man die Beziehung zwischen dem Flächenraume einer sphärischen Figur und dem Umringe ihrer Polarfigur zu Hülfe nimmt, welche bereits in der *Demonstratio et amplificatio nova etc.* von *Jacobi* bei einer anderen, jedoch

diesem Gegenstande verwandten Untersuchung (Band 16. S. 344) so erfolgreich angewendet worden ist. Zu diesem Ende mufs man auf den Grundbegriff des Krümmungs-Maafses zurückgehen, wie er sich in den *Disquisitiones generales circa superficies curvas* aufgestellt findet. Werden nämlich die Puncte einer Kugel vom Halbmesser $= 1$ denen einer krummen Fläche so entsprechend gesetzt, dafs in entsprechenden Puncten die Normalen beider Flächen einander parallel seien, so ist einleuchtend, dafs jeder auf der Fläche gezeichneten Figur eine bestimmte Figur auf der Kugel entspricht. Sind nun w und w' zwei einander entsprechende unendlich kleine Elemente der Fläche und der Kugel, so heifst das Verhältnifs ihrer Inhalte, nämlich der Quotient $\frac{w'}{w}$, das Krümmungsmaafs der Fläche, für irgend einen Punct des Elementes w. Dafs bei der Biegung der Fläche der Inhalt ihres Elementes w ungeändert bleibt, ist klar; man kann aber auch leicht zeigen, dafs der Inhalt von w' ebenfalls nicht geändert wird. Denkt man sich nämlich die Spitze einer $n$kantigen Ecke im Mittelpuncte einer Kugel, so schneiden die Grenzflächen der Ecke auf der Kugelfläche ein Vieleck α ab, dessen Polar-Vieleck β heifsen mag; alsdann ist bekanntlich: Umring von α + Inhalt von $\beta = 4$ Rechten. Wenn n gröfser ist als 3, so ist die Ecke biegsam; bei der Biegung wird aber der Umring von α, folglich auch der Inhalt von β nicht geändert. Diese Bemerkung läfst sich sofort auf die Biegung krummer Flächen anwenden. Denn im allgemeinen kann ein beliebiger Punct innerhalb des Elementes w als Spitze einer durch dieses umliegende Element gebildeten Ecke von unzählig vielen Kanten vorgestellt werden, in welcher die Summe der Kantenwinkel, also der Umring des sphärischen Polygons α, unendlich nahe vier Rechte beträgt. Alsdann ist offenbar der Umring des vorhin mit w' bezeichneten Elementes der Kugelfläche die Polarfigur zu α, weil die durch diesen Umring gehenden Halbmesser den im Umringe von w gezogenen Normalen der Reihe nach parallel, oder auf den Grenzflächen der Ecke w der Reihe nach senkrecht sind; da nun die Biegung der Ecke w den Umring von α nicht ändert, so ändert sie auch den Inhalt von w' nicht; w. z. b. w.

Nicht so einfach läfst sich der in Rede stehende Satz durch Rechnung aus der Formel für das Linear-Element herleiten. Da jedoch gegenwärtige Untersuchung wesentlich von dieser Formel ausgeht, so darf

der Zusammenhang des Satzes mit ihr nicht unbeachtet bleiben; ich gebe daher noch folgenden analytischen Beweis, welcher sich von dem in genannter Abhandlung über krumme Flächen geführten in so fern unterscheidet, als hier nur rechtwinklige Coordinaten gebraucht werden sollen.

Es seien x, y, z die Coordinaten der Fläche A, x', y', z' die von B, und

$$1. \quad dz = t\,dx + u\,dy, \quad dz' = t'\,dx' + u'\,dy'.$$

Indem man vorläufig annimmt, dafs A auf B abwickelbar ist, oder dafs sich x', y' durch x, y so ausdrücken lassen, wie es die Gleichung

$$2. \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad \text{oder} \quad ds^2 = ds'^2$$

fordert, seien die Werthe der Differentiale von x', y', z' in x und y folgende:

$$3. \quad dx' = a\,dx + a'\,dy, \quad dy' = b\,dx + b'\,dy, \quad dz' = c\,dx + c'\,dy.$$

Daher ist auch $c = at' + bu'$, $c' = a't' + b'u'$, oder, wenn man folgende Bezeichnungen einführt:

$$A = bc' - b'c, \quad B = ca' - c'a, \quad C = ab' - a'b,$$

so ist $Ct' = -A$, $Cu' = -B$, $A^2 + B^2 + C^2 = C^2(1 + t'^2 + u'^2)$.

Wird ferner gesetzt $E = 1 + t^2$, $F = tu$, $G = 1 + u^2$, so kommt:

$$4. \quad ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2.$$

Auch ergiebt sich aus den Gleichungen (2.), (3.), (4.), dafs

$$5. \quad a^2 + b^2 + c^2 = E, \quad aa' + bb' + cc' = F, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = G,$$

folglich $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = 1 + t^2 + u^2$; und

$$6. \quad C^2(1 + t'^2 + u'^2) = 1 + t^2 + u^2.$$

Man setze ferner:

$$da = \alpha\,dx + \alpha'\,dy, \quad db = \beta\,dx + \beta'\,dy, \quad dc = \gamma\,dx + \gamma'\,dy,$$
$$da' = \alpha'dx + \alpha''dy, \quad db' = \beta'dx + \beta''dy, \quad dc' = \gamma'dx + \gamma''dy,$$

mithin:

$$d^2x' = \alpha\,dx^2 + 2\alpha'\,dx\,dy + \alpha''\,dy^2 + a\,d^2x + a'\,d^2y,$$
$$d^2y' = \beta\,dx^2 + 2\beta'\,dx\,dy + \beta''\,dy^2 + b\,d^2x + b'\,d^2y.$$

Da es frei steht, x' und y' als unabhängige Veränderliche zu betrachten, so setze man vorstehende Werthe von d^2x' und d^2y' gleich Null, und entwickele d^2x, d^2y; man erhält:

$$Cd^2x = (a'\beta - b'\alpha)\,dx^2 + 2(a'\beta' - b'\alpha')\,dx\,dy + (a'\beta'' - b'\alpha'')\,dy^2,$$
$$-Cd^2y = (a\beta - b\alpha)\,dx^2 + 2(a\beta' - b\alpha')\,dx\,dy + (a\beta'' - b\alpha'')\,dy^2.$$

Ferner ist $d^2z' = \gamma\,dx^2 + 2\gamma'\,dx\,dy + \gamma''\,dy^2 + c\,d^2x + c'\,d^2y$; oder, wenn man für d^2x, d^2y ihre vorigen Werthe setzt und folgende Abkürzungen einführt,

$$D = A\alpha + B\beta + C\gamma, \quad D' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma', \quad D'' = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'',$$

so kommt:

$$7. \qquad C\,d^2z' = D\,dx^2 + 2D'\,dx\,dy + D''\,dy^2.$$

Man kann aber d^2z' noch auf andere Weise ausdrücken. Denn es sei

$$dt' = T'\,dx' + U'\,dy', \qquad du' = U'\,dx' + V'\,dy',$$

so folgt:

$$8. \qquad d^2z' = T'\,dx'^2 + 2U'\,dx'\,dy' + V'\,dy'^2.$$

Durch Vergleichung der Werthe von d^2z' aus (7.) und (8.) ergiebt sich, mit Rücksicht auf (3.),

$$C(T'a^2 + 2U'ab + V'b^2) = D$$
$$C(T'aa' + U'(ab' + a'b) + V'bb') = D'$$
$$C(T'a'^2 + 2U'a'b' + V'b'^2) = D''$$

und hieraus folgt:

$$9. \qquad C^4(T'V' - U'U') = DD'' - D'D'.$$

Durch Entwicklung erhält man, vermittelst der bei (7.) angegebenen Werthe von D, D', D'',

$$DD'' - D'D' = (A^2 + B^2 + C^2)\,\mathfrak{K} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \mathfrak{C},$$

wo

$$\mathfrak{K} = \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma',$$
$$\mathfrak{A} = (B\gamma - C\beta)(B\gamma'' - C\beta'') - (B\gamma' - C\beta')^2,$$
$$\mathfrak{B} = (C\alpha - A\gamma)(C\alpha'' - A\gamma'') - (C\alpha' - A\gamma')^2,$$
$$\mathfrak{C} = (A\beta - B\alpha)(A\beta'' - B\alpha'') - (A\beta' - B\alpha')^2.$$

Nimmt man von den Ausdrücken

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + t^2,$$
$$aa' + bb' + cc' = tu,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 + u^2$$

die Ableitungen nach x und nach y, so kommt:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = tT, \qquad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = uT,$$
$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = tU, \qquad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = uU,$$
$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = tV, \qquad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = uV.$$

Aus den beiden ersten dieser Formeln ergiebt sich durch Elimination von γ: $B\alpha - A\beta = (cu - c't)\,T$; auf ähnliche Weise werden überhaupt folgende Gleichungen erhalten:

$$B\alpha - A\beta = (cu - c't)\,T,$$
$$B\alpha' - A\beta' = (cu - c't)\,U,$$
$$B\alpha'' - A\beta'' = (cu - c't)\,V,$$

aus welchen sich der Werth von $\mathfrak{C}$ ergiebt; eben so findet man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; es ist nämlich:

$$\mathfrak{A} = (au - a't)^2\,(TV - U^2),$$
$$\mathfrak{B} = (bu - b't)^2\,(TV - U^2),$$
$$\mathfrak{C} = (cu - c't)^2\,(TV - U^2),$$

und mithin:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = -(t^2 + u^2)\,(TV - U^2).$$

Ferner wird durch leichte Reductionen erhalten:

$$\mathfrak{K} = \frac{d(tV)}{dx} - \frac{d(tU)}{dy} = TV - U^2$$

und da noch

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = 1 + t^2 + u^2;$$

so folgt

$$DD'' - D'D' = TV - UU,$$

also, wegen (9.),

$$C\,(T'V' - U'U') = TV - UU.$$

Aus (6.) und der vorstehenden C eliminirend, findet man:

$$10. \quad \frac{T'V' - U'U'}{(1 + t't' + u'u')^2} = \frac{TV - UU}{(1 + tt + uu)^2},$$

welche Formel den zu beweisenden Satz enthält, weil ihre beiden Glieder die Krümmungsmaafse der Flächen B und A ausdrücken.

Soll demnach die Gleichung (2.) bestehen, so mufs zwischen x, y, x', y' die Gleichung (10.) Statt finden, aus welcher man sich nämlich z und z' mittelst der Gleichungen beider Flächen, der Einfachheit wegen, weggeschafft vorstellen kann.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden; nämlich die Gleichung (10.) besteht entweder *identisch* oder nicht.

Erster Fall.

Da in der Gleichung (10.) auf der linken Seite nur x' und y', auf der rechten nur x und y vorkommen, so kann sie nur dann identisch bestehen, wenn sowohl der Werth des links stehenden Gliedes unabhängig von x', y', als der des rechts stehenden unabhängig von x, y ist, also mit anderen Worten, wenn die Krümmungsmaafse beider Flächen unveränderlich und einander gleich sind. Es soll nun gezeigt werden, dafs zwei Flächen von unveränderlichen und beiderseits gleichen Krümmungsmaafsen immer auf einander abwickelbar sind.

Nämlich der Ausdruck des Linear-Elementes auf irgend einer krummen Fläche:

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

läfst sich durch schickliche Wahl der Veränderlichen p, q immer so umgestalten, dafs darin $E = 1$ und $F = 0$ werden. Dies kann allgemein dadurch erreicht werden, dafs man p und q Polar-Coordinaten auf der Fläche bedeuten läfst, nämlich p die Länge einer kürzesten Linie auf der Fläche von einem festen Anfangspuncte A, und q den Winkel, welchen die Tangente an p, in A, mit einer beliebigen, der Berührungs-Ebene in A parallelen Anfangs-Richtung bildet. Setzt man noch $G = \Phi^2$, so wird $ds^2 = dp^2 + \Phi^2\,dq^2$. Nun ist aber allgemein $\frac{d^2\varphi}{dp^2} + k\Phi = 0$, wo k das Krümmungsmaafs bezeichnet; also ergiebt sich, wenn k *unveränderlich*, da noch für $p = 0$, $\Phi = 0$ und $\frac{d\varphi}{dp} = 1$ werden müssen, $\Phi = \frac{1}{\sqrt{k}} . \sin p\sqrt{k}$, wie bereits im 6ten Bande dieses Journals, Seite 161, bemerkt worden ist. Für ein negatives k verwandelt sich dieser Ausdruck auf die allgemein bekannte Art in einen hyperbolischen Sinus.

Demnach erhält man für das Linear-Element einer Fläche von unveränderlichem Krümmungsmaafse (k) die Formel:

$$ds^2 = dp^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \sin p\sqrt{k}\right)^2 dq^2.$$

Für eine zweite Fläche von demselben unveränderlichen Krümmungsmaafse ergiebt sich auf gleiche Weise, wenn p' und q' ähnliche Bedeutungen haben, wie p und q,

$$ds'^2 = dp'^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \sin p'\sqrt{k}\right)^2 dq'^2,$$

wobei der Mittelpunct, von welchem die durch p' bezeichneten kürzesten Linien ausgehen, willkürlich bleibt. Setzt man nun $p = p'$, und $q = q' + \text{const.}$, so erhält man für entsprechende Puncte gleiche Linear-Elemente; w. z. b. w.

Folglich lassen sich überhaupt zwei Flächen von gleichem unveränderlichem Krümmungsmaafse auf einander abwickeln, und zwar auf unendlich viele Arten, indem man zwei beliebige Puncte der einen zweien beliebigen der anderen entsprechend setzen kann, wenn nur die Längen kürzester Linien auf den Flächen, zwischen beiden Paaren von Puncten, einander gleich sind. Hieraus fliefsen folgende Zusätze:

Jede Fläche, deren Krümmungsmaafs gleich Null, ist eine Biegung der Ebene; — wie bekannt.

Jede Fläche, deren Krümmungsmaafs (k) unveränderlich und positiv, läfst sich auf eine Kugel vom Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{k}}$ abwickeln.

Ich benutze diese Gelegenheit, um über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaafse einige Bemerkungen einzuschalten. Die Aufgabe, alle Flächen genannter Art zu finden, erheischt die Integration der Gleichung: $\frac{TV-UU}{(1+t^2+u^2)^2} = k$, oder:

$$11. \quad \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = k\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}^2.$$

Diese Integration ist bis jetzt, ausgenommen für $k=0$, nicht geleistet worden. Inzwischen kann, in Rücksicht auf die geometrische Bedeutung dieser Differential-Gleichung, die Aufstellung eines beschränkten Falles ihres Integrals von einigem Interesse sein; man gelangt dazu am leichtesten durch Einführung von Polar-Coordinaten.

Setzt man nämlich $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$, so folgt:

$$dr = \cos\psi\,dx + \sin\psi\,dy, \quad r\,d\psi = -\sin\psi\,dx + \cos\psi\,dy.$$

Ferner sei $dz = t\,dx + u\,dy = m\,dr + n\,d\psi$, mithin

$$t = m\cos\psi - \frac{n}{r}\sin\psi, \quad u = m\sin\psi + \frac{n}{r}\cos\psi,$$

und noch:

$$dm = \mu\,dr + \nu\,d\psi, \quad dn = \nu\,dr + \varrho\,d\psi.$$

Hieraus folgt:

$$d^2z = T\,dx^2 + 2U\,dx\,dy + V\,dy^2 = \mu\,dr^2 + 2\nu\,dr\,d\psi + \varrho\,d\psi^2 + m\,d^2r + n\,d^2\psi.$$

Nun ist aber

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr, \quad dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\psi^2, \quad x\,dy - y\,dx = r^2\,d\psi;$$

woraus durch Differentiation, $d^2x = 0$, $d^2y = 0$ gesetzt, leicht erhalten wird:

$$d^2r = r\,d\psi^2, \quad r\,d^2\psi = -2\,dr\,d\psi.$$

Demnach ist

$$d^2z = \mu\,dr^2 + 2\left(\nu - \frac{n}{r}\right)dr\,d\psi + (\varrho + mr)\,d\psi^2.$$

Vergleicht man diesen Werth von d^2z mit dem vorigen:

$$T\,dx^2 + 2U\,dx\,dy + V\,dy^2;$$

so folgt, weil jener durch Einsetzung der Werthe von dr, $d\psi$, in diesen übergehen mufs:

$$TV - U^2 = \left\{\mu(\varrho + mr) - \left(\nu - \frac{n}{r}\right)^2\right\}\frac{1}{r^2}.$$

Da zugleich $1+t^2+u^2=1+m^2+\frac{n^2}{r^2}$ ist, so verwandelt sich durch Einführung der Polar-Coordinaten r und ψ die Gleichung (11.) in folgende, in welcher m, n, μ, ν, ϱ durch die ihnen gleichgeltenden Ableitungen ersetzt sind:

$$12. \quad \frac{\frac{d^2z}{dr^2}\left(\frac{d^2z}{d\psi^2}+r\frac{dz}{dr}\right)-\left(\frac{d^2z}{dr\,d\psi}-\frac{1}{r}\cdot\frac{dz}{d\psi}\right)^2}{r^2\left\{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2\right\}^2}=k.$$

Diese ist zwar noch verwickelter als (11.), läfst aber den oben erwähnten beschränkten Fall des Integrals leichter wahrnehmen. Man setze nämlich

$$\frac{dz}{d\psi}=\text{constans}=h,$$

so verwandelt sich vorstehende Gleichung in folgende, worin noch zur Abkürzung u für $\left(\frac{dz}{dr}\right)^2$ geschrieben worden ist, nämlich

$$\frac{\frac{1}{2}r\frac{du}{dr}-\frac{h^2}{r^2}}{r^2\left\{1+u+\frac{h^2}{r^2}\right\}^2}=k \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dr}-\frac{2h^2}{r^3}=2kr\left\{1+u+\frac{h^2}{r^2}\right\}^2.$$

Diese Gleichung wird leicht integrirt; man erhält:

$$1+u+\frac{h^2}{r^2}=\frac{1}{a-kr^2},$$

wo a eine Constante; und hieraus ergiebt sich, mit Rücksicht auf die Bedeutung von u, folgendes Integral der Gleichung (12.):

$$13. \quad dz=h\,d\psi\pm\sqrt{\left(\frac{1}{a-kr^2}-1-\frac{h^2}{r^2}\right)}\,dr,$$

in welchem h und a willkürliche Constanten sind. Die hierin enthaltenen Flächen sind, wenn $h=0$, Umdrehungs-Flächen, überhaupt aber entstehen sie durch Bewegung einer unveränderlichen ebenen Curve, deren Gleichung erhalten wird, wenn man in vorstehende Formel $d\psi=0$ setzt, und z als Abscisse, r als Ordinate betrachtet. Diese Curve schneidet im Allgemeinen die Axe z nicht, weil für $r=0$ die Gröfse unter dem Wurzelzeichen negativ wird; Ausnahmen finden Statt, wenn $h=0$, und ferner, wenn zugleich h nicht Null, k negativ, und $a=0$ ist. Die Curve erzeugt die Fläche auf ähnliche Art, wie die gerade Linie die Schraubenfläche, nämlich durch Drehung um die Axe z, während zugleich alle ihre Puncte eine mit z parallele gemeinsame Bewegung haben. Zur näheren

Betrachtung unterscheide man zwei Fälle, je nachdem k positiv oder negativ ist.

A. Es sei k positiv, so kann zur Abkürzung sofort $k=1$ gesetzt werden. Da jetzt auch a positiv sein mufs, so erhält man, a^2 statt a schreibend, aus (13.), wenn noch $R=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{a^2-r^2}-\frac{h^2}{r^2}-1\right)}$ gesetzt wird,

$$14. \quad dz = h\,d\psi + R\,dr.$$

Hieraus erhält man für das Linear-Element:

$$ds^2 = (r^2+h^2)\,d\psi^2 + 2hR\,dr\,d\psi + (R^2+1)\,dr^2,$$

oder:

$$ds^2 = (r^2+h^2)\left(d\psi + \frac{hR\,dr}{r^2+h^2}\right)^2 + \frac{r^2\,dr^2}{(a^2-r^2)(r^2+h^2)}.$$

Nun sei

$$15. \quad d\psi + \frac{hR\,dr}{r^2+h^2} = \frac{dq}{\sqrt{(h^2+a^2)}}, \qquad \sqrt{(r^2+h^2)} = \sqrt{(a^2+h^2)}\sin p,$$

so verwandelt sich der Werth von ds^2 in

$$ds^2 = \sin p^2\,dq^2 + dp^2.$$

Unter den in der Formel (14.) enthaltenen Biegungen der Kugel befindet sich auch diejenige, welche bereits im 18ten Bande Seite 367 gegenw. Journals dargestellt worden; man erhält sie durch die Annahme $h=0$. Wird noch $a=1$ gesetzt, so ergiebt sich der Ausdruck der Kugel, nämlich $x=\sin p\cos q$, $y=\sin p\sin q$, $z=\cos q$. Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit den Formeln (15.) zeigt aber, dafs die Gleichung (14.), wenn man den Fall $h=0$ ausschliefst, nur die Biegung eines gewissen Theils der Kugelfläche darstellt, oder um es deutlicher auszusprechen: wird die in (14.) enthaltene Fläche auf die Kugel abgewickelt, so bedeckt sie eine Zone der Kugel zwischen zwei parallelen, zu bestimmten Werthen von p (p' und $\pi-p'$) gehörigen Kreisen. Diese Bedeckung wiederholt sich unaufhörlich, indem die Fläche unzählige Windungen macht. Die Grenzen jener Zone findet man durch Auflösung der Gleichung $R^2=0$, welche den kleinsten zulässigen Werth (r') von r liefert; es ist nämlich $r'^2=+\sqrt{(h^2a^2+\frac{1}{4}(h^2+1-a^2)^2)}-\frac{h^2+1-a^2}{2}$. Man beweist leicht, dafs immer $r'^2<a^2$ ist; der Werth von r wächst mithin von r' bis a und nimmt dann wieder von a bis r' ab; man erhält weiter den Werth von p' durch Einsetzung des Werthes r' von r in (15.). Die Curve, durch deren Bewegung die Fläche (14.) erzeugt wird, ist in der Gleichung $dz=R\,dr$ enthalten; sie besteht, genau genommen, aus unzähligen con-

gruenten Bogen, die einander in den Puncten, wo $r = r'$, berühren; man braucht aber nur einen derselben zu betrachten. Ein solcher Bogen ist gegen die Axe z hohl, in seinen Endpuncten, wo $r = r'$, senkrecht auf z, und in der Mitte, wo $r = a$, parallel mit z; seine Gestalt bietet übrigens keinen dem Anblick auffälligen Umstand dar. Er erzeugt die Fläche durch Drehung um die Axe z und gleichzeitige mit z parallele Fortrückung.

B. Ist k negativ, so setze man $k = -1$, $R = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{r^2+a} - \frac{h^2}{r^2} - 1\right)}$; alsdann ergiebt sich aus (13.)

$$17. \qquad dz = h\,d\psi + R\,dr.$$

Hieraus folgt, $d\psi + \frac{h\,R\,dr}{r^2+h^2} = dt$ gesetzt:

$$ds^2 = (r^2+h^2)\,dt^2 + \frac{r^2\,dr^2}{(r^2+h^2)(r^2+a)}.$$

Führt man noch $v^2 = r^2 + a$ ein, so verwandelt sich vorstehende Gleichung in folgende, nämlich:

$$ds^2 = (v^2+h^2-a)\,dt^2 + \frac{dv^2}{v^2+h^2-a}.$$

Diese Gleichung enthält drei verschiedene Fälle, je nachdem $h^2 - a$ positiv, Null oder negativ ist; ich will jedoch, die Aufzählung derselben übergehend, nur die *Umdrehungs-Flächen* von unveränderlichem negativem Krümmungsmaafse hervorheben. Setzt man nämlich in vorstehenden Formeln $h = 0$, so erhält man, noch $\pm a^2$ statt a schreibend:

$$dz = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{r^2 \pm a^2} - 1\right)}\,dr.$$

Nimmt man zuerst a^2 mit positiven Vorzeichen, und setzt $r = a\,\mathfrak{Sin}\,\Phi$ (ich bezeichne die hyperbolischen Functionen auf die von Hrn. Prof. *Gudermann* in diesem Journal vorgeschlagene Art), so kommt folgender Ausdruck der Fläche, worin, wie gewöhnlich, $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$ gesetzt ist, nämlich:

$$r = a\,\mathfrak{Sin}\,\Phi, \qquad z = \int \pm\sqrt{(1 - a^2\,\mathfrak{Cos}\,\Phi^2)}\,d\Phi.$$

Hier mufs $a^2 < 1$ sein. Die Fläche entsteht durch Drehung einer Curve, die aus unzähligen congruenten Bogen, etwa wie *DAE, EBF*, ..., besteht, um die Axe zz. (Fig. 16.)

Nimmt man a^2 mit negativem Vorzeichen, und setzt $r = a\,\mathfrak{Cos}\,\Phi$, so kommt:

$$r = a\,\mathfrak{Cos}\,\Phi, \qquad z = \int \pm\sqrt{(1 - a^2\,\mathfrak{Sin}\,\Phi^2)}\,d\Phi.$$

Die Fläche entsteht durch Drehung einer Curve aus Bogen wie *EBC, CDG*, ... um die Axe zz. (Fig. 17.)

Nimmt an $a=0$, und setzt $\frac{1}{r}=\mathfrak{Cos}\,\Phi$, so kommt:

$$r=\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\varphi}, \quad z=\Phi-\mathfrak{Tang}\,\Phi.$$

Die Fläche entsteht durch Drehung einer Curve wie ... *CBE* ... (Fig. 18.) um die Axe zz, der sich die Curve asymptotisch nähert. — Die Bogen dieser Curven werden der Reihe nach, von den Puncten *A*, *B*, *B* an gerechnet, dargestellt durch Φ, Φ, $\log\mathfrak{Cos}\,\Phi$.

Alle diese Flächen vom Krümmungsmaafse —1 müssen auf einander abwickelbar sein; dessenungeachtet ist es schwierig, ihre Linear-Elemente sämmtlich auf die Form $\sqrt{(dp^2+\mathfrak{Sin}p^2\,dq^2)}$ zu bringen, die sich zwar bei der ersten leicht ergiebt, die man aber bei allen erhalten müfste, wenn man ihre Coordinaten durch die Längen (p) kürzester Linien aus einem gemeinsamen Anfangspuncte, und den die Anfangsrichtung der p bestimmenden Winkel q ausdrücken könnte. Allein die Entwickelung endlicher Formeln für kürzeste Linien und deren Längen, in Coordinaten, führt hier auf sehr schwierige Differentialgleichungen, was nicht befremden kann, da derselbe Fall schon bei den Biegungen der Ebene der gewöhnliche ist. — Jetzt zur Haupt-Aufgabe zurück.

Zweiter Fall.

Die Gleichung (10.) bestehe nicht identisch, also die Krümmungsmaafse der Fläche *A* und *B* seien nicht unveränderlich und gleich. Man denke sich jetzt allgemein die Coordinaten von *A* durch die Hülfsgröfsen p, q, so wie die von *B* durch p', q' ausgedrückt, und setze, wie bisher, die Linear-Elemente gleich, nämlich

$$18. \quad E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2=E'\,dp'^2+2F'\,dp'\,dq'+G'\,dq'^2.$$

Ferner entwickle man die Krümmungsmaafse $k=f(p,q)$, $k'=\Phi(p',q')$, so sind f und Φ *bekannte* Functionen, und die in (10.) enthaltene Bedingung $k=k'$ giebt:

$$19. \quad f(p,q)=\Phi(p',q').$$

Soll diese Gleichung zulässig sein, so darf sie der nothwendigen Annahme, dafs p, q, p', q' sämmtlich veränderlich sind, und dafs p von q, so wie p' von q' unabhängig ist, nicht widersprechen, wie z. B. der Fall sein würde, wenn die eine Seite der Gleichung constant, die andere veränderlich wäre. Von Fällen solcher Art abgesehen, in denen sofort die Unmöglichkeit der Abwickelung einer Fläche auf die andere folgt, drückt die Gleichung (19.) eine erste Relation zwischen den Argumenten der bei-

derseitigen entsprechenden Puncte aus. Um die zweite zu erhalten, vorausgesetzt dafs sie vorhanden ist, differentiire man (19.); es sei

$$20. \quad dk = m\,dp + n\,dq = m'\,dp' + n'\,dq',$$

in welcher Gleichung also nicht zugleich m und n, oder m' und n' Null sein können. Es sei ferner

$$21. \quad dp' = \alpha\,dp + \alpha'\,dq, \quad dq' = \beta\,dp + \beta'\,dq,$$

mithin auch

$$22. \quad (\beta\alpha' - \beta'\alpha)\,dp = -\beta'\,dp' + \alpha'\,dq', \quad (\beta\alpha' - \beta'\alpha)\,dq = \beta\,dp' - \alpha\,dq'$$

und

$$23. \quad \begin{cases} m'\alpha + n'\beta = m, & m'\alpha' + n'\beta' = n, \\ -n\alpha + m\alpha' = (\beta\alpha' - \beta'\alpha)\,n', & n\beta - m\beta' = (\beta\alpha' - \beta'\alpha)\,m'. \end{cases}$$

Setzt man die Werthe von dp', dq' aus (21.) in (18.), so ergiebt sich

$$E'\alpha^2 + 2F'\alpha\beta + G'\beta^2 = E, \quad E'\alpha'^2 + 2F'\alpha'\beta' + G'\beta'^2 = G,$$
$$E'\alpha\alpha' + F'(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + G'\beta\beta' = F.$$

Hieraus folgt zuerst wie bekannt:

$$24. \quad (E'G' - F'F')(\beta\alpha' - \beta'\alpha)^2 = EG - FF.$$

Werden ferner vorstehende Werthe von E, G, F in dieser Ordnung mit n^2, m^2, $-2nm$ multiplicirt und die Producte addirt, so kommt:

$$E'(\alpha n - \alpha' m)^2 + 2F'(\alpha n - \alpha' m)(\beta n - \beta' m) + G'(\beta n - \beta' m)^2$$
$$= En^2 - 2Fmn + Gm^2,$$

und diese Gleichung giebt, wegen (23.) und (24.) folgende:

$$25. \quad \frac{En^2 - 2Fnm + Gm^2}{EG - FF} = \frac{E'n'^2 - 2F'n'm' + G'm'^2}{E'G' - F'F'},$$

aus welcher die unbekannten Gröfsen α, α', β, β' verschwunden sind. Diese Gleichung drückt, wenn sie nicht identisch besteht, die gesuchte zweite Relation zwischen den Argumenten entsprechender Puncte aus. Ueber ihre vorläufige Zulässigkeit gilt dieselbe Bemerkung, wie bei (19.). Man bemerke noch, dafs weder der Ausdruck $En^2 - 2Fnm + Gm^2$, noch der ähnliche auf der rechten Seite, jemals Null sein kann, wie leicht zu sehen. Es sollen nun zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem die Gleichung (25.) *identisch* besteht, oder nicht.

A. Diese Gleichung bestehe identisch, entweder unmittelbar oder in Folge von (19.). Multiplicirt man beide Seiten von (25.) mit denen von (18.), und zieht von den Producten die Quadrate beider Seiten von (20.) ab,

so kommt $\frac{(En-Fm)^2\,dp^2+2(En-Fm)(Fn-Gm)\,dp\,dq+(Fn-Gm)^2\,dq^2}{EG-FF} =$ einem ähnlichen Ausdrucke in p', q', E', n', etc., also auf beiden Seiten vollständige Quadrate; mithin nach Ausziehung der Wurzeln:

$$\frac{(En-Fm)\,dp+(Fn-Gm)\,dq}{\sqrt{(EG-FF)}} = \frac{(E'n'-F'm')\,dp'+(F'n'-G'm')\,dq'}{\sqrt{(E'G'-F'F')}},$$

oder, wenn man folgende Abkürzungen einführt, nämlich:

$$e = \frac{E}{\sqrt{(EG-FF)}}, \quad f = \frac{F}{\sqrt{(EG-FF)}}, \quad g = \frac{G}{\sqrt{(EG-FF)}},$$

$$e' = \frac{E'}{\sqrt{(E'G'-F'F')}}, \quad f' = \frac{F'}{\sqrt{(E'G'-F'F')}}, \quad g' = \frac{G'}{\sqrt{(E'G'-F'F')}},$$

so kommt:

26. $(en-fm)\,dp+(fn-gm)\,dq = (e'n'-f'm')\,dp'+(f'n'-g'm')\,dq'.$

Da die Gleichung (25.) identisch besteht, so mufs vorstehende, die nie identisch sein kann *), die zweite der gesuchten Relationen enthalten; sie mufs also, mit Zuziehung der Gleichung (19.) integrabel sein. Hierzu gehört eine Bedingung, welche sich folgendermaafsen finden läfst. Nämlich man eliminire aus (26.) zunächst dp und dq' vermittelst ihrer Werthe (20.)

$$dp = \frac{dk-n\,dq}{m}, \quad dp' = \frac{dk-n'\,dq'}{m'},$$

so kommt eine Gleichung von der Form:

$$K\,dk-Q\,dq+Q'\,dq' = 0,$$

in welcher ist:

$$K = \frac{en-fm}{m} - \frac{e'n'-f'm'}{m'},$$

$$Q = \frac{en^2-2fmn+gm^2}{m}, \quad Q' = \frac{e'n'^2-2f'n'm'+g'm'^2}{m'}.$$

Die Gröfsen K, Q, Q' enthalten aufser q und q' auch noch p und p', welche man sich vermittelst der Werthe $k = f(p,q)$, $k = \Phi(p',q')$ weggeschafft denken kann, so dafs in obiger Differentialgleichung nur k, q, q' vorkommen. Diese Gleichung wird mithin integrabel sein, wenn folgende Bedingung erfüllt wird:

27. $$K\left(\overline{\frac{dQ}{dq'}}+\overline{\frac{dQ'}{dq}}\right)+Q\left(\overline{\frac{dQ'}{dk}}-\overline{\frac{dK}{dq'}}\right)-Q'\left(\overline{\frac{dK}{dq}}+\overline{\frac{dQ}{dk}}\right) = 0.$$

*) Sollte die Gleichung (26.) in Folge von (20.) identisch bestehen, so müfste $en-fm : fn-gm : e'n'-f'm' : f'n'-g'm' = m : n : m' : n'$ sein; also $\frac{en-fm}{m} = \frac{fn-gm}{n}$, oder $en^2-2fmn+gm^2 = 0$, was nicht möglich ist.

Die partiellen Ableitungen sind hier unter Voraussetzung der vorangegangenen Elimination von p und p' genommen, welchen Umstand der oben angebrachte Querstrich anzeigen soll. Um diese Voraussetzung zu beseitigen, bemerke man, dafs p' und q' in Q nicht vorkommen, daher man hat:

$$dQ = \frac{dQ}{dp}dp + \frac{dQ}{dq}dq,$$

oder für dp seinen obigen Werth setzend:

$$dQ = \frac{1}{m}\cdot\frac{dQ}{dp}dk + \frac{m\frac{dQ}{dq} - n\frac{dQ}{dp}}{m}dq = \overline{\frac{dQ}{dk}}dk + \overline{\frac{dQ}{dq}}dq.$$

Daher ist

$$\overline{\frac{dQ}{dk}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{dQ}{dp}, \quad \overline{\frac{dQ}{dq}} = \frac{m\frac{dQ}{dq} - n\frac{dQ}{dp}}{m}, \quad \overline{\frac{dQ}{dq'}} = 0.$$

Auf gleiche Weise folgt:

$$\overline{\frac{dQ'}{dk}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{dQ'}{dp'}, \quad \overline{\frac{dQ'}{dq'}} = \frac{m'\frac{dQ'}{dq'} - n'\frac{dQ'}{dp'}}{m'}, \quad \overline{\frac{dQ'}{dq}} = 0.$$

Ferner sei zur Abkürzung $\frac{en-fm}{m} = A$, $\frac{e'n'-f'm'}{m'} = A'$, also $K = A - A'$, wo A kein p', q', und A' kein p, q enthält. Man hat daher

$$dK = \frac{dA}{dp}dp + \frac{dA}{dq}dq - \frac{dA'}{dp'}dp' - \frac{dA'}{dq'}dq',$$

oder

$$dK = \left(\frac{1}{m}\cdot\frac{dA}{dp} - \frac{1}{m'}\cdot\frac{dA'}{dp'}\right)dk + \frac{m\frac{dA}{dq} - n\frac{dA}{dp}}{m}dq - \frac{m'\frac{dA'}{dq'} - n'\frac{dA'}{dp'}}{m'}dq',$$

mithin

$$\overline{\frac{dK}{dq}} = \frac{m\frac{dA}{dq} - n\frac{dA}{dp}}{m}, \quad -\overline{\frac{dK}{dq'}} = \frac{m'\frac{dA'}{dq'} - n'\frac{dA'}{dp'}}{m'}.$$

Demnach erhält die Gleichung (27.) folgende Gestalt:

$$\frac{Q}{m'}\left\{\frac{dQ'}{dp'} + m'\frac{dA'}{dq'} - n'\frac{dA'}{dp'}\right\} = \frac{Q'}{m}\left\{\frac{dQ}{dp} + m\frac{dA}{dq} - n\frac{dA}{dp}\right\},$$

oder wenn man setzt: $mQ = en^2 - 2fnm + gm^2 = U$, und $m'Q' = e'n'^2 - 2fn'm' + g'm'^2 = U'$,

$$\frac{1}{U'}\left\{\frac{d\left(\frac{U'}{m'}\right)}{dp'} + m'\frac{dA'}{dq'} - n'\frac{dA'}{dp'}\right\} = \frac{1}{U}\left\{\frac{d\left(\frac{U}{m}\right)}{dp} + m\frac{dA}{dq} - n\frac{dA}{dp}\right\}.$$

Man bezeichne zur Abkürzung die eingeklammerten Ausdrücke links und

rechts durch S' und S, und setze noch $Am = en - fm = V$; so kommt:

$$m^2 . S = m\frac{dU}{dp} - U\frac{dm}{dp} + \left(m\frac{dV}{dq} - V\frac{dm}{dq}\right)m - \left(m\frac{dV}{dp} - V\frac{dm}{dp}\right)n.$$

Wird dieser Ausdruck, in welchem $U = en^2 - 2fnm + gm^2$ ist, gehörig entwickelt, und dabei die Bedingung $\frac{dm}{dq} = \frac{dn}{dp}$ beachtet, so heben sich alle Glieder auf, die nicht durch m^2 theilbar sind, und man erhält, auf beiden Seiten m^2 weglassend, folgenden Werth:

$$S = \frac{d(en-fm)}{dq} - \frac{d(fn-mg)}{dp}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich S', und die Bedingung (27.) wird mithin $US' - U'S = 0$, oder weil nach (25.) $U : U' = \sqrt{(EG-FF)} : \sqrt{(E'G'-F'F')}$ ist:

$$28. \quad \frac{\frac{d(en-fm)}{dq} - \frac{d(fn-mg)}{dp}}{\sqrt{(EG-FF)}} = \frac{\frac{d(e'n'-f'm')}{dq'} - \frac{d(f'n'-m'g')}{dp'}}{\sqrt{(E'G'-F'F')}}.$$

Die Herleitung dieser Formel schliefst zwar den Fall, in welchem $m = 0$, eigentlich aus; aber die Formel selbst erleidet dadurch keine Einschränkung. Die durch sie dargestellte Bedingung mufs identisch erfüllt werden, entweder unmittelbar, oder in Folge von (19.), wenn die Gleichung (26.), mit Zuziehung von (19.), sich durch eine Gleichung zwischen p, q, p', q' soll integriren lassen. Da die linke Seite blofs p, q, die rechte blofs p', q' enthält, und man sich p durch k und q, p' durch k' und q' ausgedrückt vorstellen kann, so sieht man, dafs diese Gleichung nur dann eine Folge der Gleichung $k = k'$ sein kann, wenn ihre linke Seite auf eine blofse Function von k, und die rechte auf dieselbe Function von k' zurückführbar ist. Besteht aber die Gleichung (28.) identisch, so ist auch (26.), mit Zuziehung von (19.), durch eine Gleichung zwischen p, q, p', q' mit einer willkürlichen Constante integrabel. Alsdann sind auch die Flächen auf einander abwickelbar; denn addirt man die Quadrate der Gleichungen (26.) und (20.), so ergiebt sich, mit Beachtung der identischen Gleichung (25.), die Gleichheit der Linear-Elemente (18.), wie erforderlich. Die Abwickelung ist in dem gegenwärtigen Falle auf unzählig viele Arten möglich; denn wegen der willkürlichen Constante in dem Integrale von (26.) kann im Allgemeinen, wenn man sich auf den Flächen A und B zwei Curven gezeichnet denkt, in deren Puncten unveränderliche und beiderseits gleiche Krümmungsmaafse Statt finden, ein beliebiger Punct der ersten einem be-

liebigen der zweiten entsprechend gesetzt werden, durch welche Annahme dann die Constante bestimmt wird.

Um ein Beispiel zu geben, seien die Schraubenfläche und die Umdrehungsfläche der Kettenlinie durch folgende Gleichungen gegeben:

$$x = q\cos p, \quad y = q\sin p, \qquad z = bp,$$

$$x = q'\cos p', \quad y = q'\sin p', \quad \mathfrak{Cos}\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{q'}{a}.$$

Die Gleichsetzung der Linear-Elemente giebt zunächst:

$$(b^2+q^2)\,dp^2 + dq^2 = q'^2\,dp'^2 + \frac{q'^2\,dq'^2}{q'^2-a^2}.$$

Die Krümmungsmaafse sind $\frac{-b^2}{(b^2+q^2)^2}$ und $-\frac{a^2}{q'^4}$; aus ihrer Gleichsetzung folgt:

$$\frac{b^2+q^2}{b} = \frac{q'^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{q\,dq}{b} = \frac{q'\,dq'}{a}.$$

Die Bedingung (27.) wird hier, da $m=0$, $m'=0$, $n=\frac{q}{b}$, $n'=\frac{q'}{a}$ gesetzt werden können, (denn es ist einleuchtend, dafs man in (19.) für k auch irgend eine Function des Krümmungsmaafses nehmen darf):

$$\frac{q^2}{b^2} = \frac{q'^2-a^2}{a^2},$$

sie ist, wie man sieht, mit der vorigen Gleichung unverträglich, wenn nicht $a=b$, für $a=b$ aber mit jener einerlei, nämlich $q^2 = q'^2 - a^2$. Die Gleichung (28.) besteht alsdann identisch, indem ihre Seiten beide Null werden; folglich ist die Gleichung (26.) integrabel; sie ist hier: $q\sqrt{(q^2+a^2)}\,dp = q'\sqrt{(q'^2-a^2)}\,dp$, oder weil $q^2 = q'^2 - a^2$, so ist sie $dp = \pm dp'$; also $\pm p' = p +$ const. Folglich sind, wie schon Band 18. S. 365 auf andere Art bewiesen worden, die beiden oben angegebenen Flächen, wenn $a=b$, auf einander abwickelbar, und zwar hat man für entsprechende Puncte: $a^2+q^2 = q'^2$ und $p^2 = (p'+c)^2$.

B. Wenn die Gleichung (25.) nicht identisch besteht, so folgt auf dieselbe Weise, wie vorhin, die Differential-Gleichung (26.), und die Bedingung der Abwickelbarkeit besteht dann darin, dafs jener vermittelst der endlichen Gleichungen (19.) und (25.) zwischen p, q, p', q' genügt werden mufs. Geht dieses in der That an, so sind die Flächen auf einander abwickelbar, aber nur auf eine oder etwa einige bestimmte Weisen, weil die alsdann durch (19.) und (25.) gegebenen Relationen zwischen den Argumenten entsprechender Puncte keine willkürliche Constante ent-

halten. Einen solchen Fall würden die Biegungen des einfachen Hyperboloids darbieten, welche sich nach dem S. 361 des 18ten Bandes angegebenen Verfahren finden lassen; ich will jedoch durch Entwickelung dieser und ähnlicher Beispiele gegenwärtigen Aufsatz nicht noch verlängern.

Die bisher entwickelten allgemeinen Formeln vereinfachen sich sehr, wenn man für die Hülfsgröfsen p und p' die Krümmungsmaafse oder irgend eine Function derselben nimmt. Alsdann verwandelt sich die Gleichung (19.) in $p = p'$; ferner wird in (20.) $m = 1$, $m' = 1$, $n = 0$, $n' = 0$; mithin aus (25.):

$$\frac{G}{EG - FF} = \frac{G'}{E'G' - F'F'},$$

ferner aus (26.):

$$\pm \frac{F\,dp + G\,dq}{\sqrt{(EG - FF)}} = \frac{F'\,dp + G'\,dq'}{\sqrt{(E'G' - F'F')}}.$$

Man kann in diesen Formeln noch $G = 1$, $G' = 1$ nehmen; alsdann sind q, q' Bogenlängen solcher Curven, in deren Puncten die Krümmungsmaafse überall gleich sind. Die vorstehenden Gleichungen werden alsdann $E - FF = E' - F'F'$ und $\pm (F\,dp + dq) = F'\,dp + dq'$, oder wenn man noch mit w den Winkel bezeichnet, unter welchem die Curve von constantem p die von constantem q in dem zu p, q gehörigen Puncte schneidet, und mithin setzt: $F = \sqrt{E}.\cos w$, so erhält man aus obigen Gleichungen

$$\sqrt{E}.\sin w = \sqrt{E'}\sin w' \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{E}.\sin w.dp = \sqrt{E'}.\sin w'.dp$$

und

$$\pm (\sqrt{E}.\cos w.dp + dq) = \sqrt{E'}.\cos w'.dp + dq'.$$

Man sieht sofort, dafs diese Gleichungen nichts anderes fordern, als die Gleichheit der Projectionen entsprechender Linear-Elemente nach den Linien von constantem Krümmungsmaafse und den auf diese senkrechten Richtungen, wovon die Gleichheit der Linear-Elemente eine unmittelbare Folge ist. Diese Gleichungen liefern mithin die Bedingungen der Abwickelbarkeit in ihrer einfachsten Gestalt; nämlich wenn die erste identisch, und die zweite integrabel ist, oder wenn die erste nicht identisch ist, aber der zweiten genügt, also überhaupt, wenn man beiden durch eine dritte Gleichung zwischen p, q, q' genugthun kann, so sind die Flächen auf einander abwickelbar. Dafs diese dritte Gleichung immer die Form $\pm q' = q + P$ haben mufs, in welcher P eine Function von p, ohne q, ist, erhellet eben so sehr aus der Anschauung, als es sich leicht durch Rechnung aus obigen Formeln nachweisen läfst, wobei ich nicht verweile. Da

es jedoch in den meisten Fällen grofse Schwierigkeiten finden würde, das Krümmungsmaafs und die Bogenlänge der Curve constanten Krümmungsmaafses als Argumente in den Ausdruck des Linear-Elementes einzuführen, so schien es jedenfalls der Mühe werth, bei Aufstellung der Bedingungen der Abwickelbarkeit die Wahl der Hülfsgröfsen p, q auf keine Weise einzuschränken. Aus den in dieser Absicht oben entwickelten allgemeinen Formeln ergiebt sich, dafs die Frage, ob es möglich ist, zwei Flächen, deren Gleichungen in Coordinaten man kennt, auf einander abzuwickeln, sich immer ohne Hülfe der Integral-Rechnung beantworten läfst; es reichen nämlich die Operationen des Differentiirens und Eliminirens zu ihrer Entscheidung durch Rechnung hin. Verlangt man aber die Art der Abwickelung, wenn solche möglich ist, näher zu bestimmen, oder die Relationen zwischen den Argumenten entsprechender Puncte aufzustellen, so sind nur in den Fällen Integrationen erforderlich, in welchen unzählige Arten der Abwickelung Statt finden, und mithin jene Relationen willkürliche Constanten enthalten müssen.

Verbesserungen und Zusätze im 18. Bande.

Seite **13** am Schlusse des §. **7.**: statt „wie auch $\mathrm{dn}\,u$; lies: nicht so auch $\mathrm{dn}\,u$; diese Function ist $=1$ für $k=0$ und $=\cos lu=\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,u}$ für $k=1$. Sie verkleinert sich also beim Wachsen des Moduls, während u denselben Werth behält, d. h. es ist

$$1>\mathrm{dn}\,u>\cos lu.$$

Seite **146** am Schlusse des §. **32.** ist hinzuzufügen: Die sechs übrigen Formeln verwandeln sich auf ähnliche Weise in:

$$\mathrm{cn}\,a=\frac{\sqrt{(\mathrm{dn}2a+k'\mathrm{sn}2a)}+\sqrt{(\mathrm{dn}2a-k'\mathrm{sn}2a)}}{\sqrt{(1+k\,\mathrm{sn}\,2a)}+\sqrt{(1-k\,\mathrm{sn}\,2a)}},\qquad \mathrm{cnc}\,a=\frac{\sqrt{(\mathrm{dn}2a+k'\mathrm{sn}2a)}-\sqrt{(\mathrm{dn}2a-k'\mathrm{sn}2a)}}{\sqrt{(1+k\,\mathrm{sn}\,2a)}+\sqrt{(1-k\,\mathrm{sn}\,2a)}},$$

$$\mathrm{dn}\,a=\frac{\sqrt{(\mathrm{dn}2a+k'\mathrm{sn}2a)}+\sqrt{(\mathrm{dn}2a-k'\mathrm{sn}2a)}}{\sqrt{(1+\mathrm{sn}\,2a)}+\sqrt{(1-\mathrm{sn}\,2a)}},\qquad \mathrm{dnc}\,a=\frac{\sqrt{(\mathrm{dn}2a+k'\mathrm{sn}2a)}-\sqrt{(\mathrm{dn}2a-k'\mathrm{sn}2a)}}{\sqrt{(1+\mathrm{sn}\,2a)}-\sqrt{(1-\mathrm{sn}\,2a)}},$$

$$\mathrm{tn}\,a=\frac{\sqrt{(1+\mathrm{sn}\,2a)}-\sqrt{(1-\mathrm{sn}\,2a)}}{\sqrt{(\mathrm{dn}2a+k'\mathrm{sn}2a)}+\sqrt{(\mathrm{dn}2a-k'\mathrm{sn}2a)}},\qquad \mathrm{tnc}\,a=\frac{\sqrt{(1+\mathrm{sn}\,2a)}+\sqrt{(1-\mathrm{sn}\,2a)}}{\sqrt{(\mathrm{dn}2a+k'\mathrm{sn}2a)}-\sqrt{(\mathrm{dn}2a-k'\mathrm{sn}2a)}}.$$

Seite **155** am Ende ist hinzuzufügen: Die Formel **1.** kann auch auf folgende einfachere Weise hergeleitet werden. Es ist

$$\mathrm{cn}\,(a-b)-\mathrm{cn}\,(a+b)=\frac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2b}\ \text{und}$$

$$\mathrm{dn}\,(a-b)+\mathrm{dn}\,(a+b)=\frac{2\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2b},\ \text{also}$$

$$\frac{\mathrm{cn}\,(a-b)-\mathrm{cn}\,(a+b)}{\mathrm{dn}\,(a-b)+\mathrm{dn}\,(a+b)}=\mathrm{sn}\,a\,.\,\mathrm{sn}\,b.$$

Diese Formel verwandelt sich in **1**, wenn man $a+b$ für a und $a-b$ für b setzt.

Seite **171** sind die Formeln **7.** und **8.** nicht zu numeriren, weil sie mit den Formeln **3.** und **4.** übereinstimmen.

Seite **311** in der Formel **13.**: statt $\mathrm{el}\,(u)\,i$ lies $\mathrm{el}\,(ui)$.

Seite **340**, Zeile **16**: statt t,m^2 lies $t\,.\,m^2$, und Zeile **19**: statt $2\,m_2^2\,.\,t_1$ lies $2\,m_1^2\,.\,t_1$.

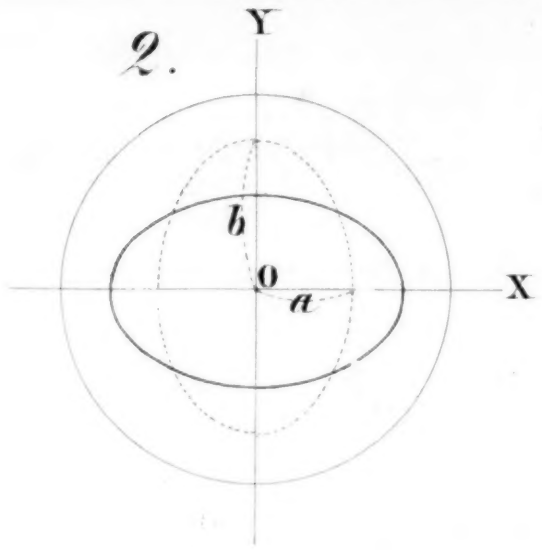
Seite **341**, Zeile **3** von unten: statt $\mathfrak{K}$ lies $\mathfrak{K}_4$.

Seite **344** ist in der untersten Formel auf der rechten Seite des $=$ das Zeichen $\surd$ dem Ausdrucke vorzusetzen.

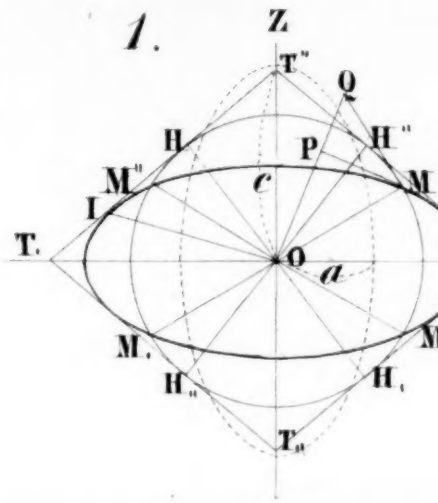
Seite **347**, Zeile **7** von unten: statt $v=u$ lies $v=u_1$ und Zeile **3** von unten auf der rechten Seite des $=$ lies $\mathrm{el}\,u_1$ statt $\mathrm{el}\,u$.

Seite **364**, Zeile **6** von unten lies zweimal E' statt K'.

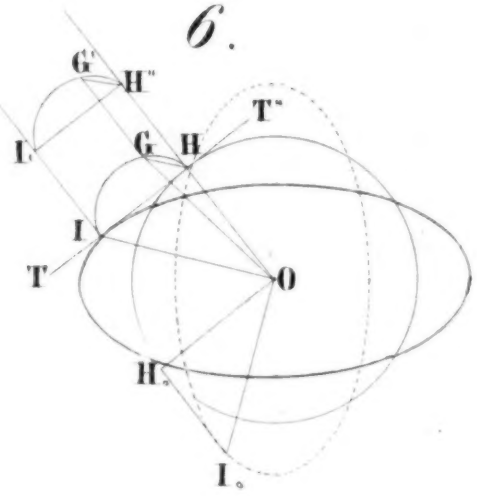
2.


Y
b
O
a
X

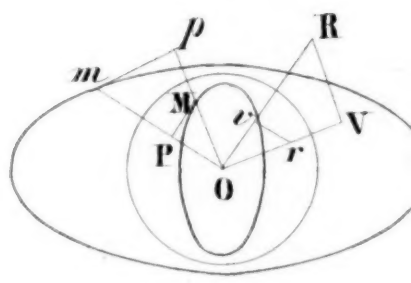
1.


Z
T"
Q
H
P
H"
M"
c
M
I
T.
O
a
M.
H"
H.
T"

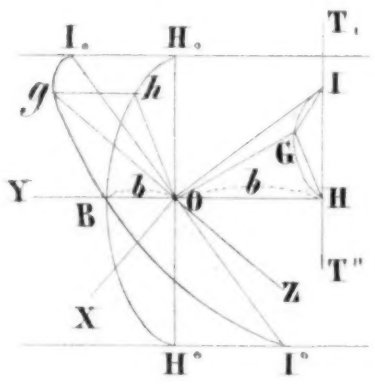
6.


G'
H"
T"
L
G
H
I
T
O
H.
I.

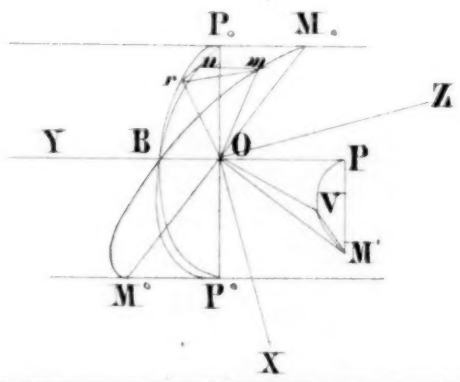
4.


p
R
m
M
v
V
P
r
O

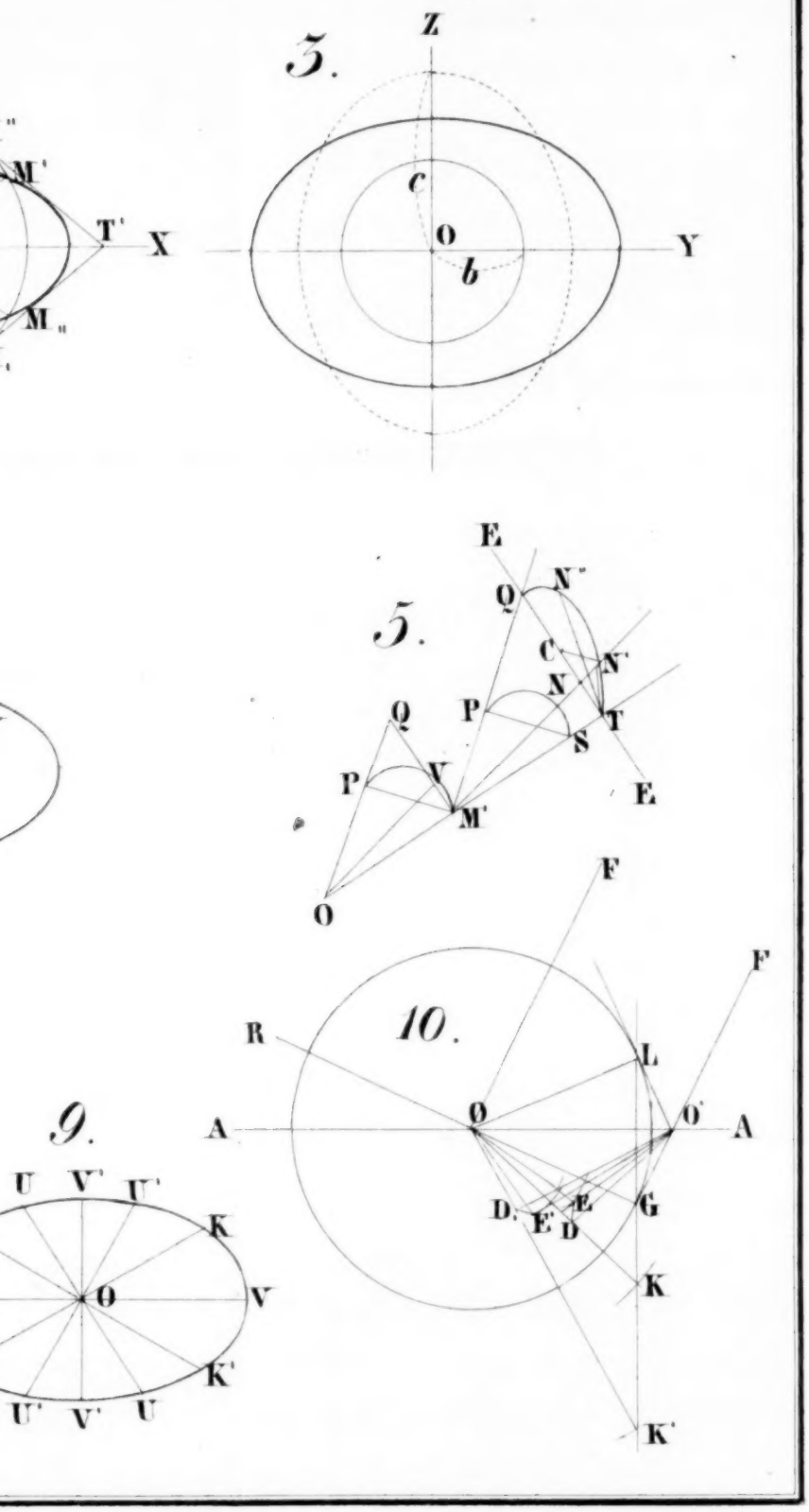
7.


I.
H.
T.
g
h
I
G
Y
b
O
b
H
B
T"
Z
X
H°
I°

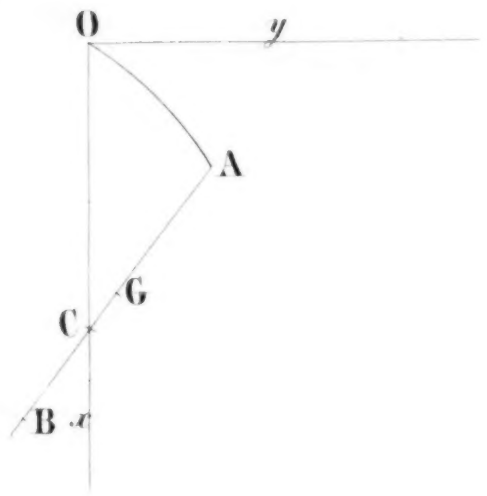
8.


P.
M.
u
w
r
Z
Y
B
O
P
V
M'
M°
P°
X

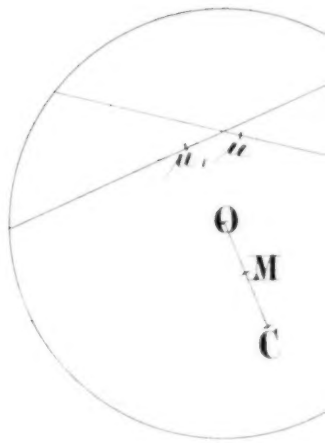
U
K'
V
K
U'


M'
T'
X
M''
3.
Z
c
O
b
Y
E
5.
Q
N''
C
N'
N
P
T
S
E
V
M'
O
F
9.
U
V'
U'
K
V
K'
U'
V'
U
10.
R
L
A
O'
A
D
E'
E
D
G
K
K'

11.

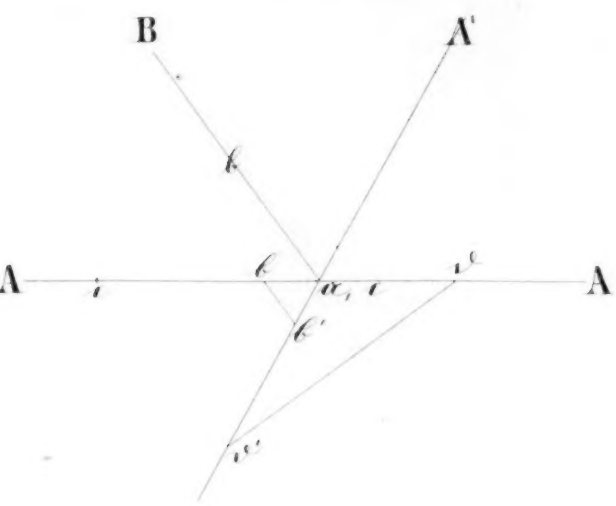


12.

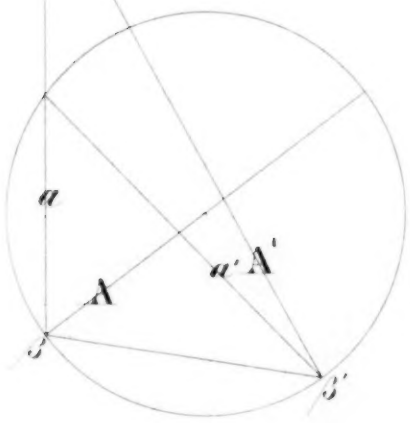


14.

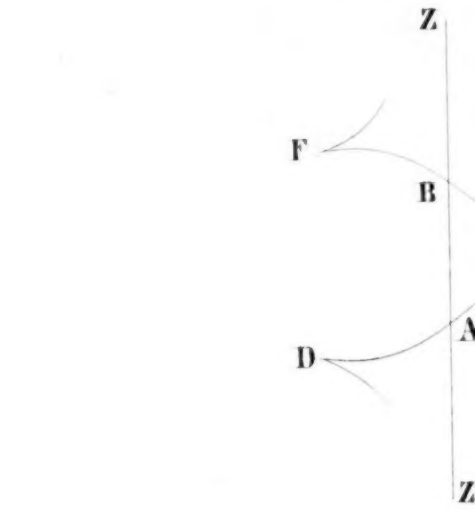
15.



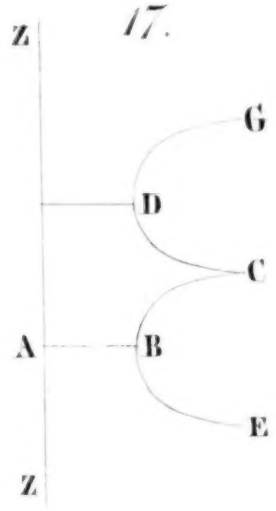
15.



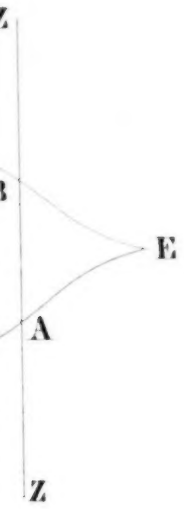
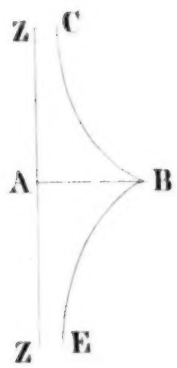
16.



17.



6.



18.